UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Campus de Rio Claro

Marcos Vinícius Ribeiro

Orientadora: Prof^a^ Dr^a^ Lourdes de la Rosa Onuchic

Rio Claro (SP)

2010

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Campus de Rio Claro

O ENSINO DO CONCEITO DE INTEGRAL, EM SALA DE AULA, COM RECURSOS DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Marcos Vinícius Ribeiro

Orientadora: Profª Drª Lourdes de la Rosa Onuchic

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – Área de Concentração em Ensino e aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos – para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Rio Claro (SP)

2010

510.07 Ribeiro, Marcos Vinícius
R484e O ensino do conceito de integral, em sala de aula, com recursos da história da matemática e da resolução de problemas / Marcos Vinícius Ribeiro. - Rio Claro : [s.n.], 2010
324 f. : il., figs., gráfs., tabs., quadros, fots.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Lourdes de la Rosa Onuchic

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Ensino-aprendizagem do cálculo diferencial e integral. 3. Cálculo diferencial e integral. 4. Resolução de problemas. 5. História da matemática. 6. Sala de aula. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

COMISSÃO EXAMINADORA

Profª Drª Lourdes de la Rosa Onuchic
(orientadora)

Prof. Dr. Sergio Roberto Nobre

Profª Drª Norma Suely Gomes Allevato

Marcos Vinícius Ribeiro (aluno)

Rio Claro, 18 de fevereiro de 2010.

Resultado:: ____

A *Deus* pelo amor incondicional e pelas inúmeras benções sem medida.

A *Jesus Cristo*, meu Senhor e Salvador.

A minha querida esposa *Viktória Kövesdy Ribeiro* e ao meu filhão *Lucas Vinícius Kövesdy Ribeiro.*

A querida Profª Drª

Lourdes de la Rosa Onuchic.

AGRADECIMENTOS

Venho agradecer primeiramente a ***DEUS***, pelo dom da vida, por sua infinita misericórdia para comigo, proporcionando a conclusão de mais esta empreitada. A Ele seja a Toda Honra, Glória e o Domínio pelos séculos dos séculos.

Agradeço a minha esposa Viktória, pela ajuda, força e companheirismo. Eu te amo Viky! Ao meu filho Lucas Vinícius, presente e milagre de Deus na minha vida, que trouxe-me uma nova força.Agradeço a ele por abdicar muitas vezes de brincar com papai.

Agradeço os meus queridos pais Luiz e Francisca, que durante toda vida, estiveram sempre presentes e me apoiando, e pelo exemplo que são para mim de fibra e garra.

Agradeço a minha querida orientadora, Professora Dra. Lourdes que acreditou em mim, me deu a oportunidade e a honra de ser seu aluno. Seu exemplo como educadora não será esquecido. Não tive em minha vida uma professora tão presente e bondosa. O que dizer mais? Simplesmente: Obrigado, Obrigado e mais uma vez Obrigado.

Agradeço à Banca Examinadora, que com muito cuidado e dedicação fez deste profesor um professor um pesquisador melhor. Aos membros do GTERP – Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas.

Agradeço a minha amiga Maria Lúcia Galvão Leite Travassos, a Malu, por me acompanhar desde o projeto e até as revisões finais, além de ser companheira de estrada.

Agradeço a minhas irmãs de sangue Mára Cristinha e Laís Angélica pelo incentivo. Agradeço as minhas “irmãs” de mestrado, Célia e Analucia, por muito me ajudar e compartilhar tantos momentos juntos. Agradeço a minha amiga Raquel Araium pelo companheirismo desde agosto de 2001, em tantas viagens feitas. Agradeço as minhas professoras de inglês, minha querida tia Marilena e minha querida cunhada Andrea.

Agradeço a Faculdade de Engenharia de Sorocaba, FACENS, na pessoa do Sr. José Alberto Deluno, dos coordenadores, e de meus amigos professores, secretárias, pelo apoio e incentivo a realizar este meu sonho. Agradeço a todos os meus alunos.

Agradeço a Escola Superior de Administração, Marketing e Comunicação, ESAMC Sorocaba na pessoa do Diretor Sandro Vidotto, e da excepcional ajuda de pessoas singulares presentes no Centro de Apoio, onde agradeço todos na pessoa de meu ex-aluno e amigo Camilo Leles, a quem tanto recorri por ajuda com seus conhecimentos técnicos.

Aos meus amigos Duelci e Elivanete, companheiros de mestrado e de corridas.

Agradeço a UNESP, pelos professores e por reunir tantas pessoas especiais num mesmo local, onde pude crescer muito em conhecimentos.

Agradeço a Dona Ana pelo cuidado com os cafés e almoços durante tantos anos na casa da D. Lourdes e finalmente a muitas outras pessoas amigas que não mencionei aqui, mas que, cada uma, me ajudou com sua própria maneira.

RESUMO

Como professor de uma Faculdade de Engenharia e responsável por disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, pude vivenciar muitas inquietações no processo de ensino e aprendizagem desse ramo da Matemática e constatar dificuldades encontradas nesse processo e, em especial, no ensino e na aprendizagem de Integrais. Nosso Fenômeno de Interesse naturalmente surgiu dessa inquietação. Apoiados na Metodologia de Pesquisa de Romberg desenvolvemos toda nossa Pesquisa seguindo, de perto, um modelo de desenvolvimento criado por nós. Depois de relacionarmos nossas ideias com ideias de outros, foi criada, a Pergunta da Pesquisa que se tornou então, nosso Problema. Trabalhando com a História da Integral como parte da História da Matemática, com Resolução de Problemas e a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, como metodologia de trabalho, analisamos uma sala de aula de um curso de engenharia onde o ensino e a aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral era nosso objetivo. Foi criado um projeto, aplicado em doze encontros de cem minutos cada. Dessa aplicação coletamos evidências que, confrontadas à Pergunta da Pesquisa puderam nos conduzir à resposta da Pergunta feita. Os alunos nesse processo foram participantes e assumidos como co-construtores de seu próprio conhecimento.

Palavras-chave: Cálculo Diferencial e Integral; Resolução de Problemas; História da Matemática; Sala de Aula.

ABSTRACT

As a professor of a College of Engineering and responsible for courses in differential and integral calculus, I could experience many concerns in the teaching and learning of this branch of mathematics and find difficulties in that process, in particular in teaching and learning of Integrals. Our Phenomenon of Interest naturally arose that concern. Supported by Romberg Research Methodology, we developed all our research following closely a development model created by us. After we related our ideas with ideas of others, it was created the research question which then became our problem. Working with the History of Integral as part of the History of Mathematics with Problem Solving Methodology and Teaching-Learning Assessment of Mathematics through Problem Solving, as work methodology, we analyzed a classroom of an engineering course where the teaching and learning of differential and integral calculus was our goal. It was created a project implemented in twelve meetings of a hundred minutes each. This application collected evidences that, faced the Question of the Research, lead us to answer the Question asked. The students were participants in that process and assumed to be co-constructors of their own knowledge.

Key words: Differential and Integral Calculus; Problem Solving; History of Mathematics; Classroom.

SUMÁRIO

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Introdução

Nossa Trajetória pessoal e profissional

Opção pela Matemática e pela Educação Matemática.

Somos, por formação profissional, um engenheiro formado no Curso de Engenharia Elétrica na FACENS, Faculdade de Engenharia de Sorocaba. No início do quarto ano de Engenharia Elétrica, depois de termos feito um estágio na Usina Hidrelétrica de Itaipu, fomos chamados para lecionar Matemática no Colégio Salesiano, em Sorocaba. Deu-se, assim, nosso início no magistério, trabalhando no Ensino de 1º grau. Entretanto, desde agosto de 2001, estamos lecionando no Ensino Superior, na Faculdade de Engenharia, a FACENS, a mesma faculdade onde cursamos Engenharia, e numa Faculdade de Administração a ESAMC, Escola Superior de Administração, Marketing e Comunicação.

Trabalhando com Cálculo Diferencial e Integral, pudemos perceber a dificuldade que os alunos têm com a aprendizagem desse ramo de Matemática e isso vem, já de algum tempo, mostrando-se um desafio.

Uma questão, então, tem se apresentado: – Como trabalhar Cálculo e, em especial, Integrais com alunos que trazem dificuldade em Matemática desde o Ensino Fundamental?

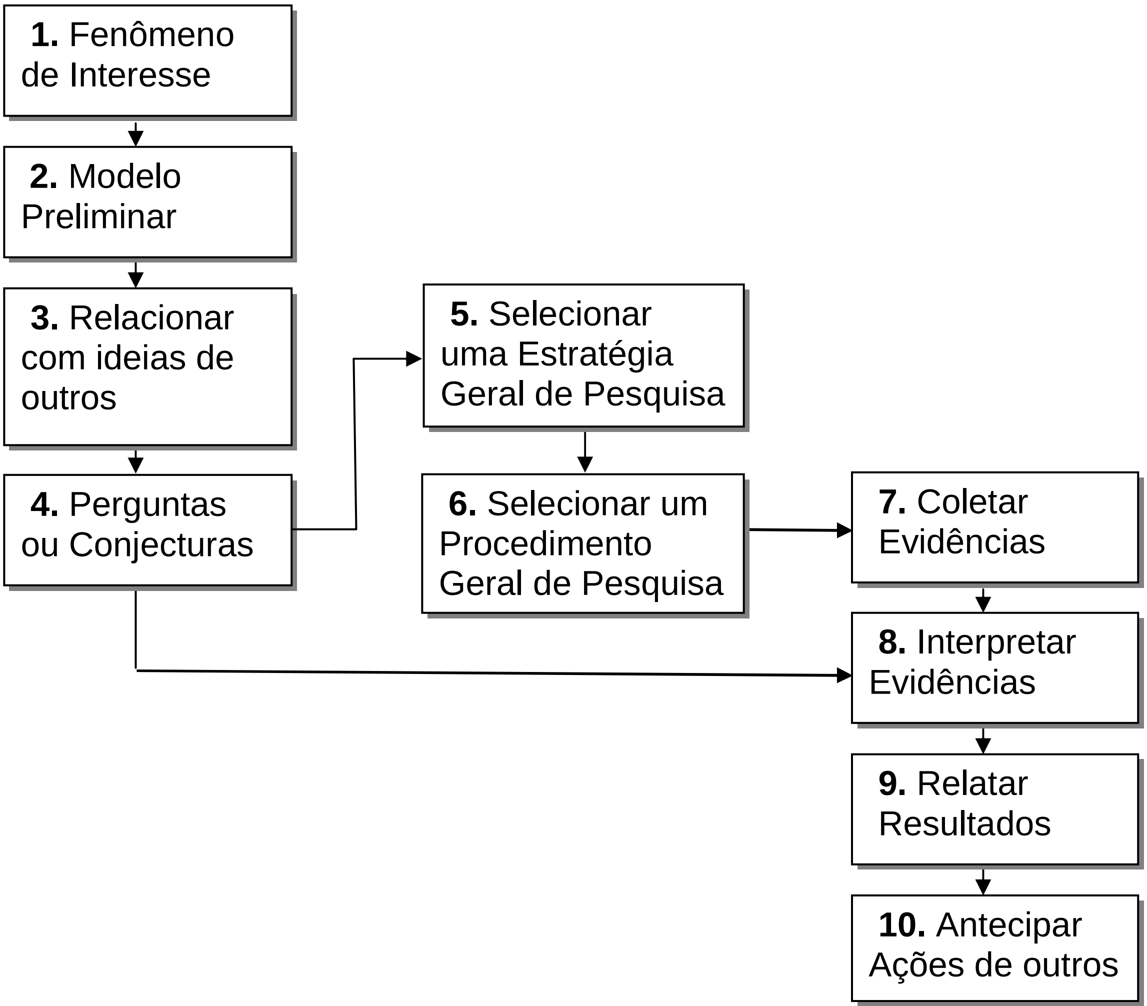
Mas esse problema deixava de ser um problema a ser resolvido no Ensino Superior de um Curso de Engenharia. Esse problema estava mais ligado à Educação Matemática.

Procurando uma instituição pública que trabalhasse, profissionalmente, com Educação Matemática, entramos em contato com o Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, da UNESP – Campus de Rio Claro. Passamos a frequentar algumas disciplinas desse Programa e a participar de um Grupo de Pesquisa – GTERP – Grupo de Trabalho e Estudo em Resolução de Problemas. Em 2006, fomos selecionado para o Mestrado em Educação Matemática nessa instituição.

Depois de termos tido contato, durante as disciplinas cursadas no mestrado, com diferentes metodologias de pesquisa, acabamos por optar pela Metodologia de Romberg, com a qual tivemos contato através do artigo “Perspectives on Scholarship and Research Methods” (Perspectivas sobre o Conhecimento e Métodos de Pesquisa), em 1992, traduzido por Lourdes de la Rosa Onuchic e Maria Lúcia Boero (2007). No GTERP, a Coordenadora do Grupo defende essa Metodologia de Pesquisa.

Com esse artigo, Romberg pretende identificar, nas Ciências Sociais, as amplas tendências de pesquisa que estão relacionadas ao estudo do ensino e da aprendizagem nos cenários escolares e determinar como essas tendências têm influenciado o estudo da Matemática nas escolas. Ele descreve a Educação Matemática como um campo de estudos; esboça as atividades de pesquisadores, e resume uma variedade de métodos usados por eles, visando a entender a base dessas tendências.

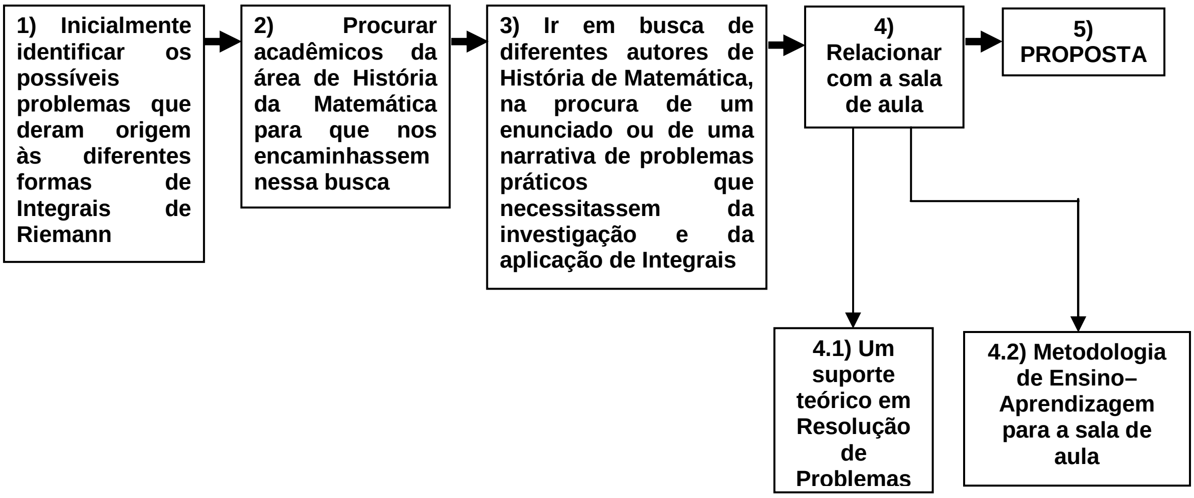
A Metodologia de Romberg apresenta as atividades que um pesquisador desenvolve ao longo de sua pesquisa e, num fluxograma, apresenta dez atividades distribuídas em três locos



Fonte: ROMBERG, 1992, p.51

Decididos a seguir a orientação dessa Metodologia, dando início à pesquisa, definimos nosso <u>Fenômeno de Interesse</u>: trabalhar ensino-aprendizagem de Integrais no Ensino Superior.

Como segundo passo, criamos um <u>Modelo Preliminar</u>



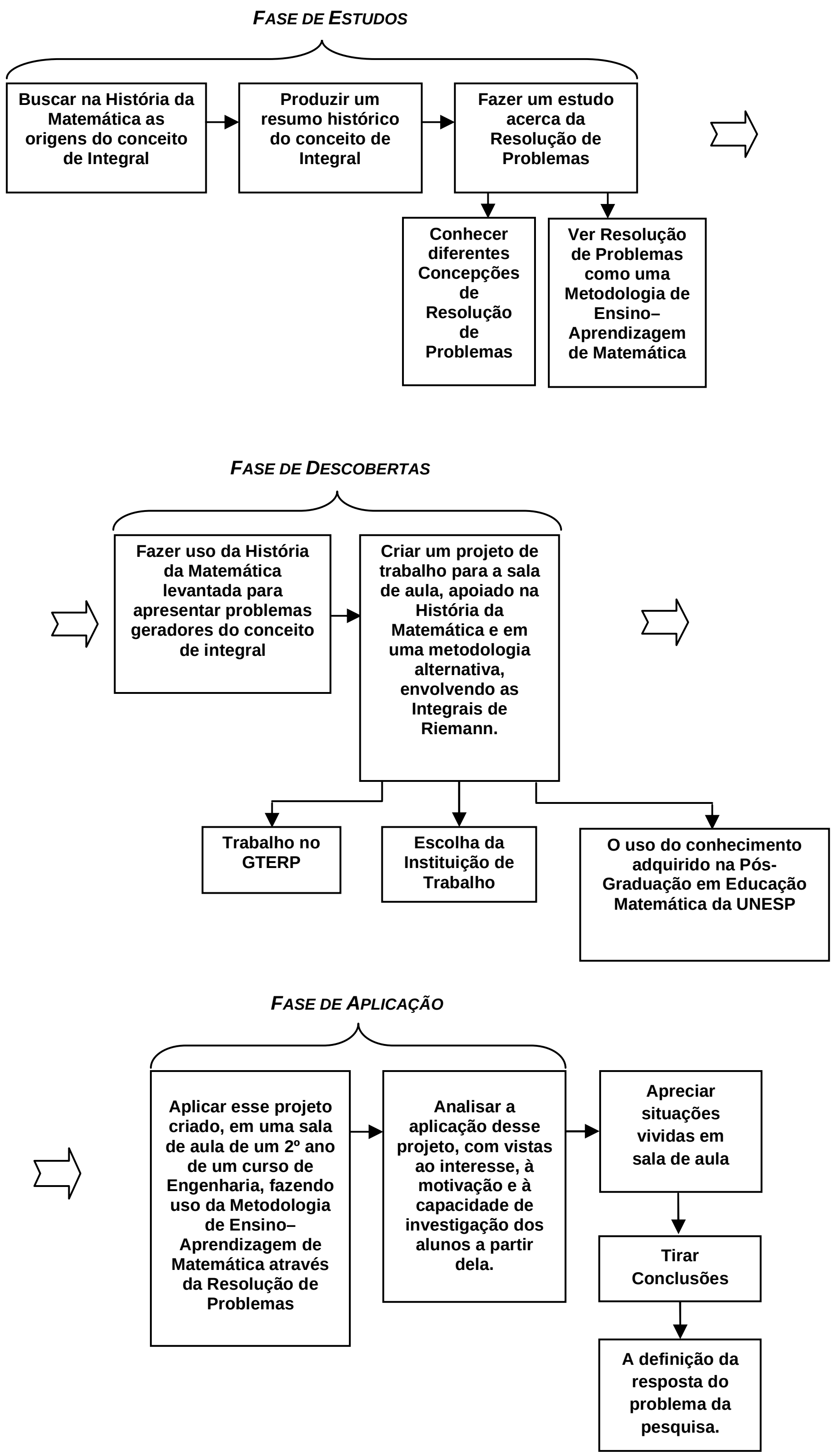
A terceira atividade pedia para <u>Relacionar com Ideias de Outros</u>.

Quem seriam nossos “outros” que cuidariam da fundamentação teórica de nossa pesquisa?

Ao definir esses “outros”, nosso Modelo Preliminar passou por uma grande mudança.

Os “outros”, para nós, seriam aqueles que se dedicaram à História da Integral como parte da História da Matemática; aqueles que trabalham ou trabalharam com Resolução de Problemas, a realidade da Sala de Aula de um Curso de Engenharia, que trabalha Cálculo Diferencial e Integral em geral e, em especial, Integrais.

Ao tomarmos consciência de que nossos “outros” eram esses três eixos, percebemos que mudava muito o caminho que deveríamos percorrer. Sentimos, então, que nosso Modelo Preliminar deveria passar por sérias mudanças. Reconhecendo que nosso trabalho seria muito mais abrangente, criamos um Modelo Modificado, diagramado em três Fases.


FASE DE ESTUDOS
Buscar na História da Matemática as origens do conceito de Integral
Produzir um resumo histórico do conceito de Integral
Fazer um estudo acerca da Resolução de Problemas
Conhecer diferentes Concepções de Resolução de Problemas
Ver Resolução de Problemas como uma Metodologia de Ensino–Aprendizagem de Matemática
FASE DE DESCOBERTAS
Fazer uso da História da Matemática levantada para apresentar problemas geradores do conceito de integral
Criar um projeto de trabalho para a sala de aula, apoiado na História da Matemática e em uma metodologia alternativa, envolvendo as Integrais de Riemann.
Trabalho no GTERP
Escolha da Instituição de Trabalho
O uso do conhecimento adquirido na Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP
FASE DE APLICAÇÃO
Aplicar esse projeto criado, em uma sala de aula de um 2º ano de um curso de Engenharia, fazendo uso da Metodologia de Ensino–Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas
Analisar a aplicação desse projeto, com vistas ao interesse, à motivação e à capacidade de investigação dos alunos a partir dela.
Apreciar situações vividas em sala de aula
Tirar Conclusões
A definição da resposta do problema da pesquisa.

Ao iniciarmos a busca na literatura referente a cada um desses três eixos, decidimos por destinar a cada um deles um capítulo próprio.

Capítulo 2 - História da Integral como parte da História da Matemática

Da origem da Integral até sua formalização por Riemann.

Capítulo 3 - Resolução de Problemas

Capítulo 4 - A Sala de Aula na Engenharia

O Capítulo 2 – A História da Integral como parte da História da Matemática – da origem da integral até sua formalização por Riemann – exigiu de nós intensa pesquisa. Consultamos vários historiadores e procuramos citá-los cronologicamente, tentamos descobrir problemas que os homens enfrentaram para percorrer o caminho da Integral em sua história.

Para nós, esse período de tantas buscas foi intensamente rico e foi-nos necessário, para condensar nossa história, nada menos do que 69 páginas

O Capítulo 3 – Resolução de Problemas já cuida de um ramo da Matemática bastante recente, com diferentes modos de tratamento.

Nossa área de pesquisa está atrelada a uma visão mais recente ainda. Ela se mostra como uma Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

A partir da definição do que é um problema, de citar Polya e de comentar a posição de educadores matemáticos que trabalham nessa área, destacamos os objetivos da introdução desse tópico como um eixo importante para nossa pesquisa.

Falamos sobre a Resolução de Problemas e o Ensino-Aprendizagem de Matemática e suas variadas formas de abordagem. Deixamos clara a forma como trabalhamos e apresentamos a nossa metodologia de trabalho para a sala de aula, no item 3.2 – A Metodologia de Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas em ação na sala de aula.

Uma citação de Van de Walle (2001, p.44) diz que

> ensinar matemática através da resolução de problemas não significa simplesmente apresentar um problema, sentar-se e esperar que uma mágica aconteça. O professor, diz ele, é responsável pela criação e a manutenção de um ambiente matemático, motivador e estimulante, no qual a aula deve transcorrer. (VAN DE WALLE, 2001, p.44)

e ressaltamos aspectos didáticos da resolução de Problemas como uma metodologia.

No Capítulo 4 – A Sala de aula na Engenharia, retomando o Modelo Modificado, criado dentro da sequência de Romberg, pudemos ver que a atividade 3 do Modelo de Romberg – Relacionar com ideias de outros – pedia, para nossa pesquisa: História da Integral como parte da História da Matemática; Resolução de Problemas vista como uma Metodologia de ensino – Metodologia de Ensino–Aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas; e como terceiro eixo temático, para a fundamentação teórica de nossa pesquisa, aparecia nossa Sala de Aula onde, trabalhando Cálculo num curso de ensino superior, visávamos ao ensino de *Integrais.*

Discutimos sobre a Matemática no Ensino Superior, sobre as Diretrizes Curriculares nos Cursos de Engenharia, sobre o papel da Matemática na Engenharia, sobre o Cálculo na Engenharia e falamos sobre função; limite de uma função; continuidade de uma função; derivada de uma função; e integral de uma função.

A quarta atividade do 1º bloco de Romberg dizia respeito à Pergunta da Pesquisa que foi definida por

Como se pode construir um projeto de ensino-aprendizagem, destinado a trabalhar Integrais com alunos de um Curso de Engenharia, num ambiente de resolução de problemas, fazendo uso de uma nova metodologia, com recursos à história da matemática e com os alunos, em grupos, num trabalho cooperativo e colaborativo, sendo co-construtores de um conhecimento autogerado?

O Capítulo 5 – A Resolução do Problema de Pesquisa - está no 2º bloco de Romberg, nas atividades 5 e 6.

Esse capítulo todo discute sobre as três fases do Modelo Modificado. Faz um levantamento de 30 problemas da História da Matemática levantados por nós, responsáveis pela criação do conceito de Integral.

Como Estratégia Geral e correspondente Procedimento Geral, esse 2º bloco de Romberg cuida da Criação de um Projeto de Ensino-Aprendizagem de Integrais. Cria as atividades para o Projeto, colocando para cada uma seu objetivo e justificativa.

Foi uma ousadia do professor-pesquisador, criar um projeto para rever os importantes conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, tópicos matemáticos já trabalhados pelos alunos dessas turmas no Cálculo 1 e tendo começado, no Cálculo 2, a fazer funções de duas variáveis e suas derivadas. A bem da verdade, esse conteúdo só fora tratado como técnica operatória e o que nossa pesquisa pedia era um trabalho destinado à construção de conhecimento conceitual.

Nossa dissertação apresenta a resolução de todas as atividades criadas num trabalho desenvolvido pelo professor e depois, apresenta em detalhes, o trabalho desenvolvido em sala de aula por professor e alunos. Foi um trabalho árduo e muito extenso. Assim a aplicação em Sala de Aula e sua análise foram descritas.

Para o terceiro bloco de Romberg, evidências foram coletadas, interpretadas frente ao Problema da Pesquisa, relatadas conclusões e oferecido o nosso trabalho de pesquisa como antecipação a outros possíveis trabalhos

Essas evidências todas que pudemos constatar, ao longo da aplicação do projeto, nas Plenárias de participação e discussão, nos trabalhos entregues pelos alunos e nos momentos em que, fora da sala de aula, alguns alunos procuraram continuar discussões de sala de aula, podem atestar que:

- A História da Matemática foi importante, nela os alunos puderam adquirir o conhecimento de como as ideias surgiram, evoluíram e de como fazer a transposição deste conhecimento para as atividades em sala de aula, olhando aos obstáculos e caminhos encontrados durante a evolução do Conceito da Integral, que nada mais é do que o Cálculo Diferencial e Integral como parte da História da Matemática.

- A Resolução de Problemas mostrou-se um caminho eficiente para o trabalho em sala de aula, tanto para o professor quanto para os alunos, na busca pela solução de um problema, por investigar e, na consequente compreensão dos conceitos, agora formulados pelo próprio aluno. Esta metodologia de trabalho permitiu muitas vezes ao aluno colocar-se no lugar dos desbravadores de novos conceitos de Matemática e do Cálculo. Permitiu ao aluno a tensão e o prazer na busca pela certa resposta de um problema, trabalhando com a autoestima.

- Apesar do pouco tempo que tivemos para desenvolver esse projeto, nossa sala de aula, dentro de um ambiente favorável à aprendizagem com compreensão e significado, se apresentou como um local de trabalho colaborativo, onde houve socialização de conhecimentos e espírito de investigação.

Assim, acreditamos que nossa resposta à pergunta feita é que é possível construir um projeto ensino-aprendizagem, destinado a trabalhar Integrais com alunos de um Curso de Engenharia, num ambiente de resolução de problemas, fazendo uso de uma nova metodologia, com recursos à história da matemática e com os alunos, em grupos, num trabalho cooperativo e colaborativo, sendo co-construtores de um conhecimento autogerado. Além disso, o projeto por nós criado, quando aplicado, confirmou todas as razões que justificam o esforço despendido ao trabalhar, na sala de aula com ensino-aprendizagem através da resolução de problemas. As razões que Van de Walle (2001) apresenta para justificar esse esforço são entre elas: a) a resolução de problemas coloca o foco da atenção dos estudantes sobre as “ideias” e sobre o "dar sentido" a elas; b) a resolução de problemas envolve os estudantes nos cinco padrões de processo descritos nos Standards 2000: resolução de problemas, raciocínio e prova, comunicação, conexões e representação; c) a resolução de problemas desenvolve nos estudantes a crença de que eles são capazes de fazer Matemática e de que ela faz sentido, isto é, aumenta a confiança e a auto-estima dos estudantes; d) a resolução de problemas fornece, ao professor, dados de avaliação que lhe permitem tomar decisões sobre o ensino e ajudar os estudantes a ter sucesso com a aprendizagem e e) os alunos se entusiasmam com o desenvolvimento da capacidade de compreensão que experimentam por meio de seu próprio raciocínio.

CAPÍTULO 1

METODOLOGIA DE PESQUISA

<u>CAPÍTULO 1 – METODOLOGIA DE PESQUISA</u>

Segundo D'Ambrosio (2006), o uso da palavra "pesquisa" nas sociedades modernas merece uma reflexão sobre o próprio conceito de pesquisa. Então,

1.1 – O que é pesquisa?

Para Romberg (1992, p.51) o termo *pesquisa* refere–se a processos – a coisas que se faz, não a objetos que se pode tocar e ver. Além disso, fazer o ato de pesquisa não pode ser visto como uma ação ou como um conjunto de atividades que se segue de maneira prescrita ou predeterminada. As atividades envolvidas em fazer pesquisa incorporam mais características de uma arte do que de uma disciplina puramente técnica.

Ubiratan D'Ambrosio (1996, p.79) diz que "entre teoria e prática persiste uma relação dialética que leva o indivíduo a partir para a prática, equipado com uma teoria, e a praticar de acordo com essa teoria até atingir os resultados desejados". Para ele, "pesquisa é o que permite a interface interativa entre teoria e prática".

D'Ambrosio diz, também, que "o elo entre passado e futuro é o que conceituamos como presente. Se as teorias vêm de um conhecimento acumulado ao longo de um passado e os efeitos da prática vão se manifestar no futuro, o elo entre teoria e prática deve se dar no presente, na ação, na própria prática. E isso nos permite conceituar pesquisa como o elo entre teoria e prática".

Ao recorrer ao dicionário Houaiss e Villar (2001), lemos que "Pesquisa é o conjunto de atividades que tem por finalidade a descoberta de novos conhecimentos no domínio científico, literário, artístico, etc. É a investigação ou indagação minuciosa, é o exame de laboratório".

Novamente, recorrendo a D'Ambrosio (2006, p.10), encontramos "As pesquisas atuais são, em linhas gerais, classificadas em duas grandes vertentes: pesquisa quantitativa e pesquisa qualitativa. Essencialmente, a primeira delas lida com grande número de indivíduos, recorrendo aos métodos estatísticos para a análise de dados coletados de maneiras diversas, inclusive entrevistas. Chamá–la de pesquisa estatística ou pesquisa positivista é ainda comum. A pesquisa qualitativa, também chamada pesquisa naturalística, tem como foco entender e interpretar dados e discursos, mesmo quando envolve grupos de participantes".

Valdir Rodrigues (2007), em seu trabalho para o exame de Qualificação ao doutorado, diz que com o passar dos anos, começaram a aparecer, entre os pesquisadores, sinais de insatisfação em relação aos métodos empregados, visto que, principalmente na área de Educação, alguns problemas não apresentavam resultados satisfatórios. Seria preciso buscar novas formas de trabalho. Surgem, então, as pesquisas *fenomenológica-hermenêuticas* que utilizam técnicas não quantitativas, como entrevistas, depoimentos, vivências, narrações e técnicas bibliográficas, e as pesquisas *crítico-dialéticas* que, além das técnicas anteriores, utilizam a *pesquisa-ação* e a *pesquisa-participante*.

1.2 – O que é metodologia de pesquisa?

Metodologia, no dicionário Ferreira (1986), é definida como a arte de dirigir o espírito na investigação da verdade.

Toda teorização, diz D'Ambrósio (1996), se dá em condições ideais e somente na prática serão notados e colocados em evidência os pressupostos que não podem ser identificados apenas teoricamente. Isto é, partir para a prática é como um mergulho no desconhecido.

Para entender as tendências atuais da pesquisa em Educação Matemática, deve–se estar ciente das muitas perspectivas e dos princípios sobre os quais elas estão baseadas, disse Romberg em 1992. Ele continua dizendo que isso é importante porque diferenças em métodos não abrangem simplesmente modos alternativos de investigar as mesmas questões. O que diferencia um método de outro não é só o modo pelo qual a informação é coletada, analisada e relatada mas, também, os próprios tipos de perguntas tipicamente feitas e os princípios ou paradigmas sobre os quais os métodos para investigar tais perguntas estão baseados.

Em seu artigo, Romberg (1992, p.51) procura mostrar a importância da pesquisa em Educação Matemática, situando–a como parte do conhecimento científico atual. E diz que "raramente os pesquisadores começam uma investigação com uma estratégia fixada para coletar dados ou com um método específico de análise em mente".

As decisões sobre que métodos usar na pesquisa são vistas como consequências do objeto com o qual se pretende trabalhar, de um provável modelo do caminho a seguir, da busca de ideias de outros pesquisadores, relacionadas ao nosso objeto de estudo e, por fim, da identificação do problema de pesquisa. Assim, a metodologia de uma pesquisa é um conjunto de métodos e caminhos. Nela se estabelece o modo, o meio e o material, adequados ao problema e aos objetivos pretendidos pelo pesquisador.

1.3 – A Escolha de uma metodologia conveniente à nossa pesquisa

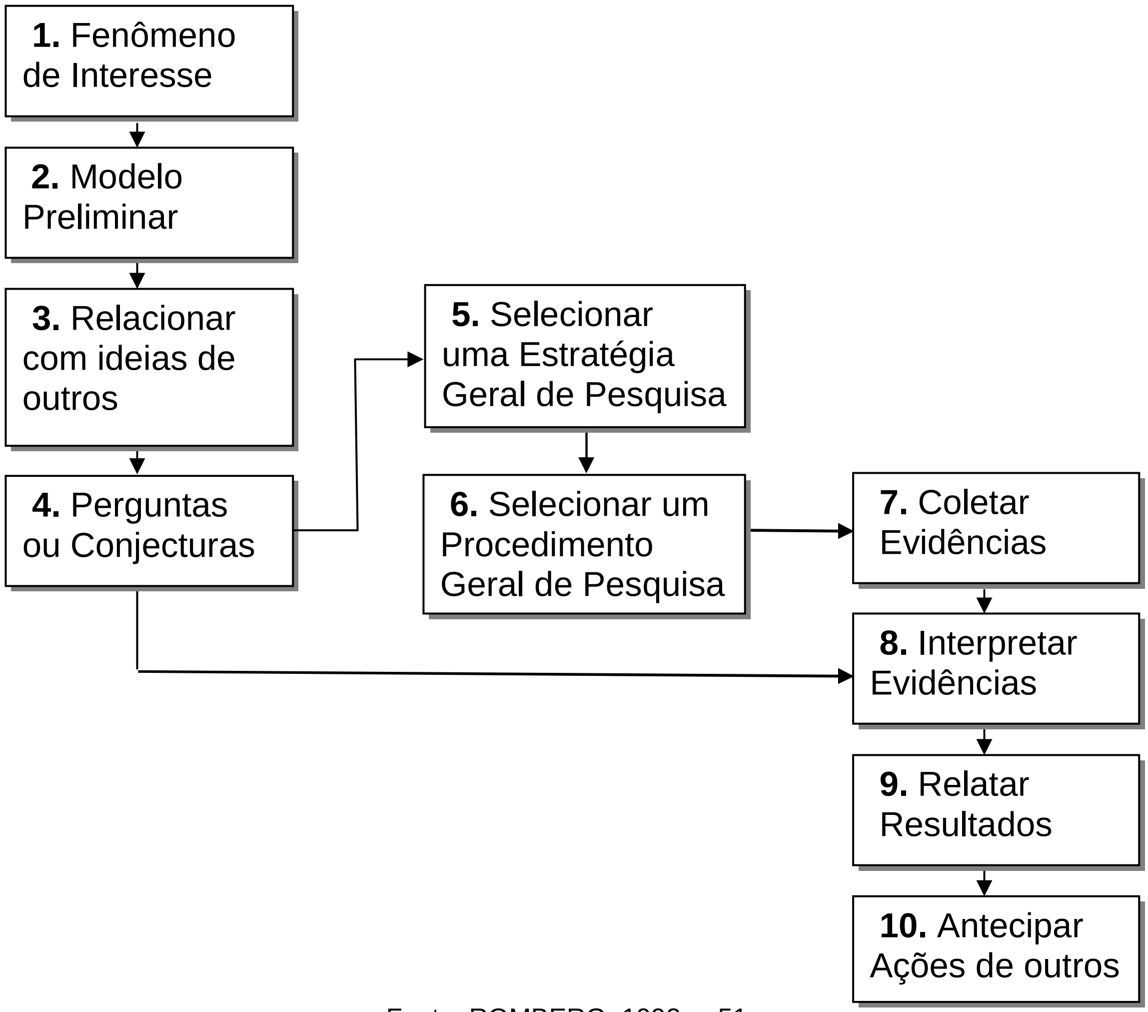
Depois de termos tido contato, durante as disciplinas cursadas no Mestrado, com diferentes metodologias de pesquisa, acabamos por optar pela Metodologia de Romberg. Em seu artigo “Perspectives on Scholarship and Research Methods” (Perspectivas sobre o Conhecimento e Métodos de Pesquisa), em 1992, traduzido por Lourdes de la Rosa Onuchic e Maria Lúcia Boero (2007), Romberg começa com a citação de Shulman (1988)

> A razão mais importante pela qual a metodologia de pesquisa em Educação constitui-se numa área tão excitante é que a Educação não é propriamente uma disciplina. De fato, a Educação é um campo de estudo, um local que contém fenômenos, eventos, instituições, problemas, pessoas e processos que em si mesmos constituem a matéria–prima para investigações de muitos tipos.

Com esse artigo, Romberg pretende identificar, nas Ciências Sociais, as amplas tendências de pesquisa que estão relacionadas ao estudo do ensino e da aprendizagem nos cenários escolares, e determinar como essas tendências têm influenciado o estudo da Matemática nas escolas. Ele descreve a Educação Matemática como um campo de estudos, esboça as atividades de pesquisadores, e resume uma variedade de métodos usados por eles, visando a entender a base dessas tendências.

Um fato que nos aproximou da Metodologia de Romberg foi o de termos tido conhecimento de que Romberg é Matemático e Educador Matemático. Essa metodologia é apresentada por ele num fluxograma que descreve, em três blocos, dez atividades que, como ele diz, os pesquisadores devem percorrer quando realizam um trabalho de pesquisa.

1.3.1 – A Metodologia de Romberg – As atividades que um pesquisador desenvolve ao longo de sua pesquisa



Fonte: ROMBERG, 1992, p.51

Ao adotar a Metodologia de Romberg como nossa metodologia de pesquisa, nos condicionamos por seguir as atividades propostas nessa sequência. Isso é interessante, pois ela pode nos dizer em que ponto da pesquisa estamos ao longo de seu desenvolvimento. As dez atividades aí descritas servem para esclarecer problemas comuns com os quais pessoas, não familiarizadas com pesquisa, se deparam ao procurar entender seu processo de investigação.

Fica claro, também, que nenhum de seus passos necessita ser cumprido obrigatoriamente na ordem em que se apresentam, pois hipóteses, conjecturas, disponibilidade de informações e métodos, entre outras características do pesquisador, não podem necessariamente ser separadas com tanta clareza.

No modelo de Romberg podemos observar a disposição das atividades em três diferentes blocos. No primeiro bloco, o da identificação do problema, Romberg diz que, para ele, estão as atividades mais importantes, pois situam as ideias que se tem sobre um problema particular e, ao relacioná-las com ideias de outros, pode–se decidir o que se quer investigar. Nesse bloco, a quarta atividade expressa o problema ou a conjectura da pesquisa.

O segundo bloco deve ser decisivo para poder responder aos questionamentos: “O que vou fazer?” e “Como vou fazer?”. Esses são posicionamentos elaborados que podem levar à resolução do problema concebido na atividade 4.

O terceiro bloco é um bloco de ação. Após colocar em ação as tarefas idealizadas para as atividades 5 e 6, evidências constatadas, durante essa ação, devem ser levantadas; interpretadas frente à pergunta ou conjectura proposta; relatados os resultados obtidos; e apresentados esses resultados a uma comunidade para julgamento.

1.3.1.1 – Identificar um fenômeno de interesse.

Toda pesquisa começa com uma curiosidade sobre um fenômeno particular do mundo real. Na educação matemática, o fenômeno envolve professores e alunos, como os alunos aprendem, como os alunos interagem com a matemática, como os alunos respondem aos professores, como os professores planejam ensinar, e muitas outras questões. Os educadores matemáticos podem, de fato, enfocar uma variedade de áreas numa variedade de olhares.

1.3.1.2 – Construir um modelo preliminar.

Um pesquisador faz suposições sobre certos aspectos importantes como variáveis do fenômeno de interesse e de como estes aspectos estão relacionados. Depois os ilustra em um modelo.

Nesse sentido, um modelo é simplesmente um conjunto de descrições de variáveis-chave e as relações implícitas entre elas. Para a maioria dos estudiosos, um modelo é simplesmente um dispositivo heurístico para ajudar a esclarecer um fenômeno complexo. Situações reais são raramente bem definidas e frequentemente estão fixadas em um meio que torna difícil obter uma afirmação clara da situação. Formular um modelo preliminar usualmente ajuda, porque o fato de fazer assim envolve especificar as variáveis que se acredita estarem operando na situação real. De fato, o modelo é uma simplificação, desde que alguns aspectos da realidade sejam significativos e outros irrelevantes. Apesar disso, o modelo serve como um ponto de partida ou de orientação para a situação de interesse. Bons pesquisadores, como bons artistas em qualquer campo, como sugeriu Jeremy

Kilpatrick (1981), são mais criativos ao identificar variáveis e relações que capacitam a pessoa a olhar novamente para fenômenos familiares, do que pessoas que são menos imaginativas.

1.3.1.3 – Relacionar o Fenômeno de Interesse e o Modelo Preliminar às ideias de outros.

Uma atividade bastante importante, nessa sequência de atividades propostas por Romberg, é a de examinar o que outras pessoas pensam sobre o fenômeno de interesse do pesquisador e determinar se suas ideias podem ser usadas para esclarecer, ampliar ou modificar o modelo preliminar proposto. Segundo Romberg, por exemplo, um pesquisador, interessado em saber como as crianças desenvolvem habilidades de contagem, tenta relacionar suas ideias às ideias de outros pesquisadores sobre esse mesmo fenômeno. Para fazer isso, o pesquisador deve reconhecer que cada investigador é um membro de um particular grupo de pesquisa que defende uma determinada "visão de mundo".

1.3.1.4 – Levantar questões específicas: pergunta ou conjectura.

Este é um passo–chave no processo de pesquisa porque, conforme se examina um particular fenômeno, uma quantidade de perguntas potenciais inevitavelmente aparece. Decidir quais perguntas examinar não é fácil. John Platt, em 1964, argumentou que a escolha de qual questão deve ser examinada é crucial. Se questões "críticas" são feitas, então, "fortes" inferências podem ser feitas, caso contrário, um estudo particular pode contribuir pouco para uma cadeia de indagações. Diz ele que segundo Lakatos (1976), a noção de fortes inferências leva à importante característica da maioria dos programas de pesquisa, isto é, a natureza cumulativa de uma serie de estudos dentro de uma determinada estrutura.

> As perguntas usualmente tomam uma das seguintes formas: Como as coisas chegaram a ser desta maneira? (orientadas no passado), Qual é a condição das coisas? (orientadas no presente), ou O que acontecerá se eu fizer o seguinte? (orientadas no futuro). De particular nota é o fato de que a maioria dos estudos orientados no passado e no presente é de caráter descritivo, enquanto os orientados no futuro são preditivos. Esta distinção leva a uma discussão em relação à possibilidade de se formular argumentos causais a partir de dados descritivos. Os experimentalistas afirmam que somente pela manipulação de variáveis sob situações controladas é possível construir, com confiança, argumentos causais. Outros estudiosos dizem que é possível construir tais argumentos a partir de dados descritivos baseados em campos teóricos.
> Melhor do que simplesmente levantar questões interessantes, os pesquisadores usualmente fazem uma ou mais conjecturas

> (suposições ou predições fundamentadas) sobre o que seria necessário para responder às questões. As conjecturas estão baseadas em algumas relações entre as variáveis que caracterizam o fenômeno e nas ideias sobre aquelas variáveis-chave e suas relações com o esboçado no modelo. (ROMBERG, 1992, p.52)

1.3.1.5 – Selecionar uma estratégia geral de pesquisa

Segundo Romberg (1992, p.52), a decisão sobre que métodos utilizar segue diretamente das questões que se seleciona, da visão de mundo na qual as questões estão situadas, do modelo preliminar que foi construído a fim de explicar o “fenômeno de interesse” e da conjectura que se faz sobre a evidência necessária. Por exemplo, se as perguntas a serem respondidas são sobre o passado, a historiografia seria apropriada. Por outro lado, se as perguntas são orientadas no presente, pode-se escolher entre fazer uma pesquisa ou um estudo de caso, ou usar uma das muitas outras estratégias de coleta de dados.

1.3.1.6 – Selecionar um procedimento geral de pesquisa.

Romberg (1992, p.52), diz que para responder às questões específicas que foram levantadas, evidência deve ser coletada. É nesse passo que as técnicas usualmente ensinadas em cursos de métodos de pesquisa são importantes: como selecionar uma amostra, como coletar uma informação (entrevista, pergunta, observação, teste), como organizar a informação uma vez que ela tenha sido coletada, e assim por diante. Há um grande número de procedimentos específicos que se poderia seguir para diferentes tipos de questões. Deve-se ser cuidadoso ao selecionar os procedimentos que irão esclarecer as questões.

1.3.1.7 – Coletar evidências.

Para a atividade 7, no terceiro bloco, Romberg (1992, p.52), diz que este passo pode ser feito sem rodeios, uma vez que se tenha decidido coletar certas informações para construir um argumento, considerando as perguntas que foram feitas. Por exemplo, se conduzir uma pesquisa forem apropriados alguns procedimentos complexos para coletar dados, eles poderão ser planejados. Por outro lado, se se está examinando a cultura de uma sala de aula, os procedimentos para coletar informação podem se expandir ou tornarem-se mais focados na medida em que se coletam os dados.

1.3.1.8 – Interpretar as evidências coletadas.

Neste estágio, Romberg (1992, p.53), diz que se analisam e se interpretam as informações coletadas. Em muitos estudos, o pesquisador reduz a informação, a agrupa e realiza testes estatísticos apropriados de significância sobre as propriedades dos dados. Estes usualmente são chamados métodos *quantitativos*, desde que seja usual atribuir-se números às informações (escala) e os procedimentos matemáticos sejam seguidos para agregar e resumir a evidência. Em outras áreas, tais como um estudo histórico, o pesquisador também categoriza, organiza e interpreta a informação relevante que foi coletada. Mas, se os números não forem utilizados, os métodos de análise são chamados *qualitativos*. É importante perceber, entretanto que, em cada investigação, é coletada mais informação do que a necessária para responder à questão. Parte disso é relevante, parte é irrelevante e parte pode não ser compreensível. Tentar encontrar informação importante dentre todas que estejam disponíveis é uma arte na qual certas pessoas são melhores do que outras.

1.3.1.9 – Relatar resultados.

Ser membro de uma comunidade de pesquisa implica numa responsabilidade de informar aos outros membros sobre a investigação terminada e buscar seus comentários e críticas. Com frequência, os pesquisadores relatam somente os procedimentos e as descobertas, não o modelo ou a visão de mundo. Como as descobertas de qualquer estudo específico são interpretáveis somente em termos da visão de mundo, se ela não estiver declarada, os leitores usarão, sem dúvida, suas próprias noções para interpretar esse estudo. (Romberg, 1992 p.52)

1.3.1.10 – Antecipar ações de outros.

Apresentados os resultados de uma particular investigação, diz Romberg (1992, p.53) que cada investigador está interessado sobre o que irá acontecer depois e, assim, deveria antecipar ações posteriores. Membros de uma comunidade de estudo discutem ideias entre si, reagem às ideias uns dos outros e sugerem novos passos, modificações de estudos anteriores, elaborações de procedimentos e assim por diante. Os pesquisadores tentam situar cada estudo em uma cadeia de investigações. Coisas que vieram antes e coisas que vêm após qualquer particular estudo são importantes.

1.4 – Nossa Pesquisa Imersa na Metodologia de Romberg

Introdução – 1º Bloco de Romberg – atividades 1,2,3 e 4

A sequência de atividades do modelo de Romberg sugere que três aspectos do processo de pesquisa devem ser particularmente enfocados:

1. Os pesquisadores devem ser vistos como membros de uma comunidade de estudos.
2. Para relacionar as ideias de alguém ao trabalho de outros estudiosos é importante que se entendam as perspectivas filosóficas que formam a base do trabalho desse alguém. Portanto, é importante que se conheçam a ideologia e os paradigmas de diferentes comunidades de pesquisa.
3. Muitos principiantes não veem a importância de situar sua pesquisa com o trabalho de outros pesquisadores e isso, muitas vezes, os levam a um fracasso.

Neste capítulo, dando início à pesquisa, vamos trabalhar o primeiro bloco de Romberg. Assim, vamos identificar o problema de nossa pesquisa, caminhando ao longo das quatro primeiras atividades: Fenômeno de Interesse, Modelo Preliminar, Relacionar com Ideias de Outros, e Identificar nossa Pergunta ou Conjectura.

1.4.1 – Nosso Fenômeno de Interesse.

Descreveremos como nossas vivências nos levaram a definir o Fenômeno de Interesse para esta Pesquisa.

1.4.1.1 – Nossa Trajetória pessoal e profissional –

Opção pela Matemática e pela Educação Matemática.

Desde muito cedo começamos a ter uma afinidade muito grande com a Matemática. Pequeno, já sentíamos um gosto muito forte por ela. Estudante do Colégio Salesiano, em Sorocaba, durante o Ensino de primeiro grau, nossa intenção era a de prestar vestibular e cursar o ITA, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, em São José dos Campos. Porém, não podendo mais continuar, no Colégio Salesiano, o Ensino de segundo grau, vimos nosso sonho com poucas chances de se realizar. Após termos feito três anos do curso profissionalizante em Eletrotécnica, fomos fazer, então, o Curso de Engenharia Elétrica na FACENS, Faculdade de Engenharia de Sorocaba, cidade onde moramos.

Nessa Instituição passamos a gostar muito mais de Matemática. No início do quarto ano de Engenharia Elétrica, depois de termos feito um estágio na Usina Hidrelétrica de Itaipu, fomos chamados para lecionar Matemática no Colégio Salesiano, o mesmo colégio particular onde cursáramos o primeiro grau. Fomos trabalhar Matemática com as quatro sétimas séries dessa escola. Deu-se, assim, nosso início no magistério, no ensino de primeiro grau. Aconteceu que aquele primeiro ano de magistério foi difícil para nós, pois controlar aquela “criançada” não era fácil e, no final do ano, nossa insegurança era bastante grande. Será que era aquilo mesmo que queríamos? Estando no quarto ano de Engenharia, tínhamos conteúdo suficiente para trabalhar com aqueles alunos, porém não tínhamos domínio da sala de aula que se nos apresentava como um grande desafio.

Começamos a lecionar em 1990 e no ano seguinte as coisas pareciam começar a mudar. Tomamos gosto pelas aulas, tomamos gosto pela matemática desenvolvida com os alunos que também passaram a gostar mais de nossas aulas. Gostamos de lecionar e optamos por ser professor. Terminamos o curso de Engenharia. Atuamos como engenheiro concomitantemente ao exercício docente. Fizemos projetos de Instalações Elétricas, fazendo uso de todas as normas reguladoras da ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas – mas, identificamo-nos mais com o magistério, apreciando o contato e a interação com os alunos.

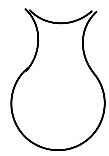
Como início no magistério, trabalhamos no Ensino de primeiro grau e, desde agosto de 2001, estamos lecionando no Ensino Superior, numa Faculdade de Engenharia, a FACENS, a Faculdade onde cursamos Engenharia, e numa Faculdade de Administração, a ESAMC, Escola Superior de Administração, Marketing e Comunicação. Trabalhando com Cálculo Diferencial e Integral, pudemos perceber a dificuldade que os alunos têm com a aprendizagem de integrais. Isso se mostrou um novo desafio. Como trabalhar esse tópico matemático – ***As Integrais*** – com alunos que trazem dificuldade em Matemática desde o Ensino Fundamental?

1.4.1.2 – Nosso interesse pela Educação Matemática

Percebemos que nossa área de interesse não era somente Matemática mas, como queríamos que nossos alunos pudessem aprender Matemática com compreensão e significado, sentimos que, de fato, nossa área de trabalho era realmente a da *Educação Matemática* que, para Romberg, é um campo de estudo.

Na UNESP – Rio Claro, no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática começamos a cursar disciplinas, como aluno especial. No final de 2004, participando da IV Conferência Interna desse Programa é que fomos apresentados à Profª Drª Lourdes de la Rosa Onuchic e, conversando, na hora do café, durante cerca de uma hora, soubemos da existência de um Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas – GTERP – que se reúne semanalmente na UNESP. Fomos convidados para participar da penúltima reunião do GTERP, naquele ano, no dia 2 de dezembro. Aceitamos o convite, e, lá chegando naquele dia, deparamo–nos com o Grupo trabalhando sobre o problema abaixo:

"Três um-quarto de círculo e um três-quartos de círculo – todos de raio igual a 10 cm – compõem esta atraente forma de jarro. Qual é sua área?"



Acontece que nós estávamos pegando o "bonde andando", pois, soubemos, naquele momento que o grupo já estava trabalhando com esse problema há algumas reuniões.

Para resolver esse problema, o grupo havia passado por uma sequência de ações: leitura do enunciado, sua interpretação, compreensão do que se pedia e, principalmente, da busca de uma figura geométrica, como tentativa de entender o que o problema pedia e, então, ir em busca de uma estratégia para resolvê–lo. Depois que vários passos haviam sido dados, o Grupo procurava sua solução através de diferentes caminhos.

No início do caminho percorrido, um membro do grupo apresentou uma solução. Estava errada, pois, ao ler o enunciado, precipitadamente, não soube transportar seus dados para a forma do Jarro. Nessa solução encontrada, numa leitura apoiada apenas nos dados numéricos do problema escreveu

$$3\times\frac{1}{4}\,de\ \ círculo\ +\ 1\times\frac{3}{4}\,de\ \ círculo\ =\ 6\times\frac{1}{4}\,de\ \ círculo\ =\ \frac{3}{2}\,de\ \ círculo$$

e, considerando como área do círculo a expressão $\pi.r^2$, com r = 10 cm, obteve, como resposta, 150π cm^2 e fazendo $\pi \approx 3{,}14$, a área do jarro mediria *aproximadamente* 471 cm^2. Mas, isso não parecia muito coerente à figura desenhada. A pergunta que surgiu, então, foi: seria possível toda essa medida estar contida na área daquele jarro?

Analisando as respostas dadas, podia–se dizer que três quartos de círculo estariam no bojo desse vaso. Com mais um quarto de círculo completaria um círculo todo e, para o gargalo do jarro, ter-se-íam mais outros dois “um quarto de círculo”. Parecia o gargalo ser um pouco pequeno para conter os outros dois “um quarto de círculo”. Passando a interpretar essa ideia, avançando na resolução do problema através de diferentes resoluções geométricas, o grupo chegou à resposta correta: 400 cm^2, sendo que ela quadrava a área do Jarro.

Nesse momento a Coordenadora do Grupo perguntou: – De que outra maneira poderíamos calcular a área da figura dessa região plana?

Prontamente respondemos que seria através de integrais. Sugerimos que poderíamos utilizar integrais simples ou duplas. Estava conosco, a Vanda, de Goiânia, e D. Lourdes pediu–nos para ir à lousa. Trocamos algumas ideias e, como estávamos no final dessa reunião, levamos o problema para casa para ser trabalhado por cada membro e ser discutido na última reunião do GTERP, daquele ano. Para essa reunião, levamos quatro resoluções possíveis para o problema, trabalhadas com integrais duplas, uma resolução geométrica generalizando a resolução e, também, um trabalho com dobraduras que elaboramos para fixar a visualização dos trabalhos feitos. Em outras palavras, esse problema nos chamou muito a atenção. Ele nos desafiou.

Apoiada nas contribuições dos membros do grupo, a coordenadora redigiu e enviou um artigo para o V CIBEM – V Congresso Ibero Americano de Educação Matemática – realizado em Portugal, na cidade do Porto, em 2005. D. Lourdes e Valdir, um outro membro do grupo, lá estiveram fazendo a exposição oral e visual desse artigo, usando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Nesse congresso, enquanto a coordenadora expunha o trabalho, Valdir estava manipulando as dobraduras no retro–projetor, mostrando como aquele jarro de 400 cm^2 de área poderia curiosamente ser transformado em um quadrado de 20 cm de lado, portanto, de 400 cm^2 de área.

O que aí aconteceu colaborou para que a inserção do “Marcos” se desse no GTERP, usando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, num trabalho envolvendo Integrais.

1.4.1.3 – Definição de nosso Fenômeno de Interesse

Sentimos naquele momento que nós, como professor de uma escola de Engenharia, ensinávamos integrais de uma forma mais mecânica, onde eram utilizadas regras convenientes a diferentes casos de integração, buscando se chegar a uma resposta que, na maioria das vezes, não expressava seu significado. Assim, definiu–se nosso Fenômeno de Interesse :

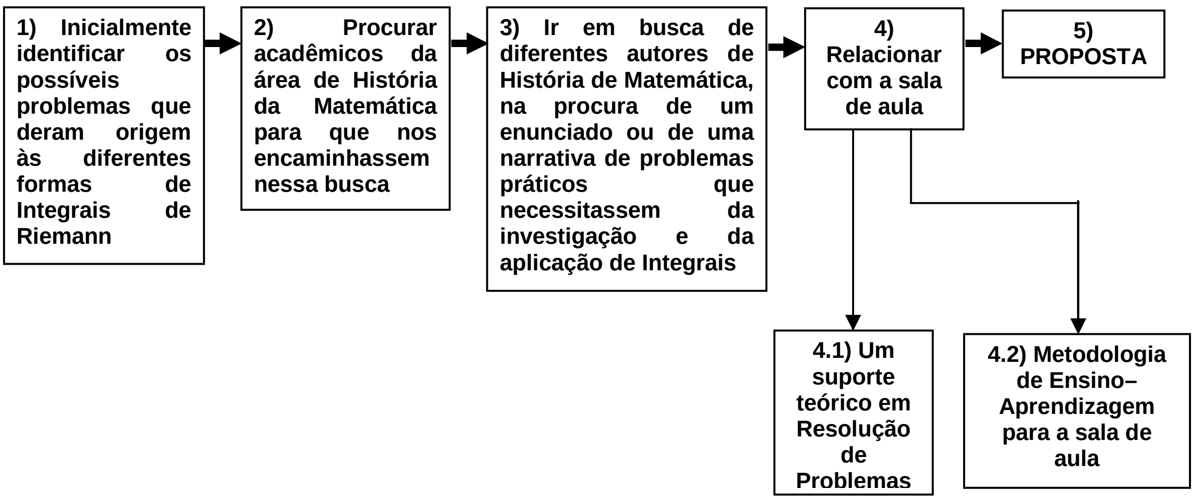
Trabalhar Ensino-Aprendizagem de Integrais no Ensino Superior.

1.4.2 – Nosso Modelo Preliminar

Com a definição do Fenômeno de Interesse, passamos a *imaginar* como poderia ser conduzida a nossa pesquisa.

Romberg, em seu artigo já citado, diz que esse modelo deve expressar a forma como se imagina, no início, o desenrolar da pesquisa. Para nós, o que tínhamos em mente, naquele momento, era o seguinte diagrama:

1.4.2.1 – Apresentação do Modelo Preliminar criado



Quando começamos a pesquisa em novembro de 2006, procuramos o professor Sérgio Roberto Nobre e o professor Marcos Teixeira Vieira. Ingenuamente, estávamos totalmente convencidos de que eles iriam nos indicar, exatamente num livro, o problema desencadeador das integrais, o enunciado de problemas e até aplicações práticas. Então, consultando esse livro, investigando sobre integrais, resolveríamos nosso problema. Mas, estávamos redondamente enganados, ao acreditar que iríamos encontrar respostas ao que queríamos de maneira tão simples.

Esses professores nos indicaram alguns livros e acreditávamos que, após consultá-los, procuraríamos uma forma de relacionar suas ideias com a sala de aula e, depois, elaborar uma proposta para trabalhar integrais em sala de aula, no Ensino Superior.

1.4.3 – Relacionar com ideias de outros

No Modelo de Romberg, uma atividade importante é a de examinar o que outros investigadores pensam sobre nosso Fenômeno de Interesse e determinar se suas ideias podem ser usadas para esclarecer, ampliar, ou modificar um modelo proposto.

1.4.3.1 – A Pesquisa Bibliográfica

Entende-se que a pesquisa bibliográfica merece tratamento destacado. Primeiro, porque estará presente em qualquer processo de pesquisa. Com efeito, a respeito de quase tudo que se deseje pesquisar, algo já foi pesquisado de forma mais básica, ou idêntica ou correlata. Há, portanto, outras percepções e posições que podem servir, seja para embasamento, seja para comparações ou mesmo para o conhecimento daquilo que se pretendia pesquisar por conta própria. Segundo, porque a pesquisa bibliográfica é mais simples e confortável, pois dispensa todo o trabalho de montagem/escolha/testagem/relato de dados. Os dados já estão prontos, organizados, publicados.

Percebe–se, porém, em certos meios acadêmicos, uma tendência a tratar o dado bibliográfico como secundário, como informação de segunda categoria. É um equívoco.

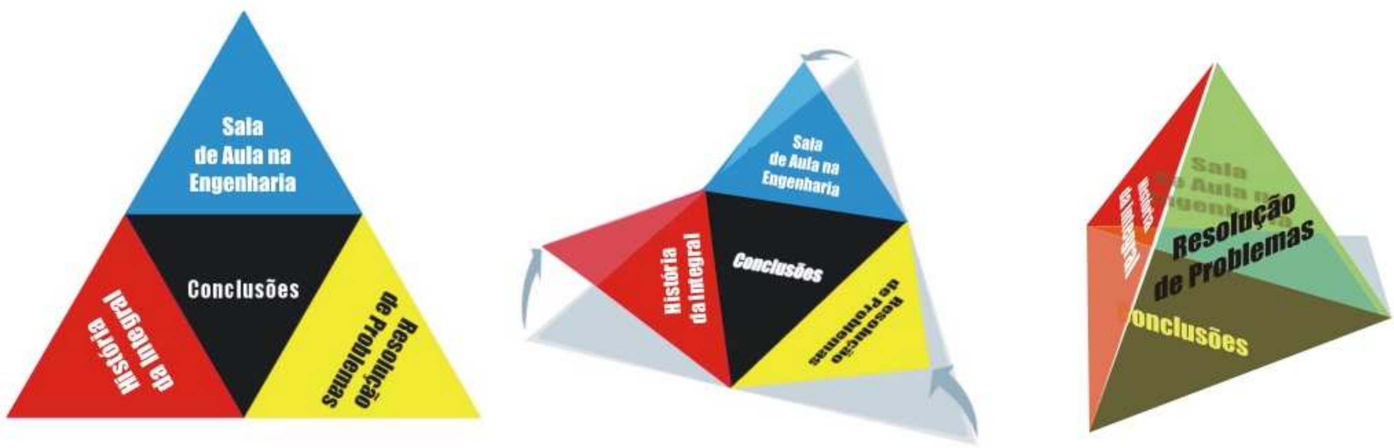
> É verdade que a pesquisa bibliográfica não costuma oferecer dados inéditos, como a pesquisa de campo ou de laboratório. Ressalte-se, porém, que em nada compromete a possibilidade de originalidade dos raciocínios que, a partir deles, possam ser desenvolvidos. A bem da verdade, dados já publicados podem, mesmo, possibilitar raciocínios inéditos, já que o conceito de inédito não se restringe a “realidade nova”. Pode também significar “pensamento novo” a respeito de “realidade velha”.(SANTOS, 2007,p.104-105)

Quem são nossos outros?

Nosso primeiro questionamento foi este: quem seriam os outros com os quais deveríamos nos relacionar para desenvolver nossa pesquisa?

Como de início, em nosso Modelo Preliminar, sentimos que era importante buscar, na História da Matemática, aquela parte que se referia à História da Integral. Então, vimos que esse seria um campo que deveríamos pesquisar. Depois, era de nosso interesse trabalhar com alunos, em sala de aula, através da Resolução de Problemas e, portanto, um novo campo de pesquisa. Por fim, sentíamos que projetar algo que reunisse esses dois tópicos seria um trabalho de Ensino-Aprendizagem envolvendo professor e alunos numa Sala de Aula.

Assim, nasceu uma possível imagem de nosso trabalho:

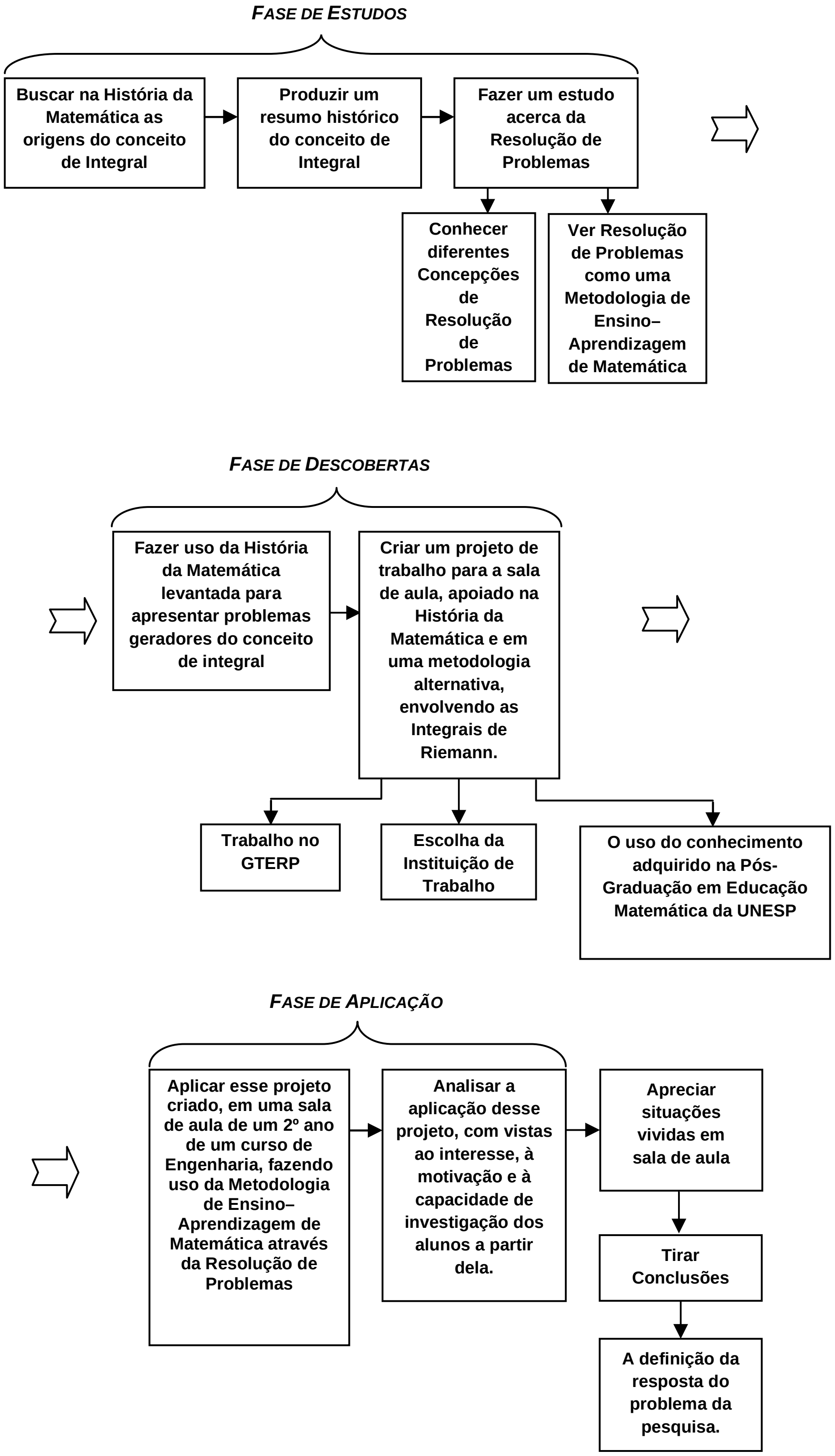


1.4.3.2 – Nosso Modelo Modificado

Logo, nossos “outros” seriam aqueles que se dedicam ou se dedicaram à História da Integral, como parte da História da Matemática; aqueles que trabalham ou trabalharam com Resolução de Problemas; e a realidade da Sala de Aula. Como consequência do trabalho realizado sobre esses três eixos, é de nosso interesse poder oferecer a outros profissionais que trabalham com Cálculo Diferencial e Integral e, em especial, no ensino-aprendizagem de integrais no Ensino Superior, uma proposta alternativa de trabalho.

Fizemos na Unesp, como aluno especial, nossa primeira disciplina em 2001, Álgebra Linear, com o professor Romulo. Esse professor ofereceu, como estratégia de aprendizagem, não dar respostas imediatas aos problemas propostos por ele, deixando aos alunos a oportunidade de pensar e de ir em busca das soluções. Cursamos uma segunda disciplina, Análise Matemática, com a professora Rosa. Com ela, nosso trabalho de final de curso foi sobre História da Matemática, e o tema que ela nos propôs foi *"Os incomensuráveis e a Teoria das Proporções de Eudoxo"*. No ano de 2007, também cursamos a disciplina História da Matemática, onde pudemos ter uma noção mais abrangente sobre ela.

Quando nos deparamos com esse caminho a percorrer, sentimos que o nosso Modelo Preliminar deveria passar por mudanças. Agora, mais conscientes do que deveríamos fazer, e, reconhecendo que o trabalho seria muito mais abrangente, criamos o nosso Modelo Modificado, diagramado em três Fases.


FASE DE ESTUDOS
Buscar na História da Matemática as origens do conceito de Integral
Produzir um resumo histórico do conceito de Integral
Fazer um estudo acerca da Resolução de Problemas
Conhecer diferentes Concepções de Resolução de Problemas
Ver Resolução de Problemas como uma Metodologia de Ensino–Aprendizagem de Matemática
FASE DE DESCOBERTAS
Fazer uso da História da Matemática levantada para apresentar problemas geradores do conceito de integral
Criar um projeto de trabalho para a sala de aula, apoiado na História da Matemática e em uma metodologia alternativa, envolvendo as Integrais de Riemann.
Trabalho no GTERP
Escolha da Instituição de Trabalho
O uso do conhecimento adquirido na Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP
FASE DE APLICAÇÃO
Aplicar esse projeto criado, em uma sala de aula de um 2º ano de um curso de Engenharia, fazendo uso da Metodologia de Ensino–Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas
Analisar a aplicação desse projeto, com vistas ao interesse, à motivação e à capacidade de investigação dos alunos a partir dela.
Apreciar situações vividas em sala de aula
Tirar Conclusões
A definição da resposta do problema da pesquisa.

Percebemos que enfrentaríamos cenários diferentes para trabalhar esses três eixos e sentíamos que cada um deles merecia um trabalho à parte. Assim planejamos um capítulo próprio para cada um de nossos "outros".

Capítulo 2 - História da Integral como parte da História da Matemática

Da origem da Integral até sua formalização por Riemann.

Capítulo 3 - Resolução de Problemas

Capítulo 4 - A Sala de Aula na Engenharia

CAPÍTULO 2

A HISTÓRIA DA INTEGRAL

como parte da História da Matemática

Da Origem da Integral até sua formalização por Riemann

CAPÍTULO 2 – A HISTÓRIA DA INTEGRAL COMO PARTE DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

DA ORIGEM DA INTEGRAL ATÉ SUA FORMALIZAÇÃO POR RIEMANN

Introdução

Como diz Nobre (2000, p.3)

> Certamente os autores, cujos escritos foram usados para composição deste texto, merecem todo o crédito, no entanto devo dizer que tive o cuidado de, sempre que possível, conferir as informações fornecidas por eles. O historiador, que se baseia em uma única fonte para escrever um texto, pode cair no erro de estar reproduzindo os possíveis enganos que o autor anterior deixou passar. Além disso, é necessário levar em consideração que existe uma certa dinamicidade na escrita da história, pois, em alguns casos, o que é tido como verdade histórica hoje pode vir a não ser mais historicamente verdadeiro amanhã.

Concordamos inteiramente com os dizeres dessa citação pois, nosso trabalho, na atividade 3 de Romberg – Relacionar com Ideias de Outros – em seu primeiro eixo – A História da Integral como parte da História da Matemática – é desenvolvido sobre trechos de outros, compilados por nós em diferentes momentos.

Tendo em mãos o livro "A History of Geometrical Methods", de Coolidge J.L., Oxford, at the Clarendon Press, 1940, lemos em seu prefácio que ele havia se deparado com um livro escrito por Michael Chasles, intitulado *"Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géometrie"*, escrito em 1837, portanto cem anos antes de ele escrever o seu. Disse Coolidge que esse livro lhe havia deixado uma forte impressão exercida por um grande tempo, uma profunda influência no estudo da história da matemática.

Disse, também, Coolidge que o que ele estranhava é que nenhum trabalho semelhante houvesse, que ele soubesse, ter sido escrito desde então. Sabia que duas novas edições do livro de Chasles haviam sido publicadas, uma em 1875 e uma póstuma em 1889, ambas sem alterações feitas na primeira edição. Acreditava, então, Coolidge, que era hora de se escrever um novo livro, tratando da história dos métodos. O mais difícil, parecia a ele, seria fazer a escolha do tema. Parecia–lhe que o assunto era geometria, sem dúvida, mas que esse tema poderia cair em quatro subdivisões principais: Geometria Sintética; Geometria Algébrica; Geometria Diferencial e Topologia. Decidiu-se por fazer uma Geometria Sintética no livro 1. No livro 2, geometria Algébrica; e, no livro 3, Geometria Diferencial. Topologia era coisa nova naquele tempo.

Nesse livro, iniciando o capítulo 1, ele tratava das origens da Geometria, o que nos interessava saber. Disse ele que o assunto geometria, considerado como uma ciência ou uma arte, tem uma longa história. Disse, também, que formas geométricas aparecem na natureza inanimada; no caminho elíptico da Terra ao redor do Sol; na forma esférica da gota de água; no padrão simétrico do floco de neve. Essas formas seriam explicadas pelas exigências mecânicas da situação.

Muitos exemplos na Natureza, aos quais são dados muitos créditos pela sagacidade geométrica, são encontrados, entre outros, na estrutura da célula do mel da abelha, um prisma cuja secção é aproximadamente um hexágono regular, e, entre os animais, diz ele, o geômetra mais capaz é, seguramente, a aranha pois basta observar–se, com cuidado, sua teia.

De que se ocupavam os geômetras de cinco mil anos atrás? Perguntava–se Coolidge?

Coolidge mostra que os primeiros registros que se tem das atividades dos homens, no campo da Geometria, vieram da Babilônia. A incerteza sobre datas é muito grande e parece que o registro matemático mais antigo do qual se tem notícia, trata da medida de certos quadriláteros. Dizem que ele foi decifrado por Allotte de la Fuije e registrado como pertencente ao período pré–sargônico ou sumério, isto é, de aproximadamente 3000 a.C.. Mas, segundo Maria Terezinha de Jesus Gaspar (2003, p.50), descobertas mais recentes nos dizem que outros provêm da época do antigo império babilônico, aproximadamente entre 1800 e 1530 a.C.

Uma resposta à pergunta de Coolidge é a de que eles estavam ocupados com a geometria, que quer dizer “medida da Terra”. A maioria dos babilônios, como mostrado em registros egípcios, trata desse tópico. Numa coleção desses registros pede–se para se calcular as áreas de três tipos diferentes de quadriláteros, aqueles em que duas, três e quatro medidas são dadas. A ideia de que a área de um retângulo é o produto de suas duas medidas, diz ele, deve ter vindo à primeira pessoa que pensou em área. Há registros, por volta de 3000 a.C., de babilônios, hindus, egípcios, chineses e japoneses trabalhando intensamente em Geometria.

Bento de Jesus Caraça, em seu livro “Conceitos Fundamentais da Matemática”, publicado, em 1ª edição, em dois volumes, 1941/1942, consultado por nós em sua reedição mais recente – 5ª edição, outubro de 2003, nos apresenta suas reflexões. Ao lê–lo, decidimos compilar vários trechos que, além de nos interessar, nos mostram sua “atitude arraigadamente científica, apontando nelas o mecanismo fundamental do progresso científico em que a dúvida assume um papel crucial”.

Assim, transcreveremos algumas de suas observações históricas, para fazer pano de fundo às nossas investigações.

2.1 – Duas atitudes em face da Ciência

Segundo Caraça, a ciência pode ser encarada sob dois aspectos diferentes. Ou se olha para ela tal como vem exposta nos livros de ensino, como coisa criada, e o aspecto é de um todo harmonioso, onde os capítulos se encadeiam em ordem, sem contradições, ou se procura acompanhá-la no seu desenvolvimento progressivo, assistir à maneira como foi sendo elaborada, e o aspecto é totalmente diferente – descobrem-se hesitações, dúvidas, contradições, que só um longo trabalho de reflexão e aprimoramento consegue eliminar, para que logo surjam outras hesitações, outras dúvidas, outras contradições. Descobre-se, ainda, qualquer coisa mais importante e mais interessante: no primeiro aspecto, que a Ciência parece bastar-se a si própria; à formação dos conceitos e das teorias parece obedecer só a necessidades interiores. No segundo aspecto, pelo contrário, vê-se toda a influência que o ambiente da vida social exerce sobre a criação da Ciência.

A Ciência, encarada assim, aparece–nos como um organismo vivo, impregnado de condição humana, com suas forças e suas fraquezas e subordinado às grandes necessidades do homem na sua luta pelo entendimento e pela libertação; aparece-nos, enfim, como um grande capítulo da vida humana social. Caraça diz, ainda, que a atividade do homem, quer considerada do ponto de vista individual, quer do ponto de vista social, exige um conhecimento, tão completo quanto possível, do mundo que o rodeia. Não basta conhecer os fenômenos. Importa compreender os fenômenos, determinar as razões de sua produção, descortinar as ligações de um com os outros. Nisto, na investigação do “como?” e do “porquê?”, distingue-se fundamentalmente a atividade do homem da dos outros animais.

Quanto mais alto for o grau de compreensão dos fenômenos naturais e sociais, tanto melhor o homem poderá se defender dos perigos que o rodeiam, tanto maior será o seu domínio sobre a Natureza e as suas forças hostis, tanto mais facilmente ele poderá realizar aquele conjunto de atos que concorrem para a sua segurança e para o desenvolvimento de sua personalidade, tanto maior será, enfim, a sua liberdade.

A inteligibilidade do Universo, considerado o termo Universo no seu significado mais geral – mundo cósmico e mundo social – é, por consequência, uma condição necessária da vida humana. Compreende–se portanto que, desde há muitos séculos, tenham sido realizados notáveis esforços no sentido de atingir uma parcela de verdade sobre a realidade.

Pensando no Universo e procurando compreender os fenômenos, descobrir suas razões e ligações, os primeiros pensadores foram levados a propor as seguintes questões fundamentais:

1. A Natureza apresenta-nos diversidade, pluralidade: de aspectos, de formas, de propriedades, etc. Existe, no entanto, para além dessa diversidade aparente um princípio único, ao qual tudo se reduza?

2. Qual é a estrutura do Universo? Como foi criado? Como se movem os astros e por quê?

Disse Caraça que, dessas duas questões, nos interessa principalmente a primeira, visto que se liga mais diretamente com o quê, por ora, queremos tratar.

Buscando respostas para ela, disse ele que as primeiras considerações vieram dos filósofos das colônias jônicas da Ásia Menor, principalmente de Mileto, e foram afirmativas, diferindo apenas na natureza do princípio ou do elemento único ao qual tudo devia reduzir-se.

Para Thales, de Mileto, que viveu aproximadamente de 624 a 548 a.C., é a água esse elemento único. Tudo é água! Vendo quanto a água é indispensável à germinação das plantas e, de uma maneira geral, à existência de vida. Mas, ainda, pela facilidade com que a água passa pelos três estados físicos: sólido, líquido e gasoso.

Para Anaximandro, de Mileto (611-545 a.C.), contemporâneo de Thales, existe uma substância infinita e indeterminada. As coisas materiais formam–se por determinações parciais desse elemento fundamental – o indeterminado.

Anaxímenes, de Mileto, contemporâneo de Thales e de Anaximandro, admite a existência de uma substância primordial que não é indeterminada, se bem que infinita. É o ar, que se torna fogo na rarefação, enquanto, por outro lado, os ventos são ar condensado. As nuvens formam–se do ar amassado e, quando se condensam ainda mais, tornam–se água.

Assim, por um processo de rarefação e condensação, era percorrido o ciclo do que os primeiros filósofos chamavam os quatro elementos – terra, água, ar, fogo.

Na cidade de Éfeso, uma colônia Greco-jônica do litoral da Ásia Menor, nasceu, pelo ano de 530 a.C., o filósofo Heráclito. Sua resposta à pergunta feita, profundamente original, muito diferente da dos filósofos que o precederam, dizia que o aspecto essencial da realidade é a transformação que as coisas estão permanentemente sofrendo pela ação do fogo.

Enquanto o mundo dos filósofos de Mileto era um mundo de permanência da matéria, o mundo de Heráclito era o mundo dinâmico da transformação incessante, do devir. O aspecto fundamental que a realidade nos apresenta é aquele, portanto, ao qual se deve prender a razão ao procurar uma explicação racional do mundo, é o de estarem as coisas, constantemente, se transformando umas nas outras. Morte e vida unem-se, formando um processo único de evolução.

Donde resulta o devir? Por que as coisas se transformam constantemente?

Em Caraça (2003, p.65) pode se ler que Heráclito, respondendo a essa questão e referindo–se ao devir, disse que há um princípio universal de luta, de tensão de contrários, que a todo momento rompe o equilíbrio para criar um equilíbrio novo, e que "a luta é o pai de todas as coisas e o rei de todas as coisas; de alguns fez deuses; de alguns, homens; de alguns, escravos; e de outros, homens livres". Heráclito também disse que "os homens não sabem como o que varia é concorde consigo próprio. Há uma harmonia das tensões opostas, como a do arco e da lira".

Pitágoras, de Samos, uma ilha do Mar Egeu, junto ao litoral da Ásia Menor, é um filósofo que parece ter vivido entre os anos 580 e 504 a.C. Pouco se sabe de sua vida ao certo, apesar de muito, com maior ou menor fantasia, ter-se escrito sobre sua vida e sua ação.

Disse Caraça que, a partir do século VI a.C., existiu e exerceu grande influência, na Grécia, uma seita, de objetivos místicos e científicos, denominada Escola Pitagórica. Dela parece ter sido Pitágoras o fundador.

Em relação à questão, da qual estamos esperando resposta, no que se distingue a escola pitagórica?

Profundamente original, ela se distinguia de todas as anteriores por dizer que o motivo essencial da explicação racional das coisas, via-o Pitágoras nas diferenças de quantidade e de arranjo de forma, no número e na harmonia.

Em Caraça (2003, p.66), pode-se ler que Filolau, um dos mais destacados representantes dessa escola, afirma “todas as coisas têm um número e nada se pode compreender sem o número”. São de interesse, para a História da Matemática, os escritos de Filolau que organizou também as ideias da escola pitagórica. Ele se expressa sobre essa afirmação dizendo que “uma das ideias mais grandiosas e mais belas que, até hoje tem sido emitida na história da Ciência – a de que a compreensão do Universo consiste no estabelecimento de relações entre números, isto é, de leis matemáticas, nos coloca sob o aparecimento da ideia luminosa de uma ordenação matemática do Cosmos.

Dois séculos mais tarde. Aristóteles, em sua Metafísica, disse

> ... aqueles a quem se chama pitagóricos foram os primeiros a consagrar–se às Matemáticas e fizeram–nas progredir. Penetrados desta disciplina, pensaram que os princípios das Matemáticas eram os princípios de todos os seres. Como, desses princípios, os números são, pela sua natureza, os primeiros, e como, nos números, os pitagóricos pensavam aperceber uma multidão de analogias com as coisas que existem e se transformam, mais que no Fogo, na Terra e na Água (tal determinação dos números sendo a justiça, tal outra a alma e a inteligência, tal outra o tempo crítico, e do mesmo modo para cada uma das outras determinações); como eles viam, além disso, que os números exprimiam as propriedades e as proporções musicais; como, enfim, todas as coisas lhes pareciam, na sua inteira natureza, ser formadas à semelhança dos números e que os números pareciam ser as realidades primordiais do Universo, consideraram que os princípios dos números eram os elementos de todos os seres e que o Céu é harmonia e número.
>
> (CARAÇA, 2003, p.67)

Ao consultar Lintz (2007, vol.1, p.121), podem-se destacar alguns aspectos por ele considerados importantes da doutrina pitagórica:

1 – O número é o princípio de tudo. O número como origem de tudo, o princípio primordial, o que é essencial para o bom entendimento da teoria das proporções geométricas (não valendo para grandezas incomensuráveis).

2 – A questão da harmonia, de onde se originou a teoria musical dos pitagóricos, com a intenção de mostrar que a combinação de sons e suas relações obedecem a leis numéricas de cuja harmonia depende a beleza da arte musical

3 – A ideia de que o número é, também, guia do conhecimento, parece a Lintz um vestígio do ritual dos mistérios, onde o iniciado tem um guia que o protege e orienta até seu um triunfo final.

Na matemática dos pitagóricos, espera-se encontrar uma fusão inseparável entre o número, a figura geométrica e os elementos místicos.

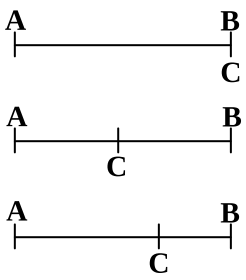
Os números, para os gregos, apresentavam–se ora como entidade plástica, ora como entidade empírica, ligados a “problemas práticos”. Eles distinguiam muito bem esses dois aspectos. A mera técnica de computação era denominada logística (parte da aritmética e da álgebra que diz respeito às quatro operações fundamentais: adição, subtração, multiplicação e divisão, enquanto que o estudo dos números, em si mesmos, era chamado Aritmética).

O número, como entidade plástica, só pode se expressar em sua plenitude sob sua forma geométrica que, na Grécia, era a maneira natural de expressar esse caráter. Sob o prisma do ocidente, Lintz diz que quer-se dar ao conceito de número, como visto pelos gregos, o caráter abstrato que ele tem entre nós, divorciado da figura geométrica ou de sua essência plástica. Daí decorre a total impossibilidade de se entender o sentido de grandeza comensurável ou incomensurável.

Segundo Lintz (2007, p.124), a definição de número atribuída a Tales diz que número é uma coleção de unidades e unidade é um ponto sem posição. Os gregos chamavam de mônada a algo que é a origem, que é a essência. Assim qualquer número n tem que ser da forma $n = \frac{p}{q}u$, onde u é a unidade e p e q são inteiros (para nós inteiros positivos, pois o conceito de negativo era desconhecido dos gregos).

Então o número n deveria sempre estar associado a uma figura geométrica, mas plástico como um segmento e qualquer segmento deveria estar associado ao número que o gera, a mônada vital.

Atribui-se ao próprio Pitágoras a descoberta das relações entre os intervalos musicais e a divisão de uma corda em face dos sons emitidos



$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = 1$ tom fundamental

$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}$ oitava sobre o tom fundamental

$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{2}{3}$ quinta sobre o tom fundamental

Então, mostra-se evidente a relação entre o quociente dos inteiros sucessíveis e os tons ditos harmônicos do fundamental. Daí a série $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...$ ser denominada harmônica.

Aceitava-se a hipótese fundamental de que um processo de iteração terminava depois de um número finito de vezes.

Lintz defende que o teorema, conhecido por teorema de Pitágoras, foi “descoberto” por Pitágoras ou um de seus seguidores diretos, provavelmente guiados por suas sugestões e obtido com o uso de semelhança de triângulos.

No Ocidente, grande parte dos problemas de matemática consiste em se determinar elementos de um conjunto satisfazendo certas relações. Mas, entre os gregos, os problemas frequentes consistiam em se construir figuras geométricas relacionadas com outras figuras previamente conhecidas. Assim, como mostram os problemas

1. Quadratura do círculo: consiste em se construir um quadrado de mesma área que a de um círculo dado;

2. Duplicação do cubo: consiste em se construir um cubo de volume duplo ao de um outro previamente dado;

3. Trissecção de um ângulo: consiste em se construir um ângulo igual a um terço de um ângulo dado.

A aritmética dos pitagóricos, onde o número aparece como um agregado de objetos, isto é, como magnitude, continha resultados importantes, como a decomposição de um número em fatores primos, a noção de máximo divisor, a noção de números amigos e números perfeitos, etc.

2.2 – A crise das quantidades incomensuráveis

De um outro historiador, Burton (2007, p.111), tiramos o seguinte trecho.

> A mais importante realização da Escola Pitagórica em sua influência sobre a evolução do conceito de número foi a descoberta do "irracional". Os pitagóricos sentiam, intuitivamente, que quaisquer dois segmentos de reta tinham uma medida comum, isto é, começando com dois segmentos de reta, podia-se encontrar algum terceiro segmento, talvez muito menor, que poderia ser marcado um número inteiro de vezes em cada um dos segmentos dados. Disso seguiria que a razão dos comprimentos dos segmentos de retas originais poderiam ser expressos como a razão de inteiros ou como um número racional. O primeiro a estabelecer isso, ou se isso foi feito por métodos aritméticos ou geométricos, provavelmente permanecerá um mistério para sempre.
> A prova mais antiga conhecida que trata de segmentos de reta incomensuráveis corresponde, em sua essência, à prova moderna de que $\sqrt{2}$ é irracional, a prova da incomensurabilidade da diagonal e o lado de um quadrado.(BURTON, 2007, p.111)

Já o Prof. Dr. Sergio Nobre, em nossa qualificação de ao mestrado, sobre a descoberta da irracionalidade de um número, defende que apesar de sempre, didaticamente ser mostrada a partir da $\sqrt{2}$, antes tenha sido concebida pela comparação entre o lado de um pentágono regular e uma de suas diagonais. Assim, afirma que o conceito de incomensurabilidade veio antes com a $\sqrt{5}$ do que com a $\sqrt{2}$.

Indo à procura desse fato encontramos no livro de Boyer (1974, p.54) pode-se ler que

> As circunstâncias que rodearam a primeira percepção da incomensurabilidade são tão incertas quanto a época da descoberta. Comumente se supõe que a percepção veio em conexão com a aplicação do Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo isósceles. Aristóteles refere-se a uma prova da incomensurabilidade da diagonal de um quadrado com seu lado, indicando que se baseava

> na distinção entre pares e ímpares.(...) Nessa prova o grau de abstração é tão alto que a possibilidade de ter sido a base da descoberta original da incomensurabilidade tem sido questionada. Mas, há outros modos pelos quais a descoberta pode ter sido feita. Entre esses, a simples observação de que quando se traçam as cinco diagonais de um pentágono, elas formam um pentágono regular menor e as diagonais do segundo pentágono por sua vez formam um terceiro pentágono regular, que é ainda menor. Esse processo pode ser continuado indefinidamente, resultando em pentágonos tão pequenos quanto se queira e levando à conclusão de que a razão da diagonal para o lado num pentágono regular não é racional. A irracionalidade dessa razão é uma consequência do argumento (...) em que se viu que a secção áurea se repete indefinidamente. Foi talvez essa propriedade que levou à revelação, talvez por Hipasus, da incomensurabilidade? Não ficaram documentos que resolvam a questão, mas a sugestão é plausível. Neste caso, não seria $\sqrt{2}$ mas $\sqrt{5}$ que primeiro revelou a existência de grandezas incomensuráveis, pois a solução da equação $a : x = x : (a - x)$ leva a $(\sqrt{5} - 1)/2$ como sendo a razão entre o lado de um pentágono regular e a diagonal. A razão da diagonal do cubo para uma aresta é $\sqrt{3}$ e aqui também o espectro da incomensurabilidade ergue sua feia cabeça. (BOYER, 1974, p.54)

Voltando a Caraça, na página 72, encontra-se um texto que fala do que aconteceu depois da crise dos incomensuráveis, sobre a Escola Pitagórica, sua queda e tentativa de fuga.

Vários indícios mostram que a primeira reação dos pitagóricos foi a de esconder o caso. De resto, o caráter de seita da escola pitagórica, em que os aspectos místico e político, este fechado e aristocrático, ombreavam com o aspecto científico, prestava–se a essa tentativa de segredo à volta da questão de maneira embaraçosa. Onde só havia a ganhar com o debate público e extenso, os pitagóricos instituíram como norma, pelo contrário, o segredo, o silêncio.

Outra tentativa de fuga parece ter residido numa vaga esperança de que, considerando como infinito – um infinito grosseiro, mal identificado, que era mais um muito grande do que o infinito moderno – o número de mônadas que formam um segmento de reta, talvez a dificuldade desaparecesse.

Isso não é uma simples conjectura. O desenvolvimento posterior do movimento filosófico e a polêmica viva que aparece logo a seguir, sobre o tema do infinito combinado com as afirmações dos pitagóricos, mostram bem claramente o caminho geral que as coisas seguiram.

Essa polêmica foi conduzida principalmente, por uma nova escola filosófica – a Escola de Eléa. Em Eléa nasceu, provavelmente entre 530 e 520 AC, um filósofo – Parmênides – que primeiramente ligado à escola pitágórica, havia se separado dela, procedendo a um exame crítico de todas as noções e concepções filosóficas que até então haviam sido emitidas.

Sua preocupação fundamental era a mesma que a dos filósofos que o precederam: qual é natureza íntima do existente? Parmênides distinguia aquilo que era objeto puramente da *razão* – o que ele chamava a *verdade* – e o que era dado pela *observação*, pelos *sentidos* – o que ele denominava a *opinião*. Opondo assim a *razão* e a *opinião*, Parmênides abriu um debate de importância e alcance excepcionais, que até hoje tem trabalhado intimamente o movimento científico – as relações entre a *razão* e a *experiência*, entre a *teoria* e a *prática*, o debate do *ideialismo* e do *materialismo*.

À concepção de Heráclito, que via na transformação permanente, no devir, a essência das coisas, opõe Parmênides o seguinte raciocínio: *como é possível que aquilo que é possa vir a ser? E como pode ele vir à existência? Se foi, não é e, também não é se está a ponto de vir a ser no futuro.*

Caraça escreveu que só o futuro do progresso científico poderia julgar entre essas duas maneiras de ver tão opostas. O triunfo veio, vinte séculos mais tarde, totalmente para Heráclito. Mas Parmênides conserva, pela importância extrema das questões que levantou, um lugar na primeira linha dos pensadores de todos os tempos. Dá para se ver, diz Caraça na página 76, a quantidade e a importância das questões de caráter filosófico e científico, que surgiram à volta da crítica do problema da medida, pelo aparecimento das incomensurabilidades e consequente necessidade de se ampliar o campo numérico. Ligado a essa necessidade, encontra–se todo o vasto problema da inteligibilidade do Universo.

Fazendo um balanço, após essa excursão histórica vamos rever o caminho que as coisas seguiram

> 1. Viu-se como surgiu a ideia heracliteana do devir, em que ela consiste ela e como, mais tarde apareceu a concepção eleática da *imobilidade eterna*, em contraposição com ela. Nesse momento nada se pode dizer, a não ser que elas se encontravam frente a frente, disputando primazia para a inteligibilidade do Universo.
> 2. Viu-se como a Escola Pitagórica emitiu a ideia grandiosa da *ordenação matemática do Cosmos* e como tal ideia foi arrastada no ruir estrondoso dessa escola.
> 3. Mas os últimos golpes de picareta, os argumentos de Zenão de Eléa, dão, pela sua própria essência, um fio condutor para se encontrar um caminho de saída. Desses argumentos resultaram:
> a. Que as dificuldades levantadas pelo fenômeno da incomensurabilidade só puderam ser resolvidas depois de um cuidadoso estudo dos problemas do infinito e do movimento. A estrutura da reta, da qual depende a incomensurabilidade aparece, nos seus argumentos, ligada a esses dois problemas;
> b. Que, em qualquer hipótese, a reta não pode ser pensada como uma simples justaposição de pontos, mônadas ou não. Há nela qualquer coisa que ultrapassa uma simples coleção de pontos e essa qualquer coisa – a sua continuidade – necessitava de um estudo aprofundado, ligado com o aspecto numérico, quantitativo, da medida.
> 4. Viu–se como a concepção eleática levantou um problema teórico, dominando todos esses – o problema do conceito da verdade e do meio de a adquirir. (CARAÇA, 2003, p.76)

Todos esses problemas, como disse Caraça, continuaram a ser intensamente debatidos mas, ao lado deles, surgiram outros cujo interesse imediato os ultrapassou ou deformou o seu caminho de resolução.

Era meado do século V a.C. A intensa atividade política e militar em que, nessa altura, a Grécia estava mergulhada, trouxe a cidade de Atenas à primeira plana de vida da península. Ela se tornou a grande metrópole da arte, da filosofia e das ciências gregas – o imperialismo ateniense. Com isso, surgiu um conjunto de preocupações relacionando–se mais diretamente ao homem.

Após a análise dessas preocupações concluiu–se pela incapacidade numérica de resolver o problema da incomensurabilidade. Portanto, pela degradação do número em relação à geometria, como consequência abandonou–se o que a escola pitagórica afirmava de positivo – a crença numa ordenação matemática do Cosmos e retomou–se, em termos cada vez menos nobres, o lado negativo das suas concepções. Concluiu-se, também, pela exclusão do conceito quantitativo do infinito dos raciocínios matemáticos – a matemática grega tomou uma feição cada vez mais finitista, invadiu–a o horror do infinito. Ainda, concluiu-se pelo abandono das concepções dinâmicas sempre que possível – a matemática grega foi invadida pelo horror do movimento.

Esses traços – *degradação do número, horror do infinito e horror do movimento* – como diz Caraça, se constituíram numa trincheira cômoda da hibernação, formaram o biombo prudente que o filósofo grego colocou entre si e a realidade. Mas, mais tarde, havia de levantar–se um vento portador de forças novas que, rasgando o biombo em farrapos, colocaria novamente os homens em contato com a realidade. Mais tarde ... vinte séculos depois, veio o Renascimento.

Voltando um pouco às ideias de Caraça (2003, p.168-185), as cidades gregas, até então isoladas, constituindo estados inteiramente autônomos, haviam sido obrigadas a se aproximar. Existia na Grécia o elemento de aglutinação dessas parcelas políticas? A História responde que não. A ausência de classe social de unificação política e a ausência de equilíbrio interior em qualquer das cidades eram insuficiências que condenavam a Grécia ao fracionamento político. Foi nesse ambiente, nesse contexto, que se desenrolaram a evolução da ciência e da cultura gregas. Uma reação contra esse estado de coisas, uma reação que foi atingir não só o rumo da evolução da ciência como, também, a extensão de sua expansão popular.

Sócrates (469-399 a.C), e principalmente Platão (427-347 a.C), como diz Caraça, são os filósofos desse rumo novo, que consiste numa aristocratização do saber; no desviar a atenção das coisas externas ao homem, para centrá-la nas internas, morais e psicológicas; no tema da virtude em plano superior ao do bem-estar terreno; na introdução sistemática de um princípio espiritual na explicação científica, em substituição das tentativas de explicação materialista; em suma, na tendência para o abandono da realidade sensível, da realidade fluente e para o refúgio no seio do espiritualismo, onde se pode construir, à vontade, uma permanência que abrigue dos vendavais da transformação.

Platão construiu um sistema filosófico – a Teoria das Formas ou Ideias. Para Platão, a realidade não está nas coisas sensíveis, está nas Ideias ou Formas: bom, belo, justo, grandeza, força, etc.; sendo que as coisas sensíveis não são mais que imagens ou cópias das formas.

O sistema filosófico de Platão tem uma importância enorme na história do pensamento e é preciso, portanto, conhecer pelo menos a sua base. Nascido num momento de crise da civilização grega, ele imprimiu à sua superestrutura uma orientação que havia de ter as mais largas repercussões sobre o movimento histórico seguinte.

Não é que o sistema filosófico de Platão seja aceito inteiramente por todos os filósofos posteriores. Alguns o discutem. Entre esses encontra–se seu discípulo mais célebre, Aristóteles (384-322 a.C) que, em sua Metafísica, critica duramente a Teoria das Ideias. Mas há no pensamento de Platão qualquer coisa de mais importante, de mais fundo, qualquer coisa de que a Teoria das Ideias é um instrumento – a defesa contra a fluência e o caráter aristocrático do sistema – e isso fica.

Perderam–se, então, todas as esperanças de uma ordenação matemática do Cosmos?

Como diz Caraça, essa maravilhosa aventura, nascida ingenuamente nos primeiros pitagóricos – *todas as coisas têm um número e nada se pode compreender sem o número* – e logo batida duramente pela crítica eleática, pode considerar–se, pelo menos provisoriamente, terminada? Parece que não é assim. A despeito de tudo, das contradições não resolvidas da incomensurabilidade, o ideal da ***ordenação matemática*** não desaparece e brilha ainda com força em Platão e depois dele. Simplesmente, essa *ordenação matemática* teve, necessariamente, que perder a feição quantitativa e refugiar–se nos domínios do qualitativo.

Platão conseguiu o seu objetivo! Escamotear a transformação, o *devir* (falsa aparência!), pondo, entre nós e ele, a figura geométrica – o ser que guarda a identidade! Pode-se ver, portanto que, segundo Caraça, o ideal da ordenação matemática não desapareceu, ele continua a palpitar; simplesmente, além do elemento místico, a ordenação matemática está subordinada às relações de figuras geométricas – a Aritmética cedeu o passo à Geometria e a figura ascendeu ao primeiro plano.

Nos *Elementos de Euclides* (323-285 a.C), um dos monumentos matemáticos mais importantes de todos os tempos, há traços pronunciados dessa mesma influência.

Tudo isso chama nossa atenção para o seguinte problema: o que é, para o geômetra antigo, uma curva? Para o geômetra grego seria porventura o processo dinâmico de descrição suficientemente digno para gerar figuras geométricas? Tudo o que observamos até agora nos leva a suspeitar que assim não deve ser. Disse Caraça, movimento e transformação são coisas tão intimamente ligadas, que uma atitude mental que rejeita uma deve logicamente banir a outra também.

Caraça (2003, p.185) resume que

> uma determinada situação e evolução social da Grécia, do século V para cá, impôs, na superestrutura intelectual dessa sociedade, a adoção de uma corrente de ideias da qual resultaram, no domínio da Matemática, as seguintes consequências principais:
>
> - incapacidade de conceber o conceito de variável e, portanto, o de função;
>
> daí
>
> - o abandono do estudo quantitativo dos fenômenos naturais e refúgio nas concepções qualitativas;
>
> paralelamente
>
> - o primado da figura sobre o número e consequente degradação deste;
>
> logo
>
> - a separação da Geometria e da Aritmética, o que fará mais tarde dizer *Descartes: ... "o escrúpulo que faziam os antigos em usar dos termos da Aritmética na Geometria, que não podia proceder senão de que eles não viam claramente as suas relações, causava muita obscuridade e embaraço na maneira pela qual eles se exprimiam";*
> - a exclusão, do seio da Geometria, de tudo quanto lembrasse o movimento, o mecânico e o manual;
>
> donde
>
> - um conceito estreito de curva, limitado à reta, circunferência e cônicas;
> - uma tendência para fugir de tudo aquilo que viesse ligado às concepções quantitativas e dinâmicas; em particular do conceito de infinito, não porque se banisse da Filosofia tal conceito, mas porque se renunciou a abordar um estudo quantitativo dele e se passou a eliminá-lo sistematicamente dos raciocínios matemáticos, e, da Matemática grega, veio-nos um método de raciocínio – *o Método de Exaustão* – que não tem outro objetivo.

Essas características iriam manter-se durante quase duas dezenas de séculos na Europa. O seu reinado só deveria terminar quando uma sociedade nova, dominada por uma classe nova, portadora de interesses e problemas novos, impusesse à Filosofia e à Ciência um rumo diferente.

2.3 – O Cálculo e seus conceitos relacionados

Para Lintz (2007, p.157), não é exagero dizer que, durante o século IV a.C., todo o pensamento grego se reuniu em Atenas e a Escola de Platão foi o centro das atividades intelectuais da época. O pensamento filosófico que evoluíra, na Ásia Menor e no sul da Itália, concentrou-se em Atenas na figura extraordinária de Sócrates (469-391 a.C.). Este homem notável conseguiu, na simplicidade de sua vida e de suas atitudes, acender o fogo do saber e o amor às virtudes da mente e no coração dos jovens atenienses, dentre os quais se encontra Platão.

Sócrates, que nada escreveu, chegou até nós como a principal figura dos diálogos de Platão e é aí que podemos encontrar as referências sobre a matemática da época e de tempos anteriores.

Segundo Eves (2004, p.131), Platão nasceu em Atenas (ou perto) em 427 a.C., o ano da grande peste. Ele, que estudou filosofia com Sócrates, saiu pelo mundo à procura do saber. Depois de seu retorno a Atenas, por volta de 387 a.C., fundou sua famosa Academia, uma instituição orientada por propósitos sistemáticos de investigação científica e filosófica. A importância de Platão na matemática não se deve a nenhuma das descobertas que fez mas, sim, à sua convicção entusiástica de que o estudo da matemática fornecia o mais refinado treinamento do espírito e que portanto, era essencial que fosse cultivado pelos filósofos e pelos que deveriam governar seu estado ideal.

Foi, através de Platão, que a Matemática atingiu o lugar de mais alta educação que ainda perdura. Ele estava convencido de que o estudo da matemática fornecia o melhor treinamento da mente.

Platão considerava a matemática como possuindo quatro ramos: Aritmética, Geometria, Estereometria e Astronomia. Mas, esta divisão era, na verdade, simples conveniência didática, pois todas as demonstrações, no final, deveriam ser geométricas porque o conhecimento da geometria era a condição fundamental para ser admitido na Academia. Quase todos os trabalhos matemáticos importantes do século IV a.C. foram feitos por amigos ou discípulos de Platão, fazendo da Academia o elo entre a matemática dos pitagóricos mais antigos com a da posterior e duradoura escola de Alexandria.

Em Lintz (2007, p.165), vamos preceder a obra de Euclides de uma breve análise da obra de Aristóteles que, embora não sendo matemático de profissão, teve grande influência no desenvolvimento da Geometria, pelo constante uso que dela fazia em seus argumentos e pela repercussão que suas investigações tiveram nos fundamentos daquela ciência.

Aristóteles, segundo Lintz, nasceu em Estagira, colônia grega próxima à Macedônia, no ano 384 a.C. Aos dezessete anos foi para Atenas onde ingressou na Academia, tornando-se o mais brilhante discípulo de Platão.

O *Órganon*, a coleção dos trabalhos de Aristóteles sobre lógica, tem grande importância por sua estreita relação com as ideias básicas da geometria. Seus livros, que formam o Ó*rganon*, apresentam muitos exemplos de ideias básicas de matemática e há outros que mostram uma riqueza de ideias em torno do conceito de número, de figura geométrica, etc. Esses livros evidenciam também que as teorias de Eudoxo (408-355 a.C), sobre proporções e grandezas incomensuráveis já eram bem conhecidas por Aristóteles.

Eves (2004, p.166-169), diz que o período que se seguiu à Guerra do Peloponeso, entre Atenas e Esparta, 431 a.C., foi marcado pela desunião política entre os estados gregos. Enfraquecidos, tornaram–se presa fácil do então forte reino da Macedônia. Com a derrota de Atenas em Queronéia (338 a.C.), a Grécia tornou-se parte do império macedônico.

Em 342 a.C., o rei Filipe II, da Macedônia, confiou a Aristóteles a tutela de seu filho Alexandre.

Em 336 a.C., dois anos depois da queda dos estados gregos, o Rei Filipe foi sucedido por seu filho, de vinte anos de idade, o ambicioso Alexandre, o Grande, que em seguida deu início a uma carreira de conquistas sem paralelo, na qual iria anexar, aos já crescentes domínios macedônicos, extensas áreas do mundo civilizado da época. Segundo Burton (2007, p.143), porque suas armadas eram principalmente gregas, ele espalhou a cultura grega sobre amplas secções do ocidente.

É bom lembrar, adiantando a história, dizer que o que seguiu foi um novo capítulo da história, conhecido como a Idade Helenística, que durou por três séculos até que o Império Romano lá se estabelecesse.

Voltando a Aristóteles, sabe–se que em 335 a.C., ele regressou a Atenas e fundou uma escola dita peripatética, pois as aulas eram dadas caminhando com seus alunos, pelos jardins do ginásio denominado Liceu. Mas, mais uma vez, em 323 a.C., com a morte de Alexandre, foi obrigado a fugir de Atenas, pois a população começou a perseguir todos os “simpáticos” ao antigo domínio macedônico. Retirou–se para cidade de Cálcis, na Eubéia onde faleceu no ano de 322 a.C.

Consta que, como diz Eves (2004, p.166), Alexandre, na trilha de suas tropas vitoriosas, foi fundando novas cidades, sempre em locais bem escolhidos. Foi assim que se deu a fundação de Alexandria, no Egito, em 332 a.C.. O próprio Alexandre escolheu o local, esboçou o plano geral e comandou o processo de colonização da cidade. Desde o início, Alexandria mostrou–se fadada a um destino promissor.

Com a morte de Alexandre, em 323 a.C., seu império se dividiu entre alguns de seus líderes militares, resultando no surgimento de três impérios, com governos independentes mas unidos pelos laços da civilização helênica. O Egito coube a Ptolomeu que, somente em 306 a.C., começou a governar efetivamente. Escolheu Alexandria como sua capital e, para atrair homens de saber para sua cidade, imediatamente começou a construir a famosa Universidade de Alexandria. O fulcro da instituição era a grande biblioteca que, por muito tempo foi o maior repositório de registros culturais de todo o mundo e que, dentro de quarenta anos após sua fundação, ostentava mais de 600.000 rolos de papiro.

Para montar uma equipe de intelectuais de alto gabarito na universidade, Ptolomeu recorreu a Atenas. Homens de talento e capacidade foram escolhidos para desenvolver os vários campos de estudo. Euclides, possivelmente também oriundo de Atenas, foi escolhido para chefiar o departamento de matemática. Por dois séculos, estudiosos e cientistas exilaram–se no Egito. Nessa altura, esse centro deve ter tido várias centenas de especialistas, cuja presença atraía muitos alunos famintos por desenvolver seus próprios talentos.

Ainda, segundo Eves (2004, p.167), é desapontador, mas muito pouco se sabe sobre a vida e a personalidade de ***Euclides***, salvo que foi ele, segundo parece, o criador da famosa e duradoura escola de matemática de Alexandria da qual, sem dúvida, foi professor. Desconhecem-se também a data e local de seu nascimento, mas é provável que sua formação matemática tenha se dado na escola platônica de Atenas. Muitos anos mais tarde, ao comparar Euclides com Apolônio, de maneira desfavorável a este último, Papus elogiou Euclides por sua modéstia e considerações para com os outros.

Já, em Burton (2007, p.85), lemos que os gregos fizeram da matemática uma disciplina, transformando uma variada coleção de regras empíricas de cálculo numa unidade sistemática e ordenada.

Os gregos moldaram, através de seus próprios esforços, uma matemática mais profunda, mais abstrata (no sentido de ser mais afastada dos usos da vida diária), e mais racional do que quaisquer outros que os precederam. Na Babilônia e no antigo Egito, a matemática tinha sido cultivada principalmente como uma ferramenta, ou para aplicação prática imediata, ou como parte de um conhecimento adequado a uma classe privilegiada de escribas. A matemática grega, por outro lado, parece ter sido um tema intelectual destacado para o conhecedor. Os hábitos de pensamento abstrato dos gregos os distinguiam dos pensadores anteriores. Dizia-se que eles não se preocupavam com os “campos triangulares dos cereais” mas com os “triângulos” e as características que deviam acompanhar a triangularidade.

Os primeiros indivíduos com os quais as específicas descobertas matemáticas estão tradicionalmente associadas são Thales, de Mileto (625-547 a.C.) e Pitágoras, de Samos (580-500 a.C.). Thales foi o primeiro a ir ao Egito e levar para a Grécia o que aprendera em Geometria. Ele descobriu, por si mesmo, muitas proposições, e transmitiu a seus sucessores os princípios de muitas outras, sendo que, em muitos casos, seus métodos eram mais gerais e, em outros, mais empíricos.

Assim, Thales é tradicionalmente descrito como o “Pai da Geometria”, ou o “primeiro matemático”. Parece claro que Thales contribuiu, de alguma forma, com a organização racional da geometria, talvez o método dedutivo. Por isso, a Thales é atribuído o nascimento da geometria demonstrativa.

A descoberta de números irracionais causou uma grande consternação entre os pitagóricos, pois ela desafiava a adequação de sua filosofia de que número era a essência de todas as coisas. Coube a Eudoxo, de Cnido (408-355 a.C.), resolver a crise nos fundamentos da matemática. Sua grande contribuição foi a busca de uma possível verificação na teoria das proporções aplicável às quantidades incomensuráveis, como havia feito com as comensuráveis. Tudo estava baseado sobre uma elaborada definição de razão de grandezas, mas essas grandezas mostravam-se indefinidas. Assim, o problema de definir números irracionais com números foi evitado inteiramente. O efeito imediato da abordagem de Eudoxo foi o de conduzir a matemática para as mãos dos geômetras.

Na ausência de uma teoria puramente aritmética para os irracionais, a primazia do conceito de número foi renunciada. A geometria foi considerada como uma doutrina mais geral do que a ciência dos números e, pelos seguintes 2000 anos, ela serviu como base de quase todo raciocínio matemático rigoroso.

A reputação de Eudoxo se apoia em três solos: sua teoria geral das proporções; a adição de numerosos resultados no estudo da secção áurea; e a invenção de um processo conhecido como o "método da exaustão". O procedimento que Eudoxo propôs foi, mais tarde, refinado por Arquimedes numa poderosa ferramenta para determinar áreas curvilíneas, superfícies e volumes – *um importante precursor do Cálculo Integral.*

Durante esse período, os matemáticos gregos começaram a ser dedutivamente organizados sobre as bases de axiomas explícitos. Sua forma final axiomática foi estabelecida nos treze livros de "Os Elementos" que Euclides escreveu por volta de 300 a.C. Ao compilar Os Elementos, Euclides erigiu esse trabalho sobre a experiência e a realização de seus predecessores nos três séculos imediatamente passados. A "Teoria das Proporções" de Eudoxo, que é realmente uma teoria dos números reais, está incorporada no livro V, e o livro II é, em sua maior parte, a rendição geométrica da Aritmética Pitagórica, onde Euclides representava os números por segmentos de reta em vez do método pictorial dos pontos, os primeiros favoritos de Pitágoras.

Novamente, procurando abrir o caminho que nos levasse às origens do conceito de Integral, consultamos Eves (2004, p.417-418,435). Diz ele que o desenvolvimento histórico do Cálculo seguiu a ordem contrária àquela dos textos e dos cursos básicos atuais sobre o assunto, ou seja, primeiro surgiu o Cálculo Integral e só muito tempo depois, o Cálculo Diferencial. A ideia da integração teve origem em processos somatórios ligados ao cálculo de certas áreas e certos volumes e comprimentos. A diferenciação, criada bem mais tarde, resultou de problemas sobre tangentes a curvas e questões sobre máximos e mínimos. Mais tarde ainda, verificou–se que a Integração e a Diferenciação estão relacionadas entre si, sendo cada uma delas operação inversa da outra, e que essa descoberta é conhecida como *Teorema Fundamental do Cálculo* e aparece enunciada e provada nas *Lectiones* de Barrow.

Acreditamos que, embora a maior parte da nossa história – a História da Integral – esteja situada no século XVII, seja preciso retornar à Grécia do século V a.C..

Pensávamos, inicialmente, encontrar a ideia de integral em Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.), mas este atribuiu esse crédito a Eudoxo de Cnido (408-355 a.C.) que, como ele mesmo disse, formalizou uma ideia atribuída ao sofista Antífon (480-411 a.C.). Nessa busca nos deparamos com fatos desafiadores, como aquele que seria o principal problema gerador do conceito de integral: o da *quadratura do círculo*. Assim encontramos em Eves, que uma das contribuições importantes mais antigas ao problema da quadratura do círculo foi dada por Antífon. Consta que Antífon teria antecipado a ideia de que, por sucessivas duplicações do número de lados de um polígono regular inscrito num círculo, a diferença entre a área do círculo e a área do polígono, ao final dessas ações, exaurir-se-ia. E que, como se pode construir um quadrado de área igual à de qualquer polígono[1], seria então possível construir-se um quadrado de área igual à do círculo. A crítica, que imediatamente se levantou contra esse argumento, sustentava-se no princípio de que uma grandeza

[1] Para verificar a veracidade dessa informação, consultar Baron (1985,volume 1, página 32) do curso de História da Matemática – Origens e desenvolvimento do Cálculo, Editora Universidade de Brasília.

pode ser subdividida indefinidamente e que, assim, o processo de Antífon jamais esgotaria a área do círculo. Não obstante, a corajosa abordagem de Antífon continha o germe do famoso Método de Exaustão.

Segundo Hobson (1953, p.15), Antífon teve essa ideia de uma forma potencial. O problema foi considerado por alguns sofistas que tinham feito tentativas superficiais de conectá–lo com a descoberta de “números quadrados cíclicos”, isto é, números quadrados cujo resultado era o produto do número por si mesmo. Mas, o caminho certo para um tratamento real desse problema foi descoberto por Antífon e aprimorado por Bryson de Heraclea (450-390 a.C.), contemporâneos de Sócrates. Bryson não somente inscreveu polígonos no círculo, como o fizera Antífon, mas, também, lhe circunscreveu polígonos. Ele pensava que a área do círculo pudesse ser encontrada determinando a média das áreas dos correspondentes polígonos inscritos e circunscritos, prenunciando a noção de limites inferior e superior num processo limitante.

Burton (2007, p.122-123) disse que o matemático que dominou a segunda metade do século V a.C. foi Hipócrates de Chios (460-380 a.C.). Como Thales, Hipócrates começou sua vida como um mercador e terminou como um professor. Proclus contou que Hipócrates compôs um trabalho sobre elementos de geometria antecipando em mais de um século o mais conhecido Elementos de Euclides. Hipócrates deu origem ao padrão agora familiar de apresentar a geometria como uma cadeia de proposições, um modo no qual outras proposições podem ser derivadas com base em outras anteriores. Entre outras inovações, ele introduziu o uso de letras do alfabeto para designar pontos e retas em figuras geométricas.

Quando Hipócrates chegou a Atenas, três problemas especiais: a quadratura do círculo, a duplicação do cubo e a trissecção de um ângulo geral já estavam atraindo a atenção dos geômetras. O que deu principalmente fama a Hipócrates se relaciona ao primeiro deles – A quadratura do círculo – É possível construir um quadrado cuja área seja igual a área de um circulo dado?

Disse Nobre, em nosso exame de qualificação em 2009, que ao falar sobre o problema da quadratura do círculo, pode-se ter a sensação de que é somente um problema teórico, mas que, na verdade, é um problema prático, um problema mais profundo e sério, uma vez que ele respondia a um problema de medida, um problema de construção de segmentos. Nobre deixa a seguinte pergunta: – Será que eu, com régua e compasso consigo construir um segmento que me dê um quadrado da mesma área do círculo dado?

Burton, por sua vez, em 2007, na página 124, escreve que mesmo os primeiros investigadores deviam ter suspeitado de que os meios permissíveis nessa época, régua e compasso, eram inadequados para resolver o problema da quadratura do círculo. Pois, quando falharam em encontrar uma construção envolvendo somente círculos e linhas retas, eles introduziram curvas especiais de nível superior. Deste modo eles tiveram sucesso. Hípias de Elis (460-400 a.C.), um contemporâneo próximo de Hipócrates, inventou uma curva nova chamada a Quadratriz com o propósito expresso de quadrar o círculo. Sua solução era perfeitamente legítima, mas não satisfazia a restrição que Platão havia colocado. Ouvindo que Hípias tinha inventado um aparelho deslizante, pelo qual sua curva pudesse ser desenhada, Platão rejeitou a solução dizendo que ela era mecânica e não geométrica.

2.4 – Arquimedes – O Gênio do Mundo Antigo

Segundo Burton (2007, p.196-197), o trabalho de Arquimedes (287-212 a.C.) resume a Matemática de Alexandria. Considerado o gênio mais criativo do mundo antigo, Arquimedes viveu uma ou duas gerações depois de Euclides e foi contemporâneo de Eratóstenes. Conhecem-se poucos detalhes de sua vida, embora várias histórias fantasiosas tenham sido escritas envolvendo seu nome. Arquimedes era filho do astrônomo Phidias e nasceu em Siracusa que, naquele tempo era a maior cidade do mundo helenístico. De acordo com Plutarco, Arquimedes descendia da mesma família real que o Rei Heron II. Arquimedes, quase que certamente, visitou o Egito e, por causa de corresponder–se regularmente com vários estudiosos do Museu de Alexandria, é provável que tenha estudado no centro da Ciência Grega. Entretanto ele gastou a maioria de seus anos produtivos em Siracusa, onde, sob a proteção do Rei Heron, devotou–se inteiramente ao estudo e a experimentação.

Arquimedes ganhou notoriedade na Antiguidade por seus escritos em Matemática, suas invenções mecânicas e pelo modo brilhante como conduziu a defesa de sua cidade natal durante a segunda Guerra Púnica (218-201 a.C.). É bem atestado que ele morreu no indiscriminado massacre que se seguiu ao saque de Siracusa pelas tropas romanas.

A habilidade mecânica de Arquimedes, juntamente a seu conhecimento teórico, capacitou-o a deixar uma série de instrumentos engenhosos. Destes, o mais famoso é a bomba de água em parafuso de Arquimedes, uma bomba ainda usada em certas partes do mundo. Arquimedes, aparentemente a inventou durante sua visita ao Egito pelo propósito de elevar o canal de água sobre diques em campos irrigados. Várias das histórias que contam sobre Arquimedes, que chegaram até nós, relacionam-se à sua habilidade como engenheiro. Por isso é natural que suas invenções mecânicas tenham um mais amplo apelo do que suas realizações matemáticas especializadas.Dentre todos os seus trabalhos, o que mais orgulhava Arquimedes era o método para encontrar o volume de uma esfera – ele mostrou que o volume de uma esfera é 2/3 do volume do menor cilindro que a contém. Satisfazendo a um pedido seu, a figura de uma esfera e de um cilindro foi gravada na lápide de seu túmulo.

Retomando Burton (2007, p.197), apesar de seus talentos mecânicos, Arquimedes estava, de longe, mais preocupado com estudos teóricos do que com as descobertas, vendo essas como “divertimentos da geometria em jogo”.

Uma pesquisa dos conteúdos de um pouco dos principais trabalhos de Arquimedes é suficiente para revelar a ampla gama de assuntos que ele estudava e a surpreendente ingenuidade com as quais ele os tratava. Os doze itens que chegaram até nós foram preservados por uma escola de matemáticos bizantinos, em Constantinopla, entre os séculos VI e X, que tiveram, como objetivo, colecionar e copiar os tratados dispersos de Arquimedes. Esses perderam grandemente sua forma original, tendo sofrido transformações linguísticas desde o dialeto Dórico-siciliano até o Grego-ático. Diferentemente dos Elementos de Euclides, os trabalhos que imortalizaram Arquimedes nunca foram populares na Antiguidade, onde Euclides trabalhou o material existente em tratados sistemáticos que qualquer estudante educado poderia entender. Arquimedes objetivava produzir pequenos trabalhos de âmbito limitado, dirigido aos mais eminentes matemáticos desse tempo.

Pesquisando em Boyer (1974, p.67-68), lemos que segundo Arquimedes, foi Eudoxo quem forneceu o lema que hoje tem o nome de Arquimedes, às vezes chamado *axioma de Arquimedes e que serviu de base para o método de exaustão, o equivalente grego do cálculo integral.* O lema ou axioma, diz que, dadas duas grandezas que têm uma razão, isto é, nenhuma delas sendo zero, pode se achar um múltiplo de qualquer delas que seja maior que a outra.

Do axioma de Eudoxo, ou de Arquimedes é fácil, por uma redução ao absurdo, provar uma proposição que formava a base do método de exaustão dos gregos, da seguinte forma:

> Se de uma grandeza qualquer subtrairmos uma parte não menor que sua metade e do resto novamente subtrai-se não menos que a metade e se esse processo de subtração é continuado, finalmente restará uma grandeza menor que qualquer grandeza de mesma espécie.

Essa proposição, que chamaremos de "propriedade de exaustão" equivale à formulação moderna seguinte

> Se M é uma grandeza dada, ε uma grandeza prefixada de mesma espécie e r é uma razão tal que $\frac{1}{2} \leq r < 1$, então podemos achar um inteiro N tal que $M(1-r)^n < \varepsilon$ para todo inteiro $n > N$.

Isto significa que a propriedade de exaustão equivale a dizer que $\lim_{n\to\infty} M(1-r)^n = 0$. Ainda mais, os gregos usaram essa propriedade para provar teoremas sobre as áreas e volumes de figuras curvilíneas.

Uma propriedade na qual provavelmente Eudoxo aplicava o método da exaustão é a que diz “as áreas de círculos estão entre si como os quadrados dos diâmetros”.

Boyer (1974, p.78) diz que essa propriedade parece ter sido o primeiro teorema preciso relativo a figuras curvilíneas. Ele aponta Eudoxo como o provável originador do Cálculo Integral, a maior contribuição à matemática dos membros da Academia Platônica.

Em Eves (2004, p.418-419), é dito que o método de exaustão, comumente creditado a Eudoxo, admite que “uma grandeza possa ser subdividida indefinidamente e que sua base é a aquela proposição já citada:

> Se de qualquer grandeza subtrair-se uma parte não menor que sua metade, do que restou outra parte não menor que sua metade e assim por diante, chegar-se-á finalmente a uma grandeza restante menor do que qualquer grandeza fixada da mesma espécie.

Empregando–se o método de exaustão prova–se que $A_1 : A_2 = d_1^2 : d_2^2$.. Onde A_1 e A_2 são as áreas de dois círculos de diâmetros d_1 e d_2.

Ainda em Eves (2004, p.193–194), devido às máquinas de defesa de Arquimedes, Siracusa resistiu ao sítio de Roma por quase três anos. As defesas só se romperam quando, durante uma comemoração no interior da cidade, o excesso de confiança dos siracusanos fez com que afrouxassem a guarda.

Marcelo, um general romano, desenvolveu um profundo respeito por seu engenhoso adversário e, quando finalmente conseguiu abrir brechas nos muros da cidade, deu ordens estritas para que nenhum mal fosse feito a tão ilustre matemático. Quando soube de sua morte ficou muito consternado e, com as honras e o respeito devidos, fez enterrar o corpo do ilustre intelectual no cemitério da cidade.

Arquimedes, com muita razão, orgulhoso de uma de suas grandes descobertas geométricas expressara o desejo de que se gravasse, em seu túmulo, a figura de uma esfera inscrita num cilindro circular reto.

Marcelo cuidou para que o pedido de Arquimedes fosse atendido.

Os trabalhos de Arquimedes são obras-primas de exposição matemática e lembram, consideravelmente, artigos de revistas especializadas modernas. Além de exibirem grande originalidade, habilidade computacional e rigor nas demonstrações, são escritos numa linguagem altamente acabada e objetiva. Cerca de dez tratados de Arquimedes se preservaram até nossos dias e há vestígios de outros extraviados. Talvez a mais notável das contribuições feitas à matemática por esses tratados se traduzam no desenvolvimento inicial de alguns dos métodos do cálculo integral.

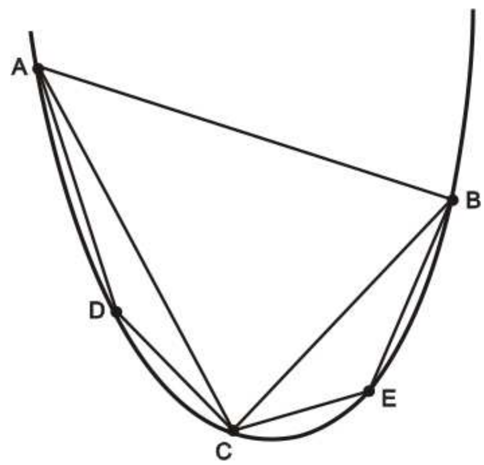
Eves (2004, p.196), relata que uma das descobertas mais emocionantes da história da matemática ocorreu há relativamente bem pouco tempo, em 1906: foi achado em Constantinopla por J.L.Heiberg o tratado de Arquimedes *O Método* – de longa data perdido. Esse tratado encontra–se na forma de uma carta endereçada a Eratóstenes e é importante devido às informações que fornece acerca do “método” que Arquimedes usava para descobrir muitos de seus teoremas. Embora o “método” seja suscetível de se tornar rigoroso pelos processos de integração modernos, Arquimedes o usava de maneira meramente heurística para descobrir resultados que ele então tratava de colocar em termos rigorosos mediante o método de exaustão. Esse “método” se liga intimamente às ideias do cálculo integral.

Três dos trabalhos remanescentes de Arquimedes se referem à geometria plana. São eles, *A Medida de um círculo*, *A Quadratura da Parábola* e *Sobre as Espirais*. Foi, no primeiro deles, que Arquimedes inaugurou o método clássico para o cálculo de π .

Diz Burton (2007, p.202), que a mais importante proposição, no trabalho *A Medida de um círculo,* contém uma estimativa de Arquimedes para o valor numérico de π.

A abordagem que Arquimedes tomou para obter um valor de π, estava baseado no seguinte fato: a circunferência de um círculo está entre os perímetros dos polígonos regulares de n lados inscritos e circunscritos e, quando n cresce, a diferença entre o comprimento da circunferência e o dos comprimentos dos perímetros dos dois polígonos torna-se menor. Esse tipo de demonstração tem, desde então, se tornado conhecido como o “método da exaustão” – não por aquilo que ele faz para o usuário, mas porque a diferença de área entre os polígonos e o círculo é gradualmente exaurida. Embora isso não signifique considerar o círculo como limite dos polígonos inscritos ou circunscritos, quando o número de lados cresce indefinidamente, não há passagem direta ao limite, pois o matemático grego nunca pensou nesse processo infinito de passos. Ele considerava somente levar avante em estágios finitos para um grau desejável de precisão.

Em Simmons (1987, p.261), encontramos a área de um segmento parabólico, que comumente é denominado a quadratura da parábola. A área da parte da parábola da figura a seguir, delimitada pela corda arbitrária AB e pelo arco ADCEB.



Fonte: SIMMONS, 1987, p.262

Não há nenhum modo conveniente para inscrever polígonos regulares nessa figura, tanto assim que Arquimedes utilizou triângulos em vez disso. Sua primeira aproximação foi o triângulo ABC, onde o vértice C é escolhido como o ponto em que a tangente à parábola é paralela a AB. Sua segunda aproximação foi obtida juntando–se ao triângulo ABC os dois triângulos ACD e BCE, onde o vértice D é o ponto em que a tangente é paralela a AC e o vértice E é o ponto em que a tangente é paralela a BC. Para obter a terceira aproximação, ele inscreveu triângulos da mesma maneira em cada uma das 4 regiões ainda não incluídas (uma delas é a que está entre o arco CE e a corda CE); assim essa terceira aproximação é a soma das áreas dos triângulos ABC, ACD e BCE com a dos 4 novos triângulos. Continuando esse processo até "exaurir" o segmento parabólico, Arquimedes mostrou que a área é exatamente quatro terços da área do primeiro triângulo ABC. O ponto central da prova é que a soma das áreas dos triângulos ACD e BCE é um quarto da área do triângulo ABC, e esta relação se repete em cada estágio sucessivo do processo, e assim indefinidamente. Sendo assim, pela álgebra elementar, temos a soma de uma série geométrica infinita de razão r, $|r|<1$ que nesse caso leva à conclusão de que a área do segmento parabólico é igual a quatro terços da área do primeiro triângulo ABC.

Guidorizzi (2001, p.494), escreve que Arquimedes realizou este feito por meio de uma balança e em seguida admitiu que o valor da área era $\frac{4}{3}T$, com T sendo o primeiro triângulo de aproximação do segmento parabólico, e, por uma dupla redução ao absurdo, provou a sua veracidade[2].

Em Simmons (1987, p.601-604), vemos que a descoberta por Arquimedes da fórmula do volume de uma esfera foi uma das maiores realizações matemáticas de todos os tempos. A fórmula em si teve importância óbvia, mas ainda mais importante foi o método que ele usou para descobri-la, pois esse método corresponde à primeira manifestação da ideia básica do cálculo integral.

Ele provou essa fórmula em seu tratado *Sobre a esfera e o cilindro,* por meio de argumento longo e rigoroso de perfeição clássica. Infelizmente, no entanto, esse argumento era do tipo dos que obrigam a acreditar, mas fornecem pouco discernimento.

Nesse manuscrito, Arquimedes descreveu a seu amigo Eratóstenes como ele "investigara alguns problemas de Matemática por meio da Mecânica". Sendo que a mais maravilhosa dessas investigações foi sua descoberta do volume de uma esfera.

No texto de Simmons (1987, p.601-604), as ideias discutidas foram elaboradas por alguém que tem sido considerado, com toda razão, "o maior gênio do mundo antigo". Mas essas ideias são apenas o começo. Com a vantagem da perspectiva histórica, pode–se ainda reconhecer, nesse texto, ideias essenciais da integração, que se sabe ser um processo de longo alcance e diversidade, com incontáveis aplicações nas Ciências e na Matemática. O próprio Arquimedes suspeitou do valor potencial de suas ideias dizendo: *–"Estou convencido de que esse método será de grande utilidade para a Matemática, pois eu prevejo que, uma*

[2]Este processo rigoroso de Arquimedes pode ser encontrado em Guidorizzi (2001) Vol. 1, 5ªEd., LTC editora, pág.494 a 496.

vez compreendido e consolidado, será usado para descobrir outros teoremas, que não ocorreram a mim, por outros matemáticos vivos ou ainda por nascer".

Segundo Eves (2004, p.198), Euclides, Arquimedes e Apolônio são os três gigantes da matemática do século III a.C.

Apolônio, que era cerca de vinte e cinco anos mais novo do que Arquimedes, nasceu por volta de 262 a.C., em Perga, no sul da Ásia Menor. Quando jovem foi para Alexandria a fim de estudar com os sucessores de Euclides e acabou ficando na cidade por longo tempo. Posteriormente visitou Pérgamo, no oeste da Ásia menor, onde havia uma universidade e uma biblioteca recentemente criadas nos moldes das de Alexandria. Retornou depois a Alexandria onde morreu por volta de 190 a.C..

Embora Apolônio fosse um astrônomo notável e embora ele tivesse escrito sobre múltiplos assuntos matemáticos, sua fama se deve principalmente a *Secções Cônicas*, uma obra extraordinária, graças à qual seus contemporâneos lhe deram o cognome de "O Grande Geômetra".

Na página 209 de Eves (2004), encontramos que os sucessores imediatos de Euclides, Arquimedes e Apolônio prolongaram por algum tempo a tradição geométrica grega. Mas esta começou a declinar firmemente e os novos desenvolvimentos limitaram–se à astronomia, à trigonometria e à álgebra. Entretanto, perto do final do século III d.C., cerca de 500 anos depois de Apolônio, surgiria um outro grande geômetra, **Papus de Alexandria**, que, com muita competência e entusiasmo, bem que se empenhou em reacender o interesse por sua matéria.

Papus escreveu comentários sobre os *Elementos* e *Os Dados* (seis primeiros livros dos Elementos) de Euclides e sobre o *Almagesto* e *Planisfério* de Ptolomeu, mas quase tudo que sabemos sobre isso é através da influência exercida sobre os escritos de comentadores que se seguiram. O trabalho realmente grande de Papus é sua *Coleção Matemática*, uma combinação de guia da geometria da época, acompanhado de comentários, com numerosas proposições originais, aprimoramentos, extensões e notas históricas. Dos oito livros que compunham a obra, perderam–se o primeiro e parte do segundo.

Continua dizendo Eves (2004, p.212-213), que, depois de Papus, a matemática grega deixou de ser um campo de estudos ativo, e sua memória se perpetuou tão somente no trabalho de escritores menores e comentadores. Dentre esses estavam Têon de Alexandria, Hipátia, Proclo, Simplício e Eutócio. Destes, acreditamos que se deva consignar um crédito a Simplício, o comentador de Aristóteles. Ele nos deixou descrições da tentativa de Antífon de quadrar o círculo, das lunas de Hipócrates e de um sistema de esferas concêntricas inventado por Eudoxo para explicar os movimentos aparentes dos membros do sistema solar. Provavelmente contemporâneo de Simplício, Eutócio escreveu comentários sobre *A Medida de um Círculo*, *Sobre a Esfera e o Cilindro* e *Sobre o Equilíbrio de Figuras Planas* de Arquimedes e sobre *Secções Cônicas* de Apolônio.

A escola ateniense (Academia) teve de enfrentar a oposição crescente dos cristãos, culminando com a obtenção, em 529 d.C., de um decreto do Imperador Justiniano, que fechava suas portas para sempre. Simplício e alguns outros filósofos e cientistas fugiram para a Pérsia, onde foram bem recebidos pelo rei Cosroês I e criaram o que se poderia chamar de Academia Ateniense da Pérsia. As sementes da ciência grega se transportaram para o solo muçulmano, onde encontraram o patrocínio necessário para vicejar por vários séculos.

O destino da escola de Alexandria nas mãos dos cristãos foi um pouco melhor do que o da escola ateniense, posto que continuou a existir, ao menos parcialmente, até 641, quando Alexandria tombou ante os árabes. **A longa e gloriosa história da matemática grega chegava ao fim.**

Na página 246, Eves (2004), escreve que após o declínio da matemática grega clássica, a matemática da China tornou–se uma das mais criativas do mundo. Enquanto a Europa Ocidental atravessava o marasmo cultural da Baixa Idade Média, a matemática chinesa crescia, produzindo resultados que a Europa só iria redescobrir muito mais tarde, durante ou após o Renascimento.

Muitas das descobertas chinesas em matemática acabaram por fim fazendo o caminho da Europa via Índia e Arábia. Por outro lado, só com a chegada dos jesuítas à China no período Ming é que a influência matemática ocidental se fez sentir na China.

Eves (2004) continua, na página 289, dizendo que o período que vai da queda do Império Romano, na metade do século V, até o século XI, é conhecido como Baixa Idade Média. Durante esse período a civilização na Europa ocidental atingiu níveis muito baixos: o ensino praticamente deixou de existir, quase todo o saber grego desapareceu e muitas das artes e dos ofícios legados pelo mundo antigo foram esquecidos. Apenas os monges dos Monastérios Católicos e uns poucos leigos cultos preservaram um tênue fio de saber grego e latino. O período foi marcado por muita violência física e intensa fé religiosa. A ordem social antiga cedeu lugar a uma outra, feudal e eclesiástica.

Os romanos nunca tiveram inclinação para a matemática abstrata; ao contrário, somente os aspectos práticos da matemática, ligados ao comércio e à engenharia civil, lhes interessavam. Com a queda do Império Romano e a cessação subsequente de grande parte do comércio leste-oeste e, ainda, com o abandono de projetos estatais de engenharia, mesmo esse interesse minguou e não seria exagero dizer que, afora a elaboração do calendário cristão, muito pouca matemática se fez durante o meio milênio da Baixa Idade Média.

2.5 – O Primeiro Acordar

No livro de Eves (2004, p.292-295) encontramos a história do reavivamento da matemática no mundo.

No limiar do século XIII despontou a figura de **Leonardo Fibonacci** (“Leonardo, filho de Bonaccio”, 1175-1250), o matemático mais talentoso da Idade Média, também conhecido como Leonardo de Pisa (ou Leonardo Pisano). Leonardo nasceu em Pisa, centro comercial importante, onde seu pai era ligado aos negócios mercantis. Muitas das grandes cidades comerciais italianas daqueles tempos mantinham entrepostos em várias partes do mundo mediterrâneo. Esse foi o caminho que levou Leonardo a receber parte de sua educação em Bejaia, norte da África, onde seu pai fora desempenhar uma função alfandegária. As atividades do pai logo despertaram no garoto um interesse pela aritmética que se canalizou, posteriormente, para extensas viagens ao Egito, à Sicília, à Grécia e à Síria, onde pôde entrar em contato direto com os procedimentos matemáticos orientais e árabes. Inteiramente convencido da superioridade prática dos métodos indo–arábicos de cálculo, Fibonacci, em 1202, logo depois de retornar à sua terra natal, publicou sua obra famosa intitulada *Liber abaci*.

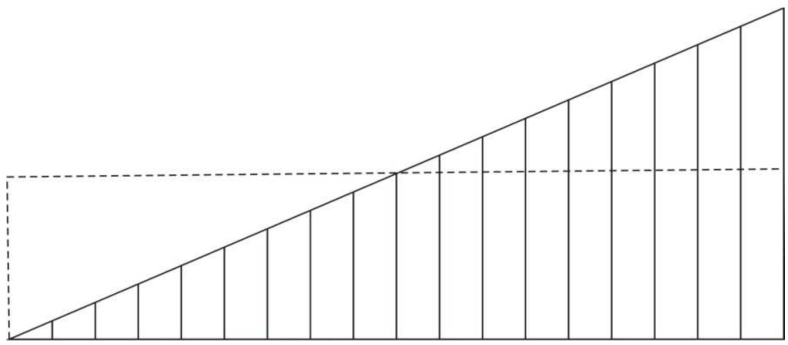
É evidente que Fibonacci foi um matemático invulgarmente capaz, sem rivais nos nove séculos da Idade Média. Um de seus contemporâneos mais competentes foi Jordanus Nemorarius. Jordanus deixou vários trabalhos nas áreas de aritmética, álgebra, geometria e estatística. Apesar de muitas vezes se pintar um quadro desolador do século XIII quanto à matemática, foi, na sua parte inicial, que se atingiu o ponto alto das realizações medievais em aritmética, geometria e álgebra.

Os primeiros tempos do século XIII assistiram ao surgimento das universidades de Paris, Oxford, Cambridge, Pádua e Nápoles. As universidades posteriormente se tornaram fatores positivos para o desenvolvimento da matemática, até porque muitos matemáticos se ligaram a uma ou mais dessas instituições.

O século XIV foi relativamente estéril, matematicamente falando. Foi o século da peste Negra, que varreu mais de um terço da população da Europa, e da maior parte da Guerra dos Cem Anos, com suas transformações políticas e econômicas no norte da Europa.

O maior matemático desse período foi **Nicole Oresme**, nascido na Normandia por volta de 1323. Faleceu em 1382 depois de uma carreira que se estendeu do magistério ao bispado. Ele escreveu cinco trabalhos matemáticos e traduziu algo de Aristóteles. Num de seus opúsculos encontra–se o primeiro uso conhecido de expoentes fracionários, não obviamente em notação moderna. Em outro, ele faz a localização de pontos por coordenadas, antecipando assim a Geometria Analítica. Um século mais tarde, esse último trabalho mereceria várias edições e é possível que tenha influenciado matemáticos do Renascimento, ou até mesmo Descartes.

Boyer (1974, p.192), escreve que, por quase um século antes de Oresme, os filósofos escolásticos vinham discutindo a quantificação das “formas” variáveis, um conceito de Aristóteles aproximadamente equivalente à qualidade. Entre tais formas havia coisas como a velocidade de um objeto móvel e a variação da temperatura, de ponto para ponto, num objeto com temperatura não–uniforme. As discussões eram interminavelmente prolixas, pois os instrumentos de análise disponíveis eram inadequados. Apesar dessa falta, os lógicos em Merton College, Oxford, tinham obtido um importante teorema, quanto ao valor médio de uma forma “uniformemente diforme”, isto é, uma forma em que *a taxa de variação da taxa de variação é constante*. Oresme conhecia bem esse resultado. Então ocorreu-lhe, em algum momento antes de 1361, um pensamento brilhante – por que não traçar uma figura ou um gráfico da maneira pela qual variam as coisas? Vê-se aqui, é claro, uma sugestão antiga daquilo que agora chamamos representação gráfica de funções. Tudo o que é mensurável, escreveu Oresme, é imaginável na forma de quantidade contínua. Por isso, ele traçou um gráfico velocidade–tempo para um corpo que se move com aceleração constante. Ao longo de uma reta horizontal ele marcou pontos representando instantes de tempo (ou longitudes) e, para cada instante, ele traçou perpendicularmente à reta de longitudes um segmento de reta (latitude) cujo comprimento representava a velocidade. As extremidades desses segmentos, ele percebeu, jazem ao longo de uma reta e, se o movimento uniformemente acelerado parte do repouso, a totalidade dos segmentos velocidade (que chamamos de ordenadas) preencherá um triângulo retângulo.



Fonte: BOYER, 1974, p.192

Como a área desse triângulo representa a distância percorrida, Oresme forneceu assim uma verificação geométrica da regra de Merton, que expressa uma formulação para o movimento da velocidade com variação uniforme, pois a velocidade, no ponto médio do intervalo de tempo, é a metade da velocidade final. Além disso, o diagrama leva obviamente à lei de movimento usualmente atribuída a Galileu no século dezessete.

Os termos latitude e longitude, que Oresme usou, são equivalentes, num sentido amplo, às nossas ordenada e abscissa, e sua representação gráfica assemelha–se com nossa geometria analítica. Seu uso de coordenadas, é claro, não era novo, pois Apolônio, e outros antes dele, tinham usado sistemas de coordenadas, mas sua **representação gráfica de uma quantidade variável era novidade.** Parece que ele percebeu o princípio fundamental de se poder representar uma função de uma variável como uma curva, mas não soube usar eficazmente essa observação a não ser no caso de função linear.

A representação gráfica de funções, conhecida então como latitude de formas, continuou a ser um tópico popular, desde o tempo de Oresme até o de Galileu.

Os matemáticos do Ocidente, durante o século XIV, tinham imaginação e precisão de pensamento porém faltava–lhes técnica algébrica e geométrica. Por isso suas contribuições não foram dadas no sentido de estender a obra clássica mas no de sugerir novos pontos de vista, entre os quais um interesse por séries infinitas, um tópico essencialmente novo, antecipado apenas por alguns antigos algoritmos iterativos e pelo cálculo da soma de uma progressão geométrica infinita, por Arquimedes. Enquanto os gregos tinham um *horror infiniti*, os filósofos escolásticos do fim da Idade Média se referiam frequentemente ao infinito, tanto como potencialidade, quanto como uma realidade ou algo “completado”.

Num manuscrito não–publicado, Oresme obteve a soma da série

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\frac{5}{32}+...,$$

o que faz dele um dos precursores da análise infinitesimal. Em uma das contribuições de Oresme às séries infinitas encontra–se sua demonstração, evidentemente a primeira na história da matemática, de que a série harmônica é divergente. Ele agrupou os termos sucessivos da série

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{n}+...$$

colocando o primeiro termo no primeiro grupo, os dois termos seguintes no segundo grupo, os quatro termos seguintes no terceiro grupo e, assim por diante, o *m*–ésimo grupo contendo 2^{m-1} termos. Então, é evidente que se tem uma infinidade de grupos e que a soma dos termos em cada grupo é pelo menos ½ . Logo, somando um número suficiente de termos em ordem podemos superar qualquer número dado.

Eves (2004, p.295), completou dizendo que embora a matemática na Idade Média tivesse sido essencialmente prática, a matemática especulativa não desapareceu totalmente. **As elocubrações dos filósofos escolásticos levavam a teorizações sutis sobre movimento, infinito e contínuo**, conceitos de importância fundamental na matemática moderna.

2.6. A Renascença – A Batalha dos Sábios

Burton (2007, p.315) diz que o que distinguia o restabelecimento grego da Renascença de seus precursores medievais não era simplesmente que os gregos tinham se tornado parte de um currículo geral de estudos, mas que o foco todo de interesse estava sobre obras primas históricas e literárias da literatura grega.

A Renascença produziu poucos matemáticos brilhantes comparativamente com as realizações em literatura, pintura e arquitetura. O baixo nível de prevalecimento do conhecimento matemático media–se pelo mesmo modo que se mede qualquer disputa intelectual. Embora a matemática estivesse incluída no currículo da maioria das universidades, ela era mantida numa maneira tíbia. Sem dúvida, durante os últimos anos do século XV, Bolonha era praticamente o único lugar onde o ensino da matemática estava propriamente organizado e, mesmo lá, ela aparecia principalmente como uma disciplina auxiliar da astronomia. Havia poucas cátedras universitárias em matemática e nenhum matemático, poderia reger, com relação ao mundo da aprendizagem, sem também ser um professor, um estudioso, ou um patrono das humanidades da Renascença.

A matemática se beneficiou imensamente da paixão humanística – quase zelo missionário – pela descoberta, tradução e circulação de textos gregos. Embora seu principal interesse fosse o de clássicos literários, os humanistas pegaram toda a aprendizagem clássica como seu campo de conhecimento e os trabalhos matemáticos foram apreciados igualmente com aqueles literários em sua recuperação.

Por volta de 1500 a situação tinha mudado radicalmente. Os recentes trabalhos traduzidos tinham sido absorvidos e os estudiosos, insatisfeitos por olhar de volta para a Antiguidade, estavam preparados para ir além do conhecimento matemático possuído pelos gregos.

Nicolau Copérnico (1473-1543), foi um astrônomo e matemático polonês que desenvolveu a teoria heliocêntrica do Sistema Solar. Foi também cônego da Igreja Católica, governador e administrador, jurista, astrólogo e médico. Contestador da teoria geocêntrica que considerava a Terra como centro do sistema solar, contrariava a autoridade de Aristóteles que garantia que a Terra e o homem eram o centro do Universo. Sua teoria, o heliocentrismo, é considerada uma das mais importantes hipóteses científicas de todos os tempos, tendo constituído o ponto de partida da astronomia moderna.

Tycho Brahe (1546-1601) foi um astrônomo dinamarquês que também estudou alquimia e astrologia. Continuou o trabalho iniciado por Copérnico. Ele construiu um observatório astronômico em uma ilha nas proximidades de Copenhagen com o apoio do rei da Dinamarca. Brahe registrou cuidadosamente mais de vinte anos de observações astronômicas precisas. Após seu trabalho de observação, tornou-se matemático do Império, em Praga. Kepler era seu assistente. Brahe acreditava que suas informações comprovariam sua crença de que a Terra era o centro do Universo. Mais tarde, Kepler utilizou as informações para deduzir suas leis planetárias e provar que o Sol era o centro do Universo.

Galileu Galilei nasceu em Pisa no dia 15 de fevereiro de 1564 e morreu em Florença, no dia 8 de janeiro de 1642. Galileu foi físico, matemático, astrônomo e filósofo italiano que teve um papel preponderante na chamada revolução científica.

Ele desenvolveu os primeiros estudos sistemáticos do movimento uniformemente acelerado e do movimento do pêndulo. Descobriu a lei dos corpos e enunciou o princípio da inércia e o conceito de referencial inercial, ideias precursoras da mecânica newtoniana. Galileu melhorou significativamente o telescópio refrator e terá sido o primeiro a utilizá–lo para fazer observações astronômicas. Com esse telescópio, ele descobriu as manchas solares, as montanhas da Lua, as fases de Vênus, quatro dos satélites de Júpiter, os anéis de Saturno e as estrelas da Via Láctea. Estas descobertas contribuíram decisivamente na defesa do heliocentrismo. Contudo, a principal contribuição de Galileu foi para o método científico, pois até então a ciência se assentava numa metodologia aristotélica.

Desenvolveu ainda vários instrumentos como a balança hidrostática, um tipo de compasso geométrico que permitia medir ângulos e áreas, o termômetro de Galileu e o precursor do relógio de pêndulo. O método empírico, defendido por Galileu, constituiu–se como um corte com o método aristotélico mais abstrato, utilizado nessa época. Devido a isso Galileu é considerado como o "pai da ciência moderna". Com suas descobertas, enfrentou vários problemas com a Igreja que o repudiava e que o fez renegar tudo o que afirmava. Isso foi chamado de Inquisição. Galileu, através de suas observações com seu telescópio, confirmou a teoria de Copérnico dos corpos pequenos girando em torno de outros maiores, contestando a teoria geocêntrica.

Observando a história, pode parecer que Galileu tinha um certo ciúme de seu contemporâneo Johann Kepler pois, embora este tivesse anunciado suas três importantes leis do movimento planetário, em cerca de 1619, essas leis foram completamente ignoradas por Galileu.

Galileu foi, por toda vida, um homem religioso e um católico devoto. Consequentemente, angustiava-o notar que pontos de vista a que chegava irresistivelmente por suas observações e seus raciocínios como cientista eram condenados por contrariar as escrituras da igreja, da qual ele se considerava um membro fiel. Por conseguinte, sentia–se compelido a conceber ao seu modo as relações entre a ciência e as escrituras sagradas.

Segundo Eves (2004, p.356-357), **Johann Kepler** nasceu em 1571, perto da cidade de Stuttgart e estudou na Universidade de Tübingen. Sua intenção inicial era a de tornar-se ministro luterano, mas um profundo interesse pela astronomia levou–o a mudar seus planos. Em 1594 aceitou uma cadeira na Universidade de Grätz, na Áustria. Cinco anos mais tarde tornou–se assistente do famoso, mas briguento, astrônomo dinamarquês-sueco Tycho Brahe que havia se mudado para Praga, como astrônomo da corte do rei Rodolfo II. Em 1601 Brahe faleceu subitamente e Kepler herdou, além do posto de seu mestre, sua vasta e muito acurada coleção de dados astronômicos sobre o movimento dos planetas.

Diz-se, muitas vezes, que quase todo problema pode ser resolvido mantendo–se para com ele uma preocupação constante e trabalhando-se nele um tempo suficientemente longo. Se, como dizia Thomas Edison, uma invenção depende um por cento de inspiração e noventa e nove por cento de transpiração, resolver um problema depende um por cento de imaginação e noventa e nove por cento de perseverança. Talvez, em nenhum lugar da história da matemática, se demonstre isso mais claramente do que na incrível persistência de Kepler, ao resolver o problema do movimento dos planetas em torno do Sol. Inteiramente convencido da teoria copernicana de que os planetas descrevem órbitas em torno do Sol, Kepler procurou, de maneira infatigável, determinar a natureza e a posição dessas órbitas e de como elas são percorridas pelos planetas. Depois de muitas tentativas, feitas quando seus poucos dados eram complementados pela imaginação, Kepler herdou a massa enorme de observações muito acuradas feitas por Tycho Brahe sobre o movimento dos planetas. O problema tornou-se então o seguinte: obter um modelo do movimento dos planetas que se ajustasse exatamente a esse grande conjunto de observações. Tão seguros eram os registros de Brahe, que qualquer solução que diferisse das posições observadas por ele, mesmo por um quarto de diâmetro aparente da Lua, deveria ser descartada como incorreta. Kepler precisava, então, primeiro descobrir com a *imaginação* alguma solução plausível e, a seguir, com laboriosa *perseverança*, empenhar–se em um sem número de cálculos tediosos para confirmar ou rejeitar sua suposição. Ele fez centenas de tentativas infrutíferas e preencheu resmas e resmas de papel com cálculos num trabalho efetuado, com zelo e paciência constantes, durante vinte e um anos. Por fim, em 1609, viu–se em condições de formular suas duas primeiras leis do movimento planetário e, dez anos depois, em 1619, a terceira.

Eves (2004, p.357), continua dizendo que essas leis são marcos fundamentais da história da astronomia e da matemática. Pois, num esforço para justificá-las, Isaac Newton foi levado a criar a mecânica celeste moderna. Essas leis são:

1ª. *Os planetas movem-se em torno do Sol em trajetórias elípticas, com o Sol num dos focos;*

2ª. *O raio vetor que liga um planeta ao Sol varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais;*

3ª. *O quadrado do tempo para que um planeta complete sua revolução orbital é diretamente proporcional ao cubo do semieixo maior da órbita.*

A descoberta empírica dessas leis, a partir da massa de dados de Brahe, constituiu-se num dos mais notáveis trabalhos de indução jamais feitos na ciência.

Em Eves (2004, p.358), lê-se que Kepler foi um dos precursores do Cálculo. Para calcular as áreas envolvidas em sua segunda lei dos movimentos planetários, teve de recorrer a uma forma tosca de Cálculo Integral. Também, em seu *Stereometria doliorum vinorum* (Geometria Sólida dos Barris de Vinho, 1615) aplicou processos de integração toscos para achar os volumes de noventa e três sólidos obtidos pela rotação de segmentos de secções cônicas em torno de um eixo de seu plano. Dentre esses estavam o toro e dois sólidos que ele chamou de a *maçã* e o *limão*; estes dois últimos ele obtinha fazendo girar um arco maior e um arco menor, respectivamente, de uma circunferência em torno da corda do arco, tomada como eixo. Kepler interessou-se por essa questão ao observar alguns dos precários métodos de calcular volumes de barris de vinho usados em seu tempo. É bem possível que esse trabalho de Kepler tenha influenciado Cavalieri, que deu um passo à frente no cálculo infinitesimal com seu *método dos indivisíveis*.

2.7 – O movimento e a compreensão do movimento

Segundo Caraça (2003, p.202) pode–se encontrar que os argumentos de Zenão tradicionalmente são designados por “argumentos contra o movimento” mas poderiam ser mais bem designados, por “contra a compreensão do movimento”.

Qualquer que tenha sido o objetivo efetivo e inicial de Zenão, sua argumentação ficou na História da Ciência com um valor inestimável: mostrar que o movimento não pode ser compreendido como uma sucessão de estados particulares, pois isso equivale a abordar o seu estudo por um método estático que traz consigo o gérmen da infecundidade e da incompreensão.

Na verdade, a essência do movimento é tal que, quando queremos fixar a posição de um móvel, em determinado instante, num ponto de sua trajetória, ele já não está mais aí, isto é, entre dois instantes por mais aproximados que sejam um do outro, o móvel percorreu um segmento com uma infinidade de pontos. Tudo isso é inabordável pelo método estático que considera o movimento como uma sucessão de posições do móvel.

2.8 – Novos tempos, novos problemas, novas atitudes

Novamente, consultando Caraça, vemo-nos diante de um dilema: ou renunciamos a compreender o movimento, a integrá–lo num quadro racional interpretativo dos fenômenos naturais ou temos que ir para o seu estudo numa atitude de espírito diferente. Ir para o seu estudo significa procurar obter uma teoria quantitativa da qual possam resultar métodos de cálculo que nos permitam fazer previsões, sujeitas ao teste da Experiência e da Observação.

Cada época tem seus problemas dominantes. A partir do século XVI, a Técnica pôs problemas para cuja resolução tornou-se indispensável a criação de uma Teoria Quantitativa. Um desses problemas, sem dúvida um dos mais importantes, foi o dos estudos dos movimentos dos astros, tornado indispensável pelas necessidades da navegação em alto mar. Foi preciso, para esse efeito, efetuar um duplo trabalho: realizar uma grande massa de observações; procurar integrar esses dados num quadro interpretativo racional, ou seja, um conjunto de Leis.

Caraça (2003, p.204), diz que a obra de Kepler representa um grande marco na História da Ciência, e pode–se dizer que marca o início palpável de uma grande virada na atitude dos pensadores. Posteriormente à grande crise por que passara, a mentalidade grega encerrou–se numa atitude finitista de que encontramos uma das manifestações mais acentuadas na Cosmogonia (corpo de doutrinas ou princípios que se ocupa em explicar a origem, o princípio do Universo) que ficou sendo geralmente aceita – um mundo finito, geocêntrico, formado por uma sucessão de esferas centradas na Terra, esferas nas quais todos os astros se deslocavam em movimentos circulares.

Kepler, estabelecendo em 1609 sua primeira lei – as órbitas planetárias são elipses das quais o Sol ocupa um dos focos – deu a primeira machadada na supremacia do círculo que, assim, se viu demitido da situação proeminente de lugar do movimento natural. Desse modo, como consequência desse fato, uma pergunta se colocou no espírito dos pensadores: qual é a força responsável pelo fato de os planetas se moverem em órbitas elípticas? Essa pergunta não se colocava enquanto os planetas eram considerados como se movendo por meio de um movimento natural. Assim se instalou, no primeiro plano das preocupações dos pensadores, esse problema da causa física do movimento. Este problema e sua importância mostram-se como uma determinada atitude científica.

Para abordar o estudo desse problema, em condições que permitam êxito, é preciso tomar uma atitude de espírito: o movimento é um *dado* e não uma coisa *a explicar*, um fenômeno que trata de estudar em suas manifestações observadas fisicamente e não metafisicamente. O objetivo é encontrar uma lei ou um conjunto de leis que, englobando os dados observados, permitam prever resultados a confirmar ou não pela experiência.

Para tentar resolver esse problema sente-se a necessidade de um novo conceito.

Segundo Caraça (2003, p.205), é necessário que se vá para o estudo do problema do movimento nessa nova atitude de espírito, livres de preconceitos, dispostos a aceitar todas as consequências e a tomar todas as audácias que a emergência requer.

O que isso quer dizer? Que não se pode obter resultados em qualquer instante ou ponto se o tomarmos em si, isolados dos outros pontos; que o que se passa, num instante e num ponto, só pode ser entendido integrado na sua interdependência com o que se passa em instantes e pontos que o precedem e o seguem. Mas este proceder e seguir têm aqui o caráter sutil de que não há ponto que preceda ou siga imediatamente outro – entre os dois, por mais próximos que sejam, há uma infinidade de pontos. Logo há uma infinidade de possibilidades que contam na interdependência. A condição primeira do êxito é precisamente que isso não aconteça! Que fazer? Só um novo conceito.

Esse conceito deve ser de tal natureza a permitir que se dê conta da infinidade de estados possíveis entre dois estados quaisquer; e de natureza a nos permitir trabalhar não só com estados determinados, mas com a infinidade das possibilidades entre dois estados. Assim, ele não pode ser um número. Mas pode representar qualquer dos números de um conjunto numérico conveniente. Portanto o novo instrumento matemático deve ser uma ***variável***. Por outro lado, como esse instrumento vai ser aplicado ao estudo do que se passa num ponto em interdependência com pontos arbitrariamente próximos, essa variável deve ter, no seu domínio, números arbitrariamente pequenos em módulo. Isso nos leva à definição de infinitésimo e do conceito de limite.

Também Caraça (2003, p.207), quando fala em Infinitésimos e vizinhanças, pode-se ler que uma vizinhança não é o segmento, mas sim uma variável cujo domínio é constituído por uma infinidade de segmentos onde há sempre segmentos de amplitude inferior a qualquer número positivo.

O conceito geométrico de vizinhança corresponde portanto ao conceito analítico de infinitésimo e, por meio deste, podemos estudar o que se passa na vizinhança dos pontos, isto é, ver como “joga”, no fenômeno a estudar, a interdependência de um ponto com os seus vizinhos.

Estamos portanto de posse do instrumento próprio ao fim em vista. Resta agora afiná-lo, de modo a tirar dele o maior rendimento. Esse instrumento há de nos aparecer muitas vezes daqui em diante e sob várias formas. Ressaltamos que *um infinitésimo não é um número, é uma variável*. A falta de compreensão deste fato foi origem, durante muito tempo, de enormes discussões e muita confusão.

Falando agora sobre a noção de Limite, reconhecemos que era necessário criar um novo conceito. Baseados diretamente sobre esse conceito, pode-se estabelecer agora o conceito de limite e diz–se: a_n tem por limite L se a_n é vizinho de L quando n é vizinho de infinito. Isto significa que L é, para a sucessão a_n, o resultado da interdependência de seus termos.

Isso nos leva imediatamente a um problema: quando existe esse limite? Então, pode não existir? O jogo da interdependência de estados vizinhos pode não levar a nada?

Em Eves (2004, p.425) encontramos Bonaventura Francesco **Cavalieri** que nasceu em Milão em 1598, tornou-se jesuado (não jesuíta como muitas vezes se afirma erradamente) aos quinze anos de idade. Foi aluno de Galileu e atuou como professor de matemática na Universidade de Bolonha de 1629 até 1647, ano de sua morte. Deixou uma obra vasta abrangendo matemática, óptica e astronomia. Em grande parte foi o responsável pela introdução dos logaritmos na Europa. Tudo isso fez dele um matemático muito influente. Mas a obra que mais o projetou, aliás sua grande contribuição à matemática, é o tratado *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*, publicado em sua versão inicial no ano de 1635. Nesse trabalho ele apresenta seu Método dos Indivisíveis, cujas raízes remontam a Demócrito (460-370 a.C.) e Arquimedes (287-212 a.C), mas cuja motivação direta talvez se encontre nas tentativas de Kepler de achar certas áreas e certos volumes.

Boyer (1974, p.241) diz que o argumento em que se baseia esse livro é essencialmente o sugerido por Oresme, Kepler e Galileu – que uma área pode ser pensada como sendo formada de segmentos ou “indivisíveis” e que o volume pode ser considerado como composto de áreas que são volumes indivisíveis ou quase-atômicos. Embora Cavalieri na época dificilmente pudesse tê-lo percebido, ele seguia pegadas realmente muito respeitáveis, pois esse é exatamente o tipo de raciocínio que Arquimedes usou em *O método*, então perdido. Mas Cavalieri, ao contrário de Arquimedes, não hesitava perante as deficiências lógicas nas bases de tais processos. O estilo geral e a especiosa plausibilidade do Método dos Indivisíveis são bem ilustrados pela proposição ainda conhecida, em muitos livros de geometria no espaço, como o “Teorema de Cavalieri” ou ainda “Princípio de Cavalieri”.

> Se dois sólidos têm alturas iguais e se secções, feitas por planos paralelos às bases e a distâncias iguais dessas, estão sempre numa razão, então os volumes dos sólidos estão também nessa razão.

Cavalieri evidentemente tinha desenvolvido esse método por volta de 1626 pois, nesse ano, ele escreveu a Galileu que ia publicar um livro sobre o assunto. O próprio Galileu tinha projetado escrever um livro sobre o infinito e, talvez, Cavalieri tenha retardado a publicação de seu próprio trabalho por deferência a Galileu.

Porém o livro de Galileu sem dúvida teria sido mais filosófico e especulativo, com ênfase na natureza do infinitamente grande e pequeno, tema que Cavalieri evitou. Em vez disso, Cavalieri se concentrou num teorema geométrico extremamente útil, equivalente à afirmação atual $\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$

Ainda, na página 426, Eves (2004) afirma que os princípios de Cavalieri representam ferramentas poderosas para o cálculo de áreas e volumes e, ademais, sua base intuitiva pode facilmente tornar-se rigorosa com o cálculo integral moderno. Com a aceitação desses princípios como evidentes, intuitivamente podem-se resolver muitos problemas de mensuração que normalmente requereriam técnicas avançadas de cálculo.

2.9 – O Mundo Mecânico: Descartes e Newton – O alvorecer da Matemática Moderna. O século XVII e a expansão do conhecimento

A Matemática da Renascença tinha adicionado pouco à geometria dos antigos gregos, mas o ano de 1600 prenunciava um reavivamento inesperado no assunto. Enquanto Fermat e Descartes estavam assentando os fundamentos de uma geometria coordenada, dois outros matemáticos, Pascal e Desargues estavam apresentando um serviço semelhante na área da geometria projetiva sintética. Mas não foi somente nos desenvolvimentos da geometria que o século XVII tornou–se ilustre na história da matemática, pois as atividades dos matemáticos, nesse período, se estenderam para muitos campos, novos e velhos.

Em Burton (2007, p.339) lemos que a Renascença que, por volta do século XVI, estava em andamento na Itália, logo se esparramou para o norte e para o oeste. Primeiro para Alemanha, depois para a França e para os Países Baixos e finalmente para a Inglaterra. No fim dos anos 1600, uma liderança científica, tecnológica e econômica centrava–se no Canal Inglês, naqueles países que tinham sido galvanizados pelo comércio que surgira a partir das grandes viagens de descoberta. No começo, o estabelecimento ou revitalização foi principalmente literário, mas, gradualmente, os estudiosos começaram a pôr menos atenção àquilo que estava escrito nos livros antigos e colocar mais confiança sobre as suas próprias observações. A época estava caracterizada por uma “fome” de experimentos e acima de tudo por determinar como as coisas aconteciam. Podia-se dizer que a ciência do século XVII havia começado com o aparecimento de *De Magneti* de William Gilbert em 1600, o primeiro tratado sobre ciência física cujo conteúdo estava baseado inteiramente na experimentação; e a culminação teria sido com a *Opticks* de Isaac Newton, em 1704. Entre o *De Magneti* e o *Opticks* vinham as contribuições de Kepler, que estava convencido de que os corpos planetários moviam-se não em círculos ideais de Aristóteles, mas em órbitas elípticas, e ele então formulou as leis do movimento terrestre em 1619. Além disso, também havia as demonstrações de William Harvey, 1628, da rota circulatória do sangue a partir do coração através das artérias e veias por meio dos pulmões.

Enquanto a Renascença marcava uma volta aos conceitos clássicos, o século XVII estabelecia a matemática sobre fundamentos inteiramente novos.

Para os matemáticos, o século XVII foi o século do surgimento do Cálculo. Embora normalmente se atribua a invenção do Cálculo a dois brilhantes contemporâneos, Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716), grandes avanços em matemática são raramente produtos de trabalhos individuais. Cavalieri, Torricelli, Barrow, Descartes, Fermat e Wallis tinham todos pavimentado o caminho para o limiar, mas tinham hesitado quando deviam cruzá-lo. Na segunda metade do século XVII, as matérias primas estavam em mãos leigas e fora das quais o Cálculo emergiria. Tudo o que restou era que um Leibniz ou um Newton fundisse essas ideias em uma tremenda síntese.

Para Burton (2007, p.340), em 1637 a comunidade matemática francesa testemunhou uma daquelas estranhas coincidências, um pensamento raro mas que na História da Ciência tem–se mostrado frequente. Dois homens, Pierre de Fermat e René Descartes, simultaneamente uniram álgebra e geometria para produzir uma inovação notável, a geometria analítica. Entre outros, não menos importantes, foram os estudos de Galileu, Descartes, Torricelli e Newton que transformaram a mecânica numa ciência exata durante os dois séculos seguintes.

René **Descartes** (1596-1650), um aristocrata francês, era filho de um oficial do governo. Graduou–se em Direito na Universidade de Poitiers aos 20 anos. Após experimentar brevemente os prazeres de Paris, tornou-se um engenheiro militar, primeiro para o Príncipe de Nassau, holandês, e depois para o Duque de Bavária, alemão. Foi durante o seu serviço como soldado que Descartes começou a dedicar–se seriamente à matemática e a desenvolver a sua geometria analítica. Após as guerras, ele retornou a Paris, onde se exibia excentricamente com uma espada na cintura e um chapéu emplumado. Ele vivia despreocupadamente, raramente levantando-se antes das 11h da manhã e dedicando–se amadoristicamente à fisiologia humana, à filosofia, às geleiras, aos meteoros e aos arco-íris. Posteriormente, mudou-se para a Holanda, onde publicou o seu Discurso sobre o Método, e finalmente para a Suécia, onde morreu, enquanto trabalhava como professor particular da Rainha Cristina.

Nosso sistema de coordenadas retangulares é chamado de sistema de coordenadas cartesiano em homenagem ao matemático René Descartes, embora um outro francês, Pierre de Fermat, tenha inventado os princípios da geometria analítica ao mesmo tempo que Descartes. O plano fornecido por esse sistema de coordenadas, denominado plano coordenado ou cartesiano, é denotado por R^2. As palavras coordenadas, abscissa e ordenada, no sentido técnico que têm hoje, foram contribuições de Leibniz em 1692.

Anton (2000, p.352) relata sobre Pierre de **Fermat** (1601-1665) como filho de um bem-sucedido comerciante de couros francês. Era um advogado que praticava a matemática como passatempo. Recebeu o grau de Bacharel em Direito Civil da Universidade de Orleans, em 1631, e, posteriormente, ocupou várias posições governamentais, inclusive um posto de consultor do parlamento de Toulouse. Embora aparentemente bem-sucedido, documentos confidenciais da época indicam que o seu desempenho oficial como advogado foi fraco, talvez devido ao grande tempo dedicado à matemática. Através de sua vida, não poupou esforços para publicar os seus resultados matemáticos. Ele tinha o infeliz hábito de rabiscar seus trabalhos nas margens de livros e, frequentemente, enviava os resultados para os amigos sem manter uma cópia para si. Como consequência, nunca lhe foi dado o crédito por muitas de suas maiores realizações, até que o seu nome saiu da obscuridade na metade do século XIX. Sabe-se agora que Fermat, simultânea e independentemente de Descartes, desenvolveu a geometria analítica. Infelizmente, Descartes e Fermat discutiram asperamente vários problemas, sem que tenha havido qualquer cooperação real entre os dois gênios.

Fermat resolveu muitos problemas fundamentais do Cálculo. Ele obteve o primeiro procedimento para diferenciar polinômios e resolveu muitos problemas importantes de maximização, de minimização, de área e de tangência. Seu trabalho serviu de inspiração a Isaac Newton.

Segundo Simmons (1987, p.695), Fermat inventou a Geometria Analítica em 1629 e descreveu suas ideias num pequeno trabalho com o título *Introduction to Plane and Solid Loci* (Introdução aos lugares geométricos planos e sólidos), que circulou sob forma de manuscrito desde 1637, mas que não foi publicado por Fermat em vida. O crédito dessa descoberta é usualmente dado a Descartes, baseado em seu trabalho *La Géométrie* que foi publicado, no fim de 1637, como apêndice de seu famoso *Discours de la Méthode.*

Evangelista **Torricelli**, (1608-1647), nasceu em Faenza na Itália. Frequentou a Universidade de Roma e foi assistente de Galileu, sucedendo-o como matemático do grão-duque da Toscânia. Ele aplicou a matemática ao jato do fluido e ao movimento dos projéteis. Desenvolveu métodos semelhantes ao Cálculo para calcular o comprimento do arco e encontrar os infinitesimais. Ele também fez telescópios e microscópios projetando lentes finas.

John **Wallis,** (1616-1703), nasceu na Inglaterra e estudou no Emmanuel College de Cambridge. Foi um prodígio e, ainda menino, podia calcular números de cabeça com precisão e velocidade impressionantes. Durante a guerra civil inglesa foi um criptógrafo bem-sucedido e valioso para seu exército. Decifrava os códigos dos inimigos e encriptava as mensagens para seu próprio exército. Mais tarde, tornou–se ministro e bispo da igreja, antes de ser nomeado professor "savileano" (da cátedra fundada por Henry Saville) de geometria em Oxford. Em 1655 publicou Arithmetica *infinitorum*, uma obra importantíssima para o desenvolvimento do cálculo. Seu livro sobre cônicas, *Tractatus de sectionibis conicis*, foi publicado em 1656 e foi o primeiro a generalizar as cônicas como curvas do segundo grau. Sua obra *Algebra: history and practice* foi a primeira a apresentar graficamente raízes complexas de equações do quarto grau.

Blaise **Pascal,** (1623-1662), nasceu na França e foi encorajado pelo pai a estudar ciências. Encontrou Fermat e começou a trabalhar nos problemas de ciências aplicadas. Já, em 1640, escreveu um ensaio sobre seções cônicas e Descartes elogiou seu trabalho. Mesmo não gozando de boa saúde, Pascal projetou uma "máquina aritmética" para ajudar o pai na arrecadação de impostos. Completou o primeiro modelo em 1642 e construiu mais cinquenta versões no decorrer da década seguinte. A máquina era uma pequena caixa com oito dígitos, cada um engrenado a um tambor que mostrava os dígitos em uma janela.

Pascal também contribuiu para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial. Mais tarde, interessou-se pela física de fluidos sob pressão e outros componentes e conceitos de hidrostática. Após sua pouca saúde afetar suas realizações no campo da ciência, ele se interessou por jogos de azar. Isso fez com que estudasse probabilidade e suas contribuições para os fundamentos do cálculo da probabilidade. A saúde debilitada e o interesse pelos assuntos religiosos fizeram com que ele não pudesse se dedicar por completo à matemática. No entanto, continuou produzindo resultados importantes no campo da geometria e da álgebra.

Christiaan **Huygens,** (1629-1695), nasceu em Haia, na Holanda. Huygens estudou matemática na Universidade de Leiden. De família próspera, pôde realizar suas pesquisas matemáticas sem apoio adicional ou salário. Viajou pela Europa e fixou residência em Paris de 1666 a 1680. Seguidor de Descartes, publicou importantes resultados geométricos em *Theoremata de quadratura hyperboles*, *ellipses et circuli* e *De circuli magnitudine inventa* (1654). Mais tarde, estudou probabilidade e publicou *Tractatus de ratiociniis in aleae ludo* (1657). O físico holandês Huygens – criador da teoria ondulatória da luz e do relógio de pêndulo – tornou–se amigo de Leibniz e seu mentor matemático durante os anos em que Leibniz esteve em Paris.

Huygens abordou o problema de que um relógio de pêndulo, cujo prumo faz um movimento de arco circular, tem uma frequência de movimento que depende da amplitude do movimento. Quanto mais amplo o movimento, mais tempo é necessário para que o prumo retorne ao centro. Isso não acontece se o prumo for construído para fazer um movimento cicloidal. Em 1673, movido por uma necessidade de realizar determinações precisas da longitude, no mar, Huygens projetou um relógio de pêndulo que seguia esse movimento. O prumo foi preso por um arame fino, restrito por proteções que faziam com que subisse conforme se movimentava. Porém, sua mais notável contribuição foi a da teoria ondulatória da luz. Seu trabalho de óptica o auxiliou na astronomia, com um telescópio mais potente. Foi usando esse telescópio, mais novo e melhor, que Huygens descobriu os anéis de Saturno, que não podiam ser distinguidos por meio dos demais telescópios até então existentes.

Isaac **Barrow,** (1630-1677), nasceu em Londres e estudou no Trinity College, em Cambridge. Graduou-se em 1649 e, em 1652, tornou-se palestrante da universidade. Durante sua época, a tradução que fez da obra de Euclides tornou-se muito popular. Barrow deixou a Inglaterra por cinco anos, viajando pela Europa e pela Ásia. Durante suas viagens, seu interesse pela matemática aumentou. Quando voltou à Inglaterra, tornou-se professor de geometria e mais tarde o primeiro professor "lucasiano" (da cátedra fundada por Henry Lucas) de matemática em Cambridge.

Barrow ficou conhecido por combinar trabalhos de outros, como Descartes, Wallis e Gregory, e por unificar ideias e resultados matemáticos. Ele aplicou com êxito sua geometria e seu cálculo à óptica, embora seus trabalhos nessa área sejam menores quando comparados com a obra de Newton. Em 1669, Barrow renunciou à cátedra de professor lucasiano, cedendo-a a Newton.

2.10 – Newton e Leibniz

Segundo Stewart (2001, p.105), Isaac **Newton** nasceu no dia de Natal de 1642, ano da morte de Galileu. Enquanto estudante ele não mostrava saber muita matemática. Quando entrou para a Universidade de Cambridge, em 1661, aprendeu-a rapidamente lendo Euclides e Descartes e assistindo às aulas de Isaac Barrow. Cambridge esteve fechada, por causa da peste em 1665 e 1666, quando Newton retornou a sua casa para refletir sobre o que havia aprendido. Esses dois anos foram de incrível produtividade. Foi nesse período que Newton fez quatro dentre suas maiores descobertas: (1) sua representação de funções como somas de séries infinitas, inclusive o teorema binomial; (2) seu trabalho sobre o cálculo integral e diferencial; (3) suas leis do movimento e a lei da gravitação universal; e (4) seus experimentos com prismas sobre a natureza da luz e da cor. Receando controvérsias e críticas, Newton relutou quanto a publicar suas descobertas, e não o fez até 1687, quando, pressionado pelo astrônomo Halley, publicou os *Principia Mathematica*. Nesse trabalho, o maior tratado científico feito até então, Newton tornou pública sua versão do Cálculo e usou-o para pesquisar mecânica, dinâmica dos fluidos e movimentos das ondas, e para explicar o movimento dos planetas e cometas.

Os princípios do Cálculo são encontrados na forma de determinar as áreas e volumes por eruditos da Grécia antiga, tais como Eudoxo e Arquimedes. Embora aspectos da ideia de limites estejam implícitos em seu "método de exaustão", Eudoxo e Arquimedes nunca formularam explicitamente o conceito de limite. Da mesma forma, matemáticos como Cavalieri, Fermat e Barrow, precursores imediatos de Newton no desenvolvimento do Cálculo, realmente não usaram limites. Foi Isaac Newton o primeiro a falar explicitamente sobre limites. Ele explicou que a ideia principal por trás dos limites é que quantidades *ficam mais próximas do que qualquer diferença dada.* Newton estabeleceu que o limite era o conceito básico no Cálculo, mas que foi deixado para matemáticos posteriores, como Cauchy, tornar claras suas ideias sobre limites.

Como já dissemos, Isaac Newton nasceu no ano da morte de Galileu e, para muitos historiadores da ciência, ele é visto como um herdeiro natural desse italiano. Sem dúvida, embora excepcionalmente pessoas brilhantes como Newton e Galileu têm aparecido em diferentes pontos da história e precipitado mudanças massivas na compreensão humana, eles, todos eles, encontraram inspiração e guia em seus predecessores. Newton, de fato, não foi exceção a essa regra pois ele construiu seus próprios modelos sobre uma herança rica de raciocínio filosófico, desde o trabalho de Arquimedes e Aristóteles até Copérnico, Kepler e Galileu.

Michael White, em seu livro *Coffee with Isaac Newton* de 2008, numa *conversa imaginativa*[3], perguntou a Newton: como era o conhecimento científico na época em que você entrou em Cambridge? Newton respondeu que era uma pergunta difícil mas que podia resumi-la assim: Galileu tinha mostrado que a Terra não era o centro do Universo, mas orbitava o Sol como qualquer outro planeta. Kepler tinha mostrado que essas órbitas eram elípticas. Seis planetas eram observáveis como também os satélites de Júpiter. Crateras tinham sido observadas na Lua. Muitas das descobertas de Galileu não precisaram das ideias de Aristóteles, que haviam sido filtradas para nós como sabedoria aceita por dois milênios. Galileu tinha mostrado que havia uma força agindo na queda de corpos que os empurrava para a Terra numa certa velocidade, mesmo ele não tendo noção da lei para descrever essa observação. Assim, eu nasci numa época madura para a descoberta e com boa sorte de ter os fundamentos deixados por alguns homens notáveis que me precederam.

Esse entrevistador, insistindo em saber quem seria para Newton o maior inspirador de mestres, Newton teria dito que se ele fosse forçado a oferecer uma opinião sobre isso, ele teria que colocar Arquimedes no pináculo da realização humana em Matemática e Filosofia Natural, e colocaria o nome de Galileu como o mais brilhante dos anos recentes àquela época. Perguntado por Arquimedes, ele teria respondido que Arquimedes foi um talento único. Arquimedes tinha uma compreensão inata, natural e sem esforço para entender o modo como o Universo opera e, mais crucialmente, ele podia interpretar este método de operação na forma de matemática pura. Ele criou uma forma de Cálculo que chamou de “O Método da Exaustão”, alguns dois mil anos antes que eu tivesse nascido e o aplicou a uma gama de problemas. Arquimedes também calculou uma aproximação de π. Criou um método de determinar valores precisos para raiz quadrada de grandes inteiros e um sistema original para expressar números grandes. A respeito de Galileu, Newton lhe teria dito que tudo que se pensa sobre Galileu é de fato ofuscado pelo seu julgamento antes da inquisição romana. Se olharmos objetivamente para o corpo de

[3] Uma entrevista puramente fictícia enquanto apresenta uma sólida base nos fatos biográficos onde esse autor toma o lugar de um Newton fictício e de um entrevistador imaginário. Nesse momento, ao invés de nos remetermos ao passado através da entrevista, disse ele: tomamos a liberdade de trazer o passado para o presente.

trabalho de Galileu, é claro que ele estava muito à frente de seu tempo e ofereceu ao mundo essenciais resultados. Galileu foi considerado por Newton o “Pai” da Ciência Experimental. Ele foi o primeiro a criar um sistema científico – a ideia de que um cientista deveria fazer uma observação, depois formular um modelo matemático para expressá-lo e, finalmente, criar uma regra geral que pudesse ser aplicada a uma gama de observações intimamente relacionadas à primeira.

Gottfried Wilhelm **Leibniz** nasceu em Leipzig em 1646. Eves (2004, p.442) afirma que aos doze anos de idade, Leibniz já dominava todo o conhecimento corrente de matemática, filosofia, teologia e leis contido em publicações em textos da época, graduando–se, na universidade de Leipzig aos 17 anos. Após obter doutorado em Direito aos 20 anos, Leibniz entrou para o serviço diplomático, passando a maior parte de sua vida viajando pelas capitais européias em missões políticas. Quando em missão diplomática em Paris, construiu uma máquina de calcular e encontrou cientistas, entre eles Huygens, que dirigiram sua atenção para os últimos desenvolvimentos da matemática e da ciência. Só a partir de 1672, Leibniz começou a se dedicar seriamente à matemática.

No ano seguinte, 1673, Leibniz foi enviado em missão política a Londres, onde travou relação com Oldenburg e outros, tendo oportunidade de exibir à Royal Society a máquina de calcular que inventara. Leibniz procurou desenvolver uma lógica simbólica e um sistema de notação que simplificariam o raciocínio lógico. Em particular, a versão do cálculo, publicada por ele em 1684, estabeleceu a notação e as regras para encontrar derivadas usadas até hoje.

Em Eves (2004, p.443) lemos que Leibniz tinha uma sensibilidade muito grande para a forma matemática e discernia com clareza as potencialidades de um simbolismo bem engendrado. Sua notação para o cálculo mostrou–se muito feliz e, inquestionavelmente, é mais conveniente e flexível do que a de Newton. Assim diz Simmons (1987, p.724), juntamente com o conteúdo real de seu trabalho, Leibniz foi um dos grandes inventores de símbolos matemáticos. Poucas pessoas entenderam tão bem que uma notação realmente boa facilita o caminho e é quase capaz de pensar por nós. Ele escreveu sobre isto a seu amigo Tschirnhaus:

> Nos símbolos observa–se uma vantagem na descoberta que é maior quando eles expressam brevemente a natureza exata da coisa e como se a figurasse; então o trabalho do pensamento é maravilhosamente diminuído. (LEIBNIZ, apud SIMMONS, 1987, p. 724)

Sua notação flexível e sugestiva do Cálculo, dx, dy, $\frac{dy}{dx}$ e $\int ydx$, são ilustrações perfeitas dessa observação e estão ainda em uso, como ocorre com as suas frases descritivas “calculus differentialis” e “calculus integralis” – Leibniz sugeriu primeiro “calculus summatorius” mas, em 1696, ele e John Bernoulli concordaram com “calculus integralis”. Foi principalmente por influência de Leibniz que o símbolo “ = ” é usado universalmente e ele advogou o uso do ponto ($\cdot$) em vez da cruz ($\times$) para a multiplicação. Os dois-pontos para a divisão ($x : y$ para x/y) e seus símbolos de congruência e semelhança ($\cong$ e $\sim$) ainda são amplamente usados. Ele introduziu os termos “constante”, “variável”, “parâmetro” e “transcendente” (no sentido de “não-algébrico”), assim como “abscissa” e “ordenada”, ditas “coordenadas”. Também foi o primeiro a usar a palavra “função”, essencialmente no seu sentido moderno.

Leibniz é às vezes criticado por não ter produzido nenhum grande trabalho que pudesse ser apontado e admirado, como o é *O Principia* de Newton. A primeira notícia publicada por Leibniz sobre seu Cálculo Diferencial foi num artigo de sete páginas no *Acta Eruditorum* de 1684, um jornal periódico europeu mais influente de seu tempo em Ciência e Matemática. Mas produziu tal obra, mesmo que não na forma de livro. A linha de descendência de todos os maiores matemáticos dos tempos modernos começou com ele e não com Newton e estende–se, em sucessão direta, até o século XX. Ele foi o pai intelectual dos Bernoulli. John Bernoulli foi professor de Euler, que adotou Lagrange como protegido científico. Então vieram Gauss, Riemann e outros, todos descendentes intelectuais diretos de Leibniz. Leibniz teve predecessores, é claro, como todo grande pensador. Mas, fora isso, foi o verdadeiro fundador da Matemática Moderna européia.

Eves (2004), na página 445, fecha seu comentário sobre Leibniz com uma espécie de hino ao seu talento único. A matemática se compõe de dois domínios amplos e aritméticos, o contínuo e o discreto; e, em toda a história da matemática, o único homem a transitar nesses dois domínios com soberbo desembaraço foi Leibniz.

Sabe-se que, infelizmente, surgiu uma disputa muito ferrenha de prioridades em 1690, entre os seguidores de Newton e os de Leibniz, sobre quem teria inventado primeiro o Cálculo.

Sergio Nobre, em 2000, em sua tese de livre-docência na página 55, afirma que o envio de correspondências comunicando resultados descobertos foi um importante meio de divulgação científica e foi muito usado. De posse de um novo resultado, o cientista enviava correspondências para diferentes colegas, como forma de que estes soubessem da nova descoberta. O envio simultâneo de correspondências para diferentes pessoas servia também para garantir que, individualmente, nenhuma delas pudesse alegar ser o detentor das ideias contidas nas cartas recebidas. Em alguns casos, a mensagem contida nessas correspondências era feita através de códigos, que somente o remetente tinha a chave de como decifrar. As correspondências enviadas por Isaac Newton foram um exemplo clássico, onde, através de anagramas Newton comunica a Leibniz suas descobertas relativas ao Cálculo Diferencial e Integral. Alguns historiadores dizem que seria mais fácil para Leibniz descobrir novos conceitos relativos ao Cálculo Diferencial e Integral do que decifrar os anagramas enviados por Newton.

Sergio Nobre (2000, p.23), escrevendo sobre a prioridade das descobertas de um determinado assunto científico, diz sobre a mais importante disputa travada nos meios acadêmicos no período da chamada Revolução Científica – a disputa travada entre Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) pela prioridade na descoberta do Cálculo Diferencial e Integral. Após ter sido acusado por Newton de ter plagiado suas ideias, Leibniz apelou para que a Royal Society of London realizasse o julgamento do caso. Newton, que era o presidente da entidade, indicou uma comissão composta por seus amigos e bons newtonianos para estudar o assunto. Ao final do processo, ele próprio escreveu o relatório ao processo instaurado. Nesse famoso relatório, intitulado *Commercium epistolicum de analysi promota*, Newton fez uma abordagem histórica acerca do assunto em questão com o intuito de chegar a um resultado conclusivo que, naturalmente, foi a seu favor.

A verdade é que cada um inventou independentemente o Cálculo. Newton chegou primeiro à sua versão do Cálculo, mas, por temer controvérsias não o publicou imediatamente. Assim a publicação do Cálculo de Leibniz em 1684 foi a primeira a aparecer.

Segundo Stewart (2001, p.117), após a invenção do Cálculo, no século XVII, seguiu-se um período de livre desenvolvimento do assunto no século XVIII. Matemáticos como os irmãos Bernoulli e Euler estavam ansiosos por explorar o poder do Cálculo, e exploraram audaciosamente as consequências dessa nova teoria matemática sem grandes preocupações com a veracidade e a correção de suas provas. O século XIX, ao contrário, foi a Época do Rigor na matemática. Houve um movimento de volta aos fundamentos do assunto para fornecer definições cuidadosas e provas rigorosas. Na linha de frente desse movimento estava o matemático francês Augustin–Louis **Cauchy** (1789-1857), que começou como engenheiro militar antes de se tornar professor de matemática em Paris. Cauchy partiu da ideia de limite de Newton, mantida viva no século XVIII pelo matemático francês Jean d'Alembert, e tornou-a mais precisa. Sua definição de limite tem a seguinte forma: *Quando valores sucessivos atribuídos a uma variável aproximam–se indefinidamente de um valor fixo, de tal forma que no final diferem dele por tão pouco quanto se queira, este último é chamado <u>limite</u> de todos os outros.* Mas quando Cauchy usava essa definição, em exemplos e provas, ele frequentemente empregava desigualdades delta-epsilon. Uma demonstração típica de Cauchy começa com: "Designando por δ e ε dois números muito pequenos". Ele usou ε devido a uma correspondência entre épsilon e a palavra francesa *erreur*. Mais tarde o matemático Karl Weierstrass (1815-1897) estabeleceu a definição de limite exatamente como está abaixo:

<u>Definição</u> Seja f uma função definida sobre algum intervalo aberto que contém o número a, exceto possivelmente no próprio a. Então, dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a é *L*, e escrevemos $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, para todo número $\varepsilon > 0$, há um número correspondente $\partial > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$. Ou, ainda, se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

2.11 – A Aritmetização da Análise

Análise é o ramo da matemática que lida com os conceitos introduzidos pelo cálculo diferencial e integral, tendo surgido justamente da necessidade de prover formulações rigorosas às ideias intuitivas do Cálculo.

Em Eves (2004, p.609-610), lemos que além da libertação da geometria e da libertação da álgebra, um terceiro movimento matemático profundamente significativo teve lugar no século XIX. Esse terceiro movimento, que se materializou lentamente, tornou–se conhecido como *aritmetização da análise*.

Quando se entende apenas parcamente a teoria subjacente a uma certa operação matemática, há o perigo de se aplicar essa operação de maneira formal, cega e talvez ilógica. O executante, desinformado das possíveis limitações da operação, é levado a usá–la em exemplos nos quais ela não se aplica necessariamente. Quase todo dia professores de matemática se deparam com erros dessa natureza cometidos por alunos. Assim, um aluno de álgebra elementar, convencido firmemente de que $a^0 = 1$ para todo número real a, põe que $0^0 = 1$, ao passo que outro admite que a equação $ax = b$ sempre tem exatamente uma única solução real para um par de número reais dados a e b. Além disso, um aluno que faz trigonometria pode pensar que a fórmula $\sqrt{1 - sen^2 x} = \cos x$ se verifica para todo x. Um aluno de Cálculo que desconheça as integrais impróprias pode obter um resultado errado aplicando, de maneira aparentemente correta, as regras formais da integração ou pode chegar a resultados paradoxais aplicando a certas séries infinitas convergentes resultados que só valem para séries infinitas absolutamente convergentes. Foi isso essencialmente o que aconteceu com a Análise **durante o século seguinte à invenção do Cálculo**. Tangidos pela aplicabilidade imensa do assunto e carecendo de um entendimento real dos seus fundamentos, os matemáticos manipulavam os processos analíticos de uma maneira quase cega, muitas vezes guiados apenas pela intuição. O resultado só poderia ser uma acumulação de absurdos, até que, como reação natural ao emprego desordenado do intuicionismo e do formalismo, alguns matemáticos conscienciosos se sentiram na obrigação de tentar a difícil tarefa de estabelecer **uma fundamentação rigorosa para a análise.**

A primeira sugestão de um remédio real para o estado insatisfatório dos fundamentos da análise veio de Jean-le-Rond d'Alembert (1717-1783), ao observar muito corretamente, em 1754, que era **uma teoria dos limites**; mas até 1821 não se verificou um desenvolvimento sólido dessa teoria. O mais antigo matemático de primeiro plano a efetivamente tentar uma rigorização do Cálculo foi o ítalo–francês Joseph Louis Lagrange (1736-1813). A tentativa, baseada na representação de uma função por uma expansão em série de Taylor, ficou muito longe de ser bem sucedida, pois ignorava questões necessárias sobre convergência e divergência. Essa tentativa foi publicada em 1797 no monumental trabalho de Lagrange, *Théorie des Fonctions Analytiques*. Por ser talvez Lagrange um matemático importante do século XVIII, seu trabalho teve uma influência profunda nas pesquisas matemáticas posteriores. Com o trabalho de Lagrange teve início a longa e difícil tarefa de banir o intuicionismo e o formalismo da Análise.

No século XIX o corpo da Análise continuou a se erguer, mas sobre alicerces cada vez mais profundos. Sem dúvida, deve–se a Gauss o mérito de ter laborado mais do que qualquer matemático de seu tempo para romper com as ideias intuitivas e estabelecer padrões de rigor mais elevados para a matemática. Ademais, no tratamento das séries hipergeométricas, feito por ele em 1812 encontra–se o que geralmente se considera como a primeira consideração efetivamente adequada a respeito da convergência de uma série infinita.

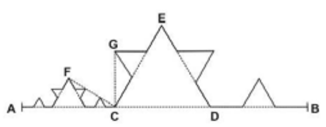
2.12 – Cauchy, Weierstrass e Riemann

Segundo Eves (2004, p.610), o primeiro grande progresso se deu em 1821, quando o matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) pôs em prática, com êxito, a sugestão de d'Alembert de **desenvolver uma teoria dos limites aceitável e definir então continuidade, diferenciabilidade e integral definida em termos do conceito de limite.** São essas definições, em essência, embora formuladas mais cuidadosamente, que encontramos hoje nos textos elementares de Cálculo. **Certamente, o conceito de limite é essencial e indispensável para o desenvolvimento da Análise**, pois convergência e divergência de séries também dependem desse conceito. O rigor de Cauchy inspirou outros matemáticos a se unirem, no esforço para livrar a Análise do formalismo e do intuicionismo.

A procura de um entendimento mais profundo dos fundamentos da Análise ganhou um relevo extraordinário em 1874 com a publicação de um exemplo[4], da lavra do matemático alemão Karl Weierstrass, de uma função contínua não-derivável ou, o que é equivalente, de uma curva contínua que não admite tangente em nenhum de seus pontos. Georg Bernhard Riemann inventou uma função que é contínua em todos os valores irracionais da variável mas descontínua para os valores racionais.

Exemplos como esses pareciam contrariar a intuição humana e tornavam cada vez mais evidente que Cauchy não tinha atingido o verdadeiro âmago das dificuldades na procura de uma fundamentação sólida para a análise. A teoria dos limites fora construída sobre uma noção intuitiva simples do sistema dos números reais. De fato, o sistema dos números reais tinha sido mais ou menos admitido sem mais cuidados, como ainda se faz na maioria dos textos elementares de cálculo. E é claro que a teoria dos limites, continuidade e diferenciabilidade dependem mais de propriedades recônditas dos números do que se supunha então. Assim, Weierstrass defendeu um programa no qual o próprio sistema dos números reais, antes de mais nada, fosse tornado rigoroso para que assim tudo que dele decorresse na análise inspirasse segurança. Esse notável programa, conhecido como *aritmetização da Análise*, revelou-se difícil e intrincado, mas acabou se concretizando através de Weierstrass e seus seguidores. Hoje a Análise pode ser deduzida logicamente de um conjunto de postulados que caracterizem o sistema dos números reais.

[4] O exemplo de Weierstrass é apresentado em Burton (2007, p.618) e, que analiticamente é expressa por $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n x)$ com $0<a<1$, $ab>1+\frac{3}{2}$. Outro exemplo é a função de Koch. É citada em Eves (2004, p.645). Foi criada pelo matemático sueco Helge von Koch, mostrando uma curva contínua geometricamente, como o limite de uma sequência de linhas poligonais representada assim



Os matemáticos foram consideravelmente além do estabelecimento dos sistema dos números reais como o fundamento da Análise. Pode-se também fazer com que a geometria euclidiana se baseie no sistema dos números reais através de sua interpretação analítica e foi demonstrado, pelos matemáticos, que a maior parte dos ramos da geometria é consistente se a geometria euclidiana é consistente. Ademais, como o sistema de números reais, ou alguma parte dele, pode servir para interpretar tantos ramos da álgebra, parece evidente que também se pode fazer depender uma boa parte da álgebra desse sistema. De fato, pode-se afirmar hoje que, essencialmente, a consistência de toda a Matemática existente depende da consistência do sistema dos números reais. Nisso reside a tremenda importância do sistema dos números reais para os fundamentos da Matemática.

Uma vez que se pode fazer com que o grosso da Matemática existente se alicerce no sistema dos números reais, é natural a curiosidade de saber se seus fundamentos podem penetrar mais fundo ainda. Nos fins do século XIX, com o trabalho de Richard Dedekind (1831-1916), George Cantor (1845-1918) e Giuseppe Peano (1858-1932), esses fundamentos se assentaram no muito mais simples e básico sistema dos números naturais. Isto é, esses matemáticos mostraram como o sistema dos números reais e, portanto, o grosso da matemática pode ser fundamentado sobre uma plataforma na teoria dos conjuntos. Especialistas em lógica, como Bertrand Russel (1872-1970) e Alfred North Whitehead (1861-1947), empenharam-se em aprofundar ainda mais esses fundamentos, deduzindo a teoria dos conjuntos de um embasamento no cálculo proposicional da lógica, embora nem todos os matemáticos entendam que esse passo tenha sido dado com êxito.

Disse ainda Eves (2004, p.611) que pensa-se em geral que um matemático com potencial de primeira linha, a fim de ter êxito em seu campo, deve começar cedo a estudar seriamente matemática e não deve embotar-se ministrando muitas aulas em nível elementar. Karl Theodor Wilhelm **Weierstrass**, que nasceu em Ostenfelde em 1815, é uma exceção notável a essas duas regras gerais. Mal orientado, encaminhou-se na juventude para o estudo de leis e finanças, o que retardou sua iniciação em matemática; e só aos quarenta anos de idade conseguiu se libertar do ensino secundário, quando obteve um lugar de instrutor na Universidade de Berlim. E só oito anos mais tarde, em 1864, foi guindado à condição de professor titular, podendo então dedicar–se integralmente à matemática avançada. Weierstrass nunca lamentou os anos gastos no ensino elementar, transferiu sua notável capacidade pedagógica para o trabalho universitário, tornando–se provavelmente o maior professor de matemática avançada que o mundo já teve.

De início Weierstrass escreveu muitos artigos sobre integrais hiperelípticas, funções abelianas e equações diferenciais algébricas, mas suas contribuições à matemática mais amplamente conhecidas referem-se à teoria das funções complexas por meio de séries de potências. Trata-se, num certo sentido, de uma extensão ao plano complexo da ideia anteriormente tentada por Lagrange, só que Weierstrass a pôs em prática com absoluto rigor. Weierstrass mostrou um interesse particular por funções inteiras e funções definidas por produtos infinitos. Descobriu a convergência uniforme e, como já vimos, deu início à chamada aritmetização da Análise ou redução dos princípios da Análise ao conceito de número real. Grande parte de suas descobertas matemáticas tornaram-se de domínio do mundo matemático não através de suas publicações, mas através de notas de suas aulas. Generosamente, ele permitia que os alunos e outros polissem (ficando com os méritos) muitas das jóias matemáticas descobertas por ele.

Como professor, Weierstrass exerceu muita influência, e suas aulas meticulosamente preparadas estabeleceram um ideal para muitos futuros matemáticos; “rigor weierstrassiano” tornou-se sinônimo de “raciocínio extremamente cuidadoso”. Weierstrass foi “a consciência matemática por excelência” e tornou-se conhecido como “o pai da Análise Moderna”. Faleceu em Berlim em 1897, exatamente um século depois da publicação da tentativa de Lagrange de rigorizar o Cálculo.

Ainda, segundo Eves (2004, p.613), a par dessa rigorização da matemática, verificou-se uma tendência no sentido da generalização abstrata, um processo que se tornou muito pronunciado nos dias de hoje. E, no século XIX, talvez nenhum matemático tenha contribuído tanto para esse aspecto da matemática quanto Georg Friedrich Bernhard Riemann. Ele certamente exerceu uma influência profunda em vários ramos da matemática, em particular na geometria e na teoria das funções.

Poucos matemáticos deixaram a seus sucessores um legado de ideias tão rico para desenvolvimentos posteriores.

Riemann nasceu em 1826, numa aldeia de Hanover, filho de um pastor luterano. Suas maneiras sempre foram tímidas e sua saúde sempre foi frágil. A despeito de suas modestas posses, o pai de Riemann conseguiu dar-lhe uma boa educação, primeiro na Universidade de Berlim e depois na de Göttingen. Obteve seu doutorado nessa última instituição com uma brilhante tese no campo da Teoria das Funções Complexas. Nessa tese encontram-se as chamadas *Equações Diferenciais de Cauchy-Riemann,* possivelmente já conhecidas antes do tempo de Riemann, que garantem a analiticidade de uma função de variável complexa, e o produtivo conceito de *Superfície de Riemann*, que introduziu considerações topológicas na Análise. Riemann tornou claro o conceito de integrabilidade pela definição do que chamamos agora ***Integral de Riemann*****,** abrindo caminho, no século XX, para o conceito mais geral de *Integral de Lebesgue* e, daí, para generalizações ulteriores da Integral.

Já Stewart (2001, p.379) diz que Bernhard Riemann recebeu seu título de doutor sob a orientação do legendário Gauss na Universidade de Göttingen e lá permaneceu para lecionar. Gauss, que não tinha o hábito de elogiar outros matemáticos, referiu-se a Riemann como “uma mente criativa, ativa e verdadeiramente matemática, e de uma originalidade gloriosamente fértil”.

Ainda em Burton (2007, p.597), devido a recomendação de Gauss, Riemann tornou-se conferencista não-remunerado em 1854, sobrevivendo com as taxas pagas a ele diretamente por aqueles alunos que escolhiam assistir a seus seminários. Em 1857, ele foi promovido para uma posição assalariada de professor assistente. Quando Gauss faleceu em 1855, sua cátedra como professor de matemática tinha ido para Dirichlet. Quando Dirichlet faleceu quatro anos mais tarde, Riemann o sucedeu nessa posição. Mas ele já tinha contraído tuberculose e estava debilitado. Na tentativa de curar-se dessa doença, fora a um lugar de clima mais quente, Riemann passou seus últimos anos na Itália, onde faleceu em 1866 com a idade de 39 anos.

Para ser admitido como um conferencista não-remunerado em Göttingen, Riemann foi chamado para provar seu valor como conferencista submetendo-se a um seminário antes de ser aceito. Para essa prova, ele submeteu uma lista de três tópicos possíveis para faculdade. Ele se sentia bem preparado para discutir cada um dos dois primeiros tópicos. Riemann temerariamente listou como sua terceira oferta um tema sobre o qual Gauss tinha refletido por cerca de 60 anos, sobre Os Fundamentos da Geometria. Contrariamente às expectativas de Riemann, Gauss selecionou este último tópico para seu seminário teste. Seu esforço em levar avante a dificuldade da designação, enquanto também trabalhava como um assistente de Wilhelm Weber em um curso de física-matemática, trouxe-lhe um colapso nervoso temporário.

Num retrospecto confortável, a leitura de *Sobre as Hipóteses que subjazem à fundação da Geometria,* em 10 de junho de 1854, é vista como uma das mais esclarecedoras histórias da matemática moderna. Porque Riemann adaptou seu seminário a uma audiência pretendida, toda a faculdade filosófica de Göttingen, ele não continha exemplos específicos e praticamente nenhuma fórmula. Ainda, a despeito de seu caráter intuitivo, ele foi extraordinariamente poderoso nas generalidades e sugestivas ideias em sua natureza. Diz-se que nenhum dos presentes conseguiu entender a abordagem da geometria de Riemann exceto o idoso e legendário Gauss. Disse Weber que mesmo Gauss ficou perplexo.

Embora o seminário inaugural de Riemann não afetasse imediatamente o mundo intelectual, sua publicação dois anos depois de sua morte causou um movimento entre aqueles matemáticos que pensavam preencher seus detalhes. Com a descoberta de geometrias concorrentes, nenhuma geometria poderia ser vista como uma coleção de verdades sobre o espaço físico. Riemann, ao avaliar exatamente que fatos podemos assegurar como certos, teve a maravilhosa percepção de que o espaço de nossa experiência deve ser ainda finito. Como ele afirmou no seminário:

> Na extensão das construções do espaço para o imensuravelmente grande, devemos distinguir entre a não limitação e a extensão infinita; a primeira pertencente às relação estendidas, e as últimas a relações medidas. (RIEMANN, apud BURTON, 2007, p.597)

Segundo Burton (2007, p.597), Riemann fez grandes contribuições para a Teoria dos Números e Fundamentos da Geometria. O amplo conceito de espaço de Riemann e a geometria resultaram ser a colocação correta que, 50 anos mais tarde, contribuiu para a Teoria da Relatividade Geral de Einstein.

Em Stewart (2007, p.351), lemos que um físico que conhece a velocidade de uma partícula pode desejar saber sua posição em um dado instante. Um engenheiro que pode medir a taxa de variação segundo a qual a água está escoando de um tanque quer saber a quantidade escoada durante um certo período de tempo. Um biólogo que conhece a taxa segundo a qual uma população de bactérias está crescendo pode querer deduzir qual o tamanho da população em um certo momento do futuro. Em cada caso, o problema é encontrar uma função F cuja derivada é uma função conhecida f. Se a função F existir, ela é chamada de uma *antiderivada* de f.

<u>*Definição*</u> Uma função F é chamada uma **antiderivada** de f sobre um intervalo I se $F'(x) = f(x)$ para todo x em I.

<u>*Teorema 1*</u> Se F for uma antiderivada de f em um intervalo I, então a antiderivada mais geral de f em I é $F(x)+C$ onde C é uma constante arbitrária.

Observamos que entre os matemáticos do século XVIII era corrente ver–se a integração simplesmente como um processo inverso da diferenciação.

A antiderivada é conhecida como integral indefinida da função f .Assim podemos escrever que $\int f(x)dx = F(x)+C$

Segundo Stewart (2001, p.366) podemos ler no capítulo de Integrais o seguinte:

> As integrais estão envolvidas em diversas situações: usando a taxa segundo a qual o óleo vaza de um tanque encontramos a quantidade que vazou durante um certo período; usando a leitura do velocímetro do ônibus espacial *Endeavour* podemos calcular a altura atingida por ele em um dado intervalo de tempo; usando conhecimento da potência consumida encontramos a energia usada durante um certo dia em alguma cidade.Para introduzir a derivada, que é a ideia

> central do cálculo diferencial, são usados problemas da tangente e da velocidade. Para formular a ideia de uma integral definida, que é o conceito básico do cálculo integral, podem ser usados de início problemas da área e da distância, pois há uma conexão entre o cálculo integral e o cálculo diferencial. O Teorema Fundamental do Cálculo relaciona a integral com a derivada e isso simplifica bastante a resolução de muitos problemas. (STEWART, 2001 p.366)

Em Stewart (2001, p.378), vemos que um limite da forma

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\left[f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + f(x_3^*)\Delta x + \ \dots\ + f(x_n^*)\Delta x\right]$$

aparece quando computamos uma área. Também ele aparece quando tentamos encontrar a distância percorrida por um objeto. Resulta que esse mesmo tipo de limite ocorre em uma grande variedade de situações mesmo quando f não é necessariamente uma função positiva. Limites da forma acima também surgem no processo de encontrar o comprimento de curvas, volumes de sólidos, centros de massa e forças devido à pressão da água e trabalho, como também outras quantidades.

Esse tipo de limite tem um nome e notação especial.

Fundamentando nosso trabalho em sala de aula, queremos deixar aqui relatado o significado que Riemann deu ao conceito de Integral.

A definição seguinte e que comumente é utilizada no Cálculo deve–se a Riemann.

<u>Definição</u> Se f é uma função contínua definida para $a \le x \le b$, dividimos o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais a $\Delta x = (b-a)/n$. Seja $x_0(=a), x_1, x_2, ..., x_n(=b)$ os extremos desses subintervalos e vamos escolher os pontos amostrais $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$ nesses subintervalos de tal forma que x_i^* está no *i*–ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Então a integral definida de f é

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

O símbolo $\int$ foi introduzido por Leibniz e é chamado de **sinal de integral**. Na notação $\int_a^b f(x)dx$, $f(x)$ é chamado de **integrando**, a e b são chamados **limites de integração**; a é o **limite inferior,** b o **limite superior**, e o símbolo dx por si só não tem um significado oficial; $\int_a^b f(x)dx$ é todo um símbolo. O processo de calcular uma integral é chamado de **integração**.

A integral definida $\int_a^b f(x)dx$ é um número, não depende de x. Uma vez que assumimos f como sendo contínua, pode ser provado que o limite da definição anterior sempre existe e fornece o mesmo valor, não importando como escolhemos os pontos amostrais x_i^*. Se tomarmos os pontos amostrais como sendo os extremos direitos, então $x_i^* = x_i$, e a definição de integral fica

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

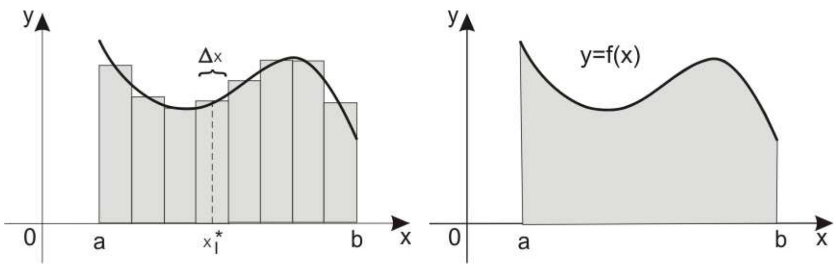
Se escolhermos os pontos amostrais como sendo os extremos esquerdos, então $x_i^* = x_{i-1}$, e a definição fica

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

Alternativamente, podemos escolher x_i^* como sendo o ponto médio do subintervalo ou qualquer outro número entre x_{i-1} e x_i.

Embora a maioria das funções que encontramos seja contínua, o limite na definição anterior também existe se f tiver um número finito de descontinuidades removíveis ou saltos (mas não descontinuidades infinitas). Assim, podemos enunciar a integral definida para tais funções.

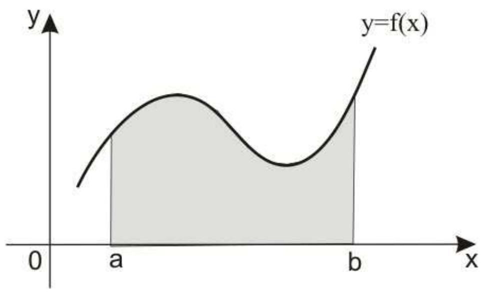
A soma $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$ que ocorre na definição é chamada **soma de Riemann**, em homenagem ao matemático Bernhard Riemann. Sabe-se que se f for positiva, então a soma de Riemann pode ser interpretada como uma soma de áreas de retângulos aproximantes. Comparando a definição anterior com a definição de área, vemos que a integral definida $\int_a^b f(x)dx$ pode ser interpretada como a área sob a curva $y = f(x)$ de $a \le x \le b$.

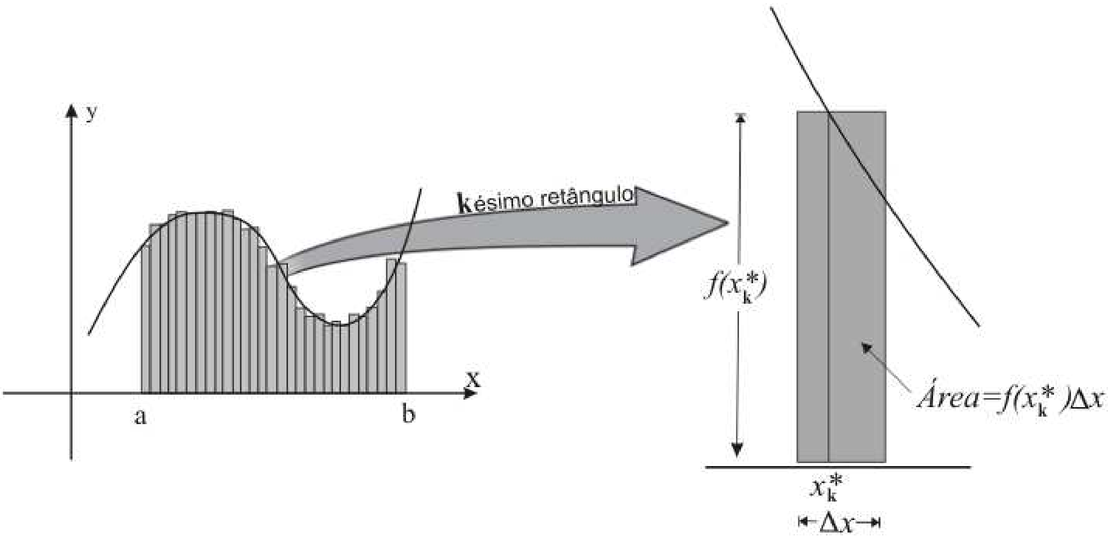


Fonte: STEWART, 2001, p.379

A visão de Anton (2000, p.404) sobre a integral de Riemann partiu da seguinte definição.

<u>Definição</u> ***(Área Sob uma Curva)***. Se a função f for contínua em $[a,b]$ e $f(x) \ge 0$ para todo x em $[a,b]$, então, a **área** sob a curva $y = f(x)$ no intervalo $[a,b]$ é dada por $A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x$.



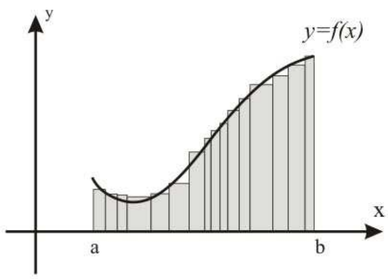


Fonte: ANTON, 2000, p.404-405

Observa-se que o limite dessa fórmula é frequentemente difícil ou impossível de ser encontrado. Quando é necessária uma área exata, deve ser usado o método da antiderivada. Porém, se for suficiente uma *aproximação* então em vez do limite, pode-se usar a área aproximada dada por $A \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x$.

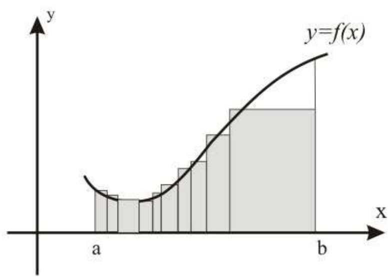
O $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x$ é tão importante que a ele estão associadas uma terminologia e uma notação próprias. Esse limite pode ser denotado com o símbolo $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x$ que é chamada de **integral definida** de f de a até b. Geometricamente, a integral definida representa a área, com sinal, entre $y = f(x)$ e $[a,b]$ e, no caso de $f(x)$ não negativa no intervalo $[a,b]$, a área entre a curva e o intervalo $[a,b]$. Os números a e b são chamados **limites de integração inferior e superior** respectivamente, e $f(x)$ é o **integrando.** A razão do sinal de integração ficará clara quando se estabelecer uma ligação entre a integral indefinida ou antiderivada e a integral definida.

Na igualdade $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x$ supõe-se que a função f seja contínua no intervalo $[a,b]$ e que, para cada n, este intervalo seja dividido em n subintervalos de comprimento igual para criar as bases dos retângulos aproximantes. Embora os comprimentos iguais sejam úteis para cálculos, esta restrição não é essencial. Istoé, a área com sinal entre $y = f(x)$ e $[a,b]$ pode ser obtida usando retângulos com comprimentos diferentes, desde que as sucessivas subdivisões sejam construídas de tal forma que os comprimentos tendam a zero à medida que n cresce, como na figura seguinte.



Fonte: ANTON, 2000, p.409

Deste modo, devemos excluir situações como o da figura seguinte,

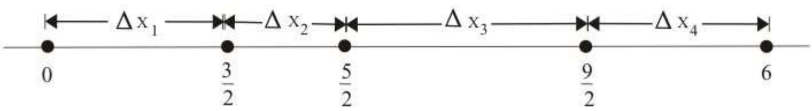


Fonte: ANTON, 2000, p.409

na qual a metade à direita dos intervalos nunca é subdividida. Se permitido este tipo de subdivisão, o erro na aproximação não tenderia a zero com o aumentar de n .

Para preparar-se para a nova generalidade acrescentada de intervalos desiguais, supõe-se que o intervalo $[a,b]$ tenha sido subdividido em n intervalos, cujos comprimentos sejam $\Delta x_1,\ \Delta x_2,\ \dots\ ,\ \Delta x_n$ e seja $\max \Delta x_k$ o maior comprimento dos subintervalos. Os subintervalos formam o que se chama uma **partição** do intervalo $[a,b]$ e $\max \Delta x_k$ é chamado de **tamanho da malha** da partição.

Por exemplo, a figura seguinte mostra uma partição de $[0,6]$ em quatro subintervalos com o tamanho de malha dois



$$\boxed{\max \Delta x_k = \Delta x_3 = \tfrac{9}{2} - \tfrac{5}{2} = 2}$$

Fonte: ANTON, 2000, p.409

Para generalizar $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x$ de modo a permitir intervalos de comprimentos diferentes, é preciso substituir o comprimento constante Δx pelo variável Δx_k e substituir $n \to +\infty$ por uma expressão que especifique que os comprimentos de todos os subintervalos tendem a zero. Usa-se a expressão $\max \Delta x_k \to 0$ com esta finalidade. Adotadas essas modificações a igualdade

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x \quad \text{torna-se} \quad \int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k \ .$$

A soma que aparece nessa expressão é chamada **soma de Riemann** e o limite, por vezes é chamado de **integral de Riemann**, em homenagem ao grande matemático alemão que formulou muitos dos conceitos básicos de integração.

Como a integral definida é dada por um limite e é possível que o limite não exista, o mesmo pode ocorrer com a integral definida. Assim sendo, é dada a seguinte definição:

Definição Diz-se que uma função f é ***Integrável segundo Riemann***, ou simplesmente **integrável** em um intervalo finito e fechado $[a,b]$, se o limite

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$

existir e não depender da escolha da partição ou dos pontos x_k^* no subintervalo.

O trabalho de Riemann foi mais além daquele que acabamos de citar. Diz Burton (2007, p.611), que houve uma clara necessidade de se desenvolver uma teoria de integração definida independente da diferenciação, que deveria abraçar também as funções descontínuas da mesma maneira que as contínuas. A familiar concepção da soma aproximada de uma integral definida foi apresentada por Riemann em um de seus dois testes de habilitação aos quais ele submetera à toda faculdade de Göttingen para apreciação em 1854. O trabalho de Riemann não foi publicado até 13 anos mais tarde e, então, somente depois de sua prematura morte. A versão de integração de Riemann cobriu uma ampla classe de funções além das funções contínuas. A extensão de sua generalização foi rigorosamente exibida quando ele ofereceu um exemplo de função integrável tendo muitas descontinuidades no intervalo de integração.

CAPÍTULO 3

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

CAPÍTULO 3 – RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Introdução

Conforme já comentamos na página 26, fizemos na Unesp, como aluno especial, nossa primeira disciplina em 2001, Álgebra Linear, com o professor Romulo, que ofereceu como estratégia de aprendizagem, não dar respostas aos problemas por ele propostos, deixando aos alunos a oportunidade de pensar e de ir em busca das soluções.

Gostaríamos, agora, de nos reportar à parte introdutória deste nosso trabalho. Ali referimos que nosso interesse pelo tema aconteceu na junção de algumas singularidades de nossa trajetória acadêmica com circunstâncias de nossa área de atuação. Hoje estamos lecionando Matemática em uma Faculdade de Engenharia e em outra de Administração. O maior número de aulas dadas é na engenharia (Cálculo 2 e 3). E nela temos verificado a dificuldade que os alunos apresentam ao trabalhar com integrais. Isso nos motivou a enfrentar o desafio de ver esse conteúdo tratado, na prática da sala de aula, com uma metodologia alternativa baseada em Resolução de Problemas.

Dessa maneira foi que aconteceu nossa inserção no GTERP. Houve, nesse contato, acreditamos, uma perfeita identificação entre a parte teórica e a prática vivenciada em nossa vida acadêmica e profissional.

Como diz Polya (1994, p. v) a respeito da resolução de problemas:

> Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver, por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter.(POLYA, 1994, p.v)

Neste capítulo, onde vamos trabalhar o segundo eixo temático que se relaciona à nossa pesquisa: “Resolução de Problemas”, buscaremos identificar os diferentes campos teóricos que nos ajudarão a entender e saber trabalhar a sala de aula, de uma forma alternativa.

Desde nosso ingresso no GTERP, muitas leituras, muitas discussões e muitas aplicações fizeram-se presentes em nossos encontros. Soubemos que, a Coordenadora de nosso Grupo, Lourdes de la Rosa Onuchic, desde o final de 1989, entrara em contato com o Grupo de Educação Matemática da San Diego State University (SDSU), da Califórnia, EUA, de onde havia trazido muito material da grande reforma que estava acontecendo, nos Estados Unidos, em Educação Matemática.

Soube que no Documento “An Agenda for Action” (1980, p. i) – Uma Agenda para a Ação – que ofereceu recomendações para a matemática escolar dos anos oitenta – seu prefácio começa assim:

> Nos anos sessenta, houve uma considerável fermentação em currículo e ensino de Matemática. Embora a atenção pública estivesse focalizada sobre as tentativas mais visíveis numa revisão do programa, estamos conscientes, duas décadas mais tarde, que a mudança fora mais aparente do que real. Nos anos setenta, a preocupação foi direcionada para problemas evidenciados quase que exclusivamente em testar pontuações obtidas pelos alunos. As escolas estavam respondendo a essa preocupação de variadas maneiras, mas um claro e cuidadoso sentido razoável de direção, que olhava para o futuro, tinha-se perdido (...) O NCTM - National

> Council of Teachers of Mathematics (Conselho Nacional de Professores de Matemática dos EUA) - como uma organização de educadores profissionais, tinha a especial obrigação de apresentar seu ponto de vista, de uma forma responsável e bem informada, das direções que os programas matemáticos deveriam assumir nos anos oitenta.

Como diziam os educadores matemáticos do NCTM, as recomendações que eles apresentavam não eram o fim de seus esforços mas um começo. Estavam apresentando uma agenda para uma década de ação, e chamavam todas as pessoas e grupos interessados para juntarem-se, num esforço massivo cooperativo, para uma melhor educação matemática para todos os jovens.

Uma década se passou e não conseguiram chegar ao que pretendiam. Em 1989, o NCTM lançou uma nova Agenda - “Setting a Research Agenda” - Estabelecendo uma Agenda de Pesquisa, tendo Judith T. Sowder, da San Diego State University, como responsável pelo Projeto Diretor e Editora e, como membros do conselho Consultivo, F. Joe Crosswhite, James G. Greeno, Jeremy Kilpatrick, Douglas B. McLeod, Thomas A. Romberg, George Springer, James W. Stigler e Jane O. Swafford.

Em seu prefácio, esse documento “The Research Agenda Project”, conduzido sob os auspícios do NCTM e patrocinado pelo National Science Foundation, tinha como seu propósito o desenvolvimento de uma agenda para guiar a pesquisa sobre ensino e aprendizagem de matemática. Quatro áreas foram selecionadas para esse propósito: ensino e avaliação de resolução de problemas; ensino e aprendizagem de álgebra; conceitos numéricos nos “middle grades” (6ª, 7ª e 8ª séries – alunos de 11, 12, 13 anos); e ensino eficiente de matemática.

Para o desenvolvimento da Agenda “The National Council of Teachers of Mathematics Research Agenda Project”, procurou-se inicialmente fazer uma busca de conhecimentos anteriores como um ponto de partida, uma fundamentação. Diante disso pode-se ler nesse documento, na página 1, que

> A primeira das grandes Conferências, para estabelecer uma Agenda de Pesquisa em Educação Matemática, aconteceu na Universidade da Geórgia, em 1967, exatamente 20 anos antes das conferências deste Projeto. Três grandes áreas que garantiram pesquisa foram identificadas nessa Conferência de 1967: a aprendizagem da

> matemática; o ensino de Matemática; e o Currículo de Matemática. Embora a Conferência da Universidade da Geórgia tivesse sido útil no que se refere àquilo que a pesquisa em educação matemática enfocava, o desenvolvimento de pesquisa programática estava muito mais ligada às conferências posteriores, onde as áreas tópicas foram muito mais estreitamente definidas. Essas conferências foram influentes ao dar, aos pesquisadores, oportunidades para determinar agendas de pesquisa para eles mesmos e outros estabelecerem as ligações essenciais de comunicação para uma investigação colaborativa

Os anos setenta também marcaram uma era de crescimento, preocupada com um currículo de matemática projetado primeiramente para melhorar as notas nos testes de habilidades básicas, definidas por muitos como habilidades computacionais. O NCTM respondeu a essa preocupação com uma série de recomendações para a melhora da matemática escolar nos anos oitenta em seu documento “Uma Agenda para a Ação”.

Ainda, esse documento, na página 1, diz que

> o Comitê Consultivo para Pesquisa, de 1980, com a maioria de seus membros tendo participado das conferências da Geórgia, podendo assim reconhecer a eficiência dessas conferências no avanço da pesquisa programática, decidiu que a Agenda para a Ação devia incluir um projeto que dirigisse os esforços de pesquisa para questões importantes da matemática escolar. Um grupo desses educadores preparou uma proposta de projeto que pretendia apoiar um conjunto de conferências de grupos de trabalho e subsequentes monografias. Esse projeto foi chamado “Research Agenda Project” - Projeto Agenda de Pesquisa. Essa proposta foi submetida em 1981 ao Programa de Pesquisa em Educação da Ciência do National Science Foundation.

O início dos anos oitenta foi também digno de nota, devido aos massivos cortes no apoio federal à educação. Assim, essa proposta foi posta de lado até 1984. Uma das mudanças entre as propostas original e final foi uma consciência crescente da necessidade das conferências terem alcance interdisciplinar e internacional. Certamente, o estudo da aprendizagem de matemática se estendia para além do trabalho dos educadores da América do Norte. Simultâneo ao trabalho originado na Universidade da Geórgia, pesquisadores de outras disciplinas e de outros países estavam investigando problemas associados à aprendizagem da matemática. Embora muitas questões de pesquisa fossem comuns entre disciplinas e nacionalidades, paradigmas de pesquisa e metodologias eram frequentemente diferentes e traduções de relatos de pesquisa eram poucos. Como resultado, a comunicação era difícil e os pesquisadores, com frequência, ignoravam investigações pertinentes ao seu próprio trabalho.

A proposta final pedia pela concentração em quatro áreas especializadas: o ensino e a aprendizagem da álgebra, o ensino e a avaliação de resolução de problemas, aprendizagem de números nos “graus médios” e um ensino eficiente de matemática. Sentia-se que se a pesquisa, nessas áreas, era para avançar, aos investigadores deveria ser dada uma oportunidade de atingir algum acordo nas direções em que a pesquisa, dentro de suas respectivas áreas, devia progredir. Nesse critério, as áreas foram identificadas para a primeira proposta através de um exame da comunidade de pesquisa em educação matemática, que eram proximamente as quatro consideradas pelo Comitê Consultivo de Pesquisa.

Em maio de 1986, os membros do Conselho Consultivo e co-diretores da Conferência juntaram-se para o projeto das Conferências. As quatro Conferências dos grupos de trabalho aconteceram na primavera de 1987. Os anais de cada uma das quatro Conferências contêm os artigos e os sumários das discussões e recomendações de cada grupo.

O Conselho Consultivo, depois de longas discussões sobre as Conferências individuais, também chegou a consenso do conteúdo desejado de cada um desses volumes. Assim, o propósito da “Research Agenda Project” foi o de desenvolver uma agenda dirigida à pesquisa sobre aprendizagem e ensino da matemática, em quatro áreas selecionadas julgando-as importantes para a matemática escolar.

Mudanças sociais no Brasil acarretaram mudanças no ensino da Matemática. De uma sociedade agrária e pecuária, onde poucas pessoas precisavam saber matemática, passando para uma sociedade industrial, onde mais gente precisava saber matemática. A sociedade passou para a era da informação, onde a maioria das pessoas precisa saber matemática. Pode-se ver que o fato de combinar o social com o crescimento geométrico do conhecimento, coloca-nos no centro de uma revolução.

Não é difícil de se ver que a mudança de uma sociedade industrial para uma sociedade de informação se apoia num conceito matemático: qual é sua matéria prima e como trabalhá-la?

Não somente essa sociedade mudou, tornando-se crescentemente tecnológica, mas também tornou-se crescentemente heterogênea. Essas mudanças implicaram que os educadores precisavam antecipar as necessidades de grupos, tradicionalmente excluídos, e criar condições para incluí-los. Os educadores nessa época diziam: – Temos que perceber que os estudantes, que estão na escola hoje, serão os cidadãos do século XXI. É preciso que se vislumbrem algumas das características importantes da sociedade que virá e de estarmos prontos para prepará-los para aquele mundo.

Se estamos dentro de uma revolução que continua, devemos pensar numa reforma. Assim, as escolas deveriam estar prontas para uma dramática transição em seus programas de matemática. Essa transição envolveria mudanças fundamentais em conteúdo, nos modos de ensino, na educação de professores, e nos métodos de avaliar o progresso dos alunos.

Dado que mudanças deveriam ocorrer, muita gente e muitos grupos inevitavelmente fizeram apelos sobre ações, programas e políticas escolares que deveriam ser seguidas. Assim, pedia-se por muita pesquisa.

Resumindo tudo o que foi dito, mudanças revolucionárias na sociedade, particularmente o movimento para uma economia baseada na informação, estavam produzindo reformas essenciais na educação matemática, e isso foi dito em 1989. Tais reformas precisavam de uma sólida base de pesquisa para serem bem sucedidas. Embora muitos estudos de pesquisa precisassem ser levados avante, eles precisam ser coordenados sobre questões importantes, de modo que problemas complexos relacionados ao ensino e à aprendizagem de matemática para uma sociedade mutante fosse dirigida.

Esse artigo termina dizendo que “Research Agenda Project” foi concebido como um veículo para iniciar esse esforço coordenado solicitado.

Essa sociedade, a da informação, avançou para uma Sociedade do Conhecimento e, nessa sociedade, é necessário que todos conheçam matemática.

E agora? Como preparar nossas crianças e nossos jovens, que estão sabendo cada vez menos matemática, para enfrentar os problemas deste novo século?

Podemos oferecer um caminho que se resume em ensinar matemática <u>através</u> da resolução de problemas, isto é, ver a resolução de problemas como uma metodologia de ensino.

Neste capítulo 3, procuramos mostrar um pouco de nossa vivência e pesquisa relacionadas à resolução de problemas, servindo-nos de algumas conceituações de autores que trabalharam e/ou trabalham com a metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. O presente capítulo terá três diferentes etapas. Na primeira, procuramos abordar a relevância da Resolução de Problemas como responsável pela construção do conhecimento matemático, partindo da concepção de um problema matemático que justifique sua função no âmbito da Educação Matemática. Na segunda, ver Resolução de Problemas como um novo conteúdo, como uma nova forma de “ensino” ou, ainda, como aplicação de conhecimentos prévios à construção de novos conceitos e novos conteúdos. Na terceira parte, trataremos mais detidamente de questões ligadas à implementação dessa metodologia em sala de aula. Finalmente, deveremos situar nossa pesquisa, face aos tópicos abordados, em nosso trabalho com Integrais.

3.1 – Resolução de Problemas – A Construção do Conhecimento Matemático

Seja nas atividades realizadas na sala de aula, envolvendo professor e aluno, ou mesmo nas situações reais do nosso cotidiano, pode-se sentir o modo como, normalmente, a Matemática é entendida: como uma ciência exata, com resultados infalíveis, estruturados por meio da dedução e marcados por uma estrutura simbólica, abstrata. Muitos a acham (ou a intuem como) importante e indispensável à resolução de problemas diversos, seja nos mais diversos campos do conhecimento humano, seja nos da vida diária dos cidadãos. Outro quase consenso é o de ser entendida por poucas pessoas, em razão de sua extrema precisão e rigor.

Segundo Branca (1997, p. 4-5):

> A expressão resolução de problemas ocorre em muitas profissões e disciplinas diferentes e tem muitos significados distintos. Dirimir impasses (por exemplo, em política e negócios) é uma forma de resolução de problemas; criar novas ideias ou inventar novos produtos ou técnicas é uma outra. Embora a resolução de problemas em matemática seja mais específica, ela comporta diferentes interpretações. As atividades classificadas como resolução de problemas em matemática incluem resolver problemas simples, desses que figuram em livros didáticos comuns, resolver problemas não rotineiros ou quebra-cabeças, aplicar a matemática a problemas do mundo “real” e conceber e testar conjecturas matemáticas que possam conduzir a novos “campos de estudo.” O desafio oferecido por uma situação problema leva a um conflito cognitivo, possibilitando a reorganização e a ampliação do conhecimento. Não se resolvem problemas para testar conceitos e conhecimentos prontos, mas sim para construí-los. Por isso, a resolução de problemas é “matemática em elaboração”.(BRANCA, 1997, p.4-5)

Se nos debruçarmos mais minuciosamente sobre o modo como se dá o processo de construção do conhecimento matemático, verificaremos ser algo dinâmico, obtido a partir de resultados conseguidos de forma experimental e indutiva. Vê-se, por exemplo, na História da Matemática, vários momentos em que a construção de conhecimento se deu a partir da busca pela solução de um problema específico, sem o que estes não poderiam ter sido alcançados sem a pertinácia e a criatividade de alguns seres humanos movidos pela dúvida, pela curiosidade e pela obstinação em resolvê-lo. Só para citar um exemplo, lembramos Andrew Willes, que conseguiu demonstrar o último Teorema de Fermat, que desafiara matemáticos por cerca de 350 anos (Singh,1999).

Assim, por força de muitos exemplos, pode-se defender a falibilidade da Matemática. Ela não é absolutamente infalível ou inquestionável, nem pronta, nem acabada, mas se desenvolve na e pela prática da curiosidade, da crítica e da dúvida. Dá andamento, procura aprimorar conhecimentos anteriores, resolver dúvidas e inconsistências em busca de novos conhecimentos necessários à solução de novos ou antigos problemas, ainda não resolvidos.

Falando sobre a tentativa de conciliar a construção do conhecimento científico e a resolução de problemas no ensino de Matemática, Brasil (1964, p. 22) disse que:

> Tradicionalmente o problema é empregado, pelos professores, na verificação e na fixação da aprendizagem. Atentando, porém, para a História das Ciências, notamos que o problema antecede invariavelmente às descobertas, é o provocador dos estudos e o orientador das construções teóricas, e pergunta: - Por que, no ensino da Matemática especialmente, invertemos a ordem natural das coisas? (BRASIL, 1964, p.22)

De um modo mais atual, Santos (2002, p. 14), tratando das atuais tendências do ensino com a ajuda da resolução de problemas, entende que "de uma certa maneira, a ideia construtivista se apoia no próprio processo histórico da construção do conhecimento científico, cujos objetos foram sendo construídos como respostas a problemas específicos".

Há que se lembrar, que o emprego dessa forma de trabalhar exige, também, certo domínio da linguagem matemática, conhecimento de fatos e compreensão das bases, estruturas e relações que fundamentam a ciência da Matemática, colocando-a como importante área do conhecimento humano. Assim, quando “problemas” são utilizados apenas para verificar a aquisição de um conhecimento, pois aparecem logo após um determinado conteúdo ser trabalhado, como aplicação das operações e como um aprimoramento de técnicas operatórias, a resolução de problemas em Matemática fica, então, reduzida ao ensino de respostas-padrão para perguntas-padrão, não levando em conta o tipo de estratégia utilizada pelos alunos.

Tratando de pesquisa em Educação Matemática, Ponte (1994) considera que a resolução de problemas é, na verdade, um relevante enfoque analítico porque, entre outros motivos, recorre a processos centrais à atividade matemática.

Já Schoenfeld (1989) entende a atividade matemática como aquela na qual os matemáticos tentam dar sentido às coisas, ou seja, ser matemático exige internalizar sua estética, predileção pela análise e compreensão, percebendo suas estruturas e suas relações. Em síntese, percebendo como as coisas se relacionam e combinam.

A resolução de problemas é apontada por Smole; Diniz (2001) como uma situação onde o aluno aprende matemática, desenvolve procedimentos, modos de pensar, desenvolve habilidades básicas como verbalizar, ler, interpretar e produzir textos em diferentes áreas do conhecimento que podem estar envolvidas em uma situação. Isso indica que a resolução de problemas deve ser vista como uma metodologia de ensino e que o professor de matemática, ao utilizar-se dela, estará contribuindo para o desenvolvimento da capacidade de comunicação e das habilidades leitoras.

Assim, após essas conceituações, entendemos caber aos educadores matemáticos conhecer, em detalhes, o modo como a resolução de problemas pode ser aplicada no ensino, pois uma de suas finalidades mais relevantes é a de fazer da Matemática algo que se mostre aos educandos como tendo sentido, com um objetivo adequado e compreensível, com uma visível integração de seus elementos, funcionando como um todo coeso e coerente.

Para isso é preciso, primeiramente, distinguir um problema, que o senso comum entende como um impasse, uma dificuldade cotidiana, de um problema matemático, passível de ser resolvido por cálculos matemáticos.

3.1.1 – Características de um Problema Matemático

A matemática, do mesmo modo que qualquer outra atividade humana, pode ser definida como a busca de solução para problemas que surgem na luta pela sobrevivência. A característica matemática dessa atividade seria uma decorrência dos métodos empregados e do tipo de problemas escolhidos.

Quando se trabalha com Resolução de Problemas, surge inevitavelmente a pergunta: o que é um problema? Um problema é, *para nós*, uma situação não resolvida, para a qual devemos encontrar alguma forma de solução e reconhecer que esse mesmo problema, que para nós é um problema, pode não ser um problema para outro.

Porém, nem sempre algo que se desconheça é, para nós, um problema. Para que se considere uma situação como problemática, é preciso que se tenha consciência de seu teor e da necessidade de responder às questões dela advindas.

Apesar de o termo "problema" estar presente no cotidiano de todos nós, e, sobretudo, dos que ensinam Matemática, nota-se que, ainda hoje, nem sempre seu uso está embasado em uma conceituação, em um significado; razão pela qual, reportando-se à década de 1980, Schroeder e Lester (1989) disseram que a resolução de problemas era a parte do currículo de Matemática sobre a qual mais se escrevia e falava, a despeito de ser a menos compreendida.

Caso nosso interesse seja o de avaliar o quão bom e útil é um problema matemático, à medida em que ele aprimora a ciência matemática, então é importante medir não só o poder desafiador do problema para os matemáticos, mas, também, o quanto ele lida com Matemática. A resolução de um problema deve fazer com que se entenda melhor a matemática que está contribuindo para o desenvolvimento dos vários ramos de uma ciência e trazendo benefícios para os que o resolvem.

Como disse Allevato (2005), Thompson (1989, p.235), relatando os resultados de uma pesquisa, realizada em 1985 com dezesseis professores da escola elementar, detectou duas concepções existentes nas respostas dadas sobre o que seria um problema. Uma delas, a de cinco professores, o concebe como "a descrição de uma situação envolvendo quantidades estabelecidas, seguida de uma pergunta sobre alguma relação entre as quantidades e cuja resposta pede a aplicação de uma ou mais operações aritméticas". Nesse modo de entender, subjaz a ideia de que o principal objetivo de um problema é o de obter sua resposta. Encontrada esta, o problema estará resolvido. Para que isso ocorra, existe um modo único e correto de se obter essa resposta, normalmente um número, e que, para o êxito da resolução de um problema, a memorização de seus passos é primordial.

Já, para a segunda concepção, a dos outros onze professores, aquela que considera, como problemas, os quebra-cabeças, os labirintos e as ilusões de ótica, um problema pode envolver muitas abordagens para sua resolução. Também, não podem depender apenas de memorizações ou elementos conhecidos, mas estimular a busca e a descoberta de novos caminhos que sejam encarados como desafio, diversão ou até mesmo frustração.

Polya (1962, p.117), considerando o assunto de uma forma mais ampliada, afirma que "ter um problema significa buscar conscientemente alguma ação apropriada para atingir um objetivo claramente definido mas não imediatamente atingível". Complementando esse raciocínio, Wagner (2003, p. 612) defende que um problema se caracteriza por duas particularidades, a de haver uma necessidade não satisfeita e alguns caminhos não óbvios para satisfazê-la.

Portanto, para uma situação ser considerada um problema, ela deve apresentar ao indivíduo alguma dificuldade inicial que o faça refletir, pensar em estratégias de ação e caminhos de resolução para a tomada de decisões. Um problema real exige basicamente *ações, estratégias e justificativas.*

Conforme Hiebert et al (1997), *apud* Van de Valle (2001, p. 42), para que um problema utilizado no ensino de Matemática, como instrumento de aprendizagem, tem de ser "qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm regras ou métodos prescritos ou memorizados, nem há um sentimento, por parte dos estudantes, de que há um método 'correto' específico de solução".

Membros do GTERP, querendo chamar a atenção para o essencial na concepção do que é um problema, tentando resumir essas várias concepções levantadas, dizem que *"problema é tudo aquilo que não se sabe fazer mas que, de alguma forma, se está interessado em resolver".*

Atualmente, o processo de ensino-aprendizagem da Matemática procura se preocupar com a compreensão, interpretação e a resolução de situações-problema que permitam ao aluno reorganizar e desenvolver seus conhecimentos; rever e ampliar conceitos, ideias e métodos matemáticos; buscar caminhos e estratégias próprias de resolução; desenvolver o interesse pela disciplina e construir sua autonomia. Quando se utiliza a resolução de problemas para a apreensão, construção e entendimento dos conteúdos matemáticos, encara-se esse conhecimento em elaboração e não como pronto e acabado. Isso significa aprender por meio de ações refletidas, suposições e aproximações e não apenas pela reprodução, automatização e memorização.

3.1.2 – Os objetivos da Resolução de Problemas

Pesquisas vêm mostrando ser fundamental o aprofundamento da compreensão, sobre as implicações e os objetivos da resolução de problemas, no processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Assim, se os problemas sempre se destacaram no ensino e na constituição de currículos de tal ciência, sua finalidade e outros aspectos relacionados à sua metodologia mudaram no decorrer do tempo, sendo tais mudanças levadas a efeito, principalmente com o fim de acompanhar as diversas visões sobre o modo de se ensinar Matemática, e, no âmbito desta, o emprego da resolução de problemas.

Polya, em 1944, elaborou um documento, publicado em 1ª edição em 1945, intitulado, *How to solve it*, no qual apresentava as vantagens de se utilizar a resolução de problemas no ensino de Matemática. Em seu artigo sobre a resolução de problemas de matemática na High School, no Yearbook de 1980 do NCTM, há uma nota dos editores[9] dizendo que

> Embora originalmente apresentado na edição de novembro de 1949 do Califórnia Mathematics Council Bulletin (v.7, nº2), oferece considerações sobre a resolução de problemas tão atuais quanto devem ter sido de vanguarda na época. Deveria ser lido por todos os professores de matemática, e não simplesmente por aqueles que estão lecionando matemática em High Schools

Entre essas vantagens, mostrou a prática de resolver problemas como inerente à natureza da atividade humana, além de ser fundamental para o desenvolvimento da inteligência que é, sem dúvida, o maior objetivo da educação.

Para os anos oitenta, muitos educadores matemáticos eminentes chegaram a eleger a "resolução de problemas" como a grande prioridade do ensino de matemática. Como já foi dito, em 1980, o NCTM, apresentou uma série de recomendações para o ensino de Matemática, destacando, como primeira recomendação, que a resolução de problemas fosse o foco do ensino da matemática nas escolas, nos anos oitenta.

[9] Stephen Krulik e Robert E. Reys, traduzido em 1997 por Hygino H. Domingues e Olga Corbo, pela editora Atual

Segundo Schroeder e Lester (1989), a função mais importante de uma metodologia é a de desenvolver a compreensão da Matemática nos educandos. As indicações de que um estudante entende, interpreta mal ou não entende ideias matemáticas específicas surgem, com frequência, quando ele resolve problemas. Esses autores entendem que os alunos, que compreendem mal ou até mesmo não compreendem certos aspectos da Matemática, podem melhorar seu entendimento ao resolver problemas

Os Parâmetros Curriculares Nacionais - Matemática - 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental - (1998, p. 8) pedem, ao professor, que ajude seu aluno “a questionar a realidade, formulando problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação”.

Para Contreras e Carrilo (1998), a tendência tradicional que se encontra em uso até hoje, como se vê nos livros didáticos e é trabalhada por numerosos professores, consiste em assimilar e aplicar a teoria dada. A tendência tecnológica consiste em usar a teoria de uma forma pragmática, introduzindo um tema e aproveitando conhecimentos prévios a fim de melhorar o entendimento da teoria. A tendência espontaneísta consiste em adquirir conhecimentos para provocar atitudes positivas, no sentido de fazer com que os alunos se comprometam com sua própria aprendizagem. A tendência investigativa envolve o aprendizado de heurísticas e análise de processos visando à construção e à formalização de conceitos.

Ricardo Cantoral, em D’Amore (2007, p.315), ao relacionar a cognição e o conhecimento, disse que

> Conhecimento é a informação sem uso; o saber é a ação deliberada para fazer do conhecimento um objeto útil diante de uma situação problemática. Disso se deduz que a aprendizagem é uma manifestação da evolução do conhecimento em saber. A aprendizagem consiste, portanto, em dar a resposta correta antes da situação concreta.(CANTORAL apud D’Amore, 2007, p.315)

significando, para nós que, ao resolver um problema, o aluno trabalha sobre um conhecimento prévio de matemática que possui e, através da resolução desse problema, ao elaborar sobre esse conhecimento, o transforma em saber, mesmo antes de ter resolvido o problema.

Segundo Onuchic (1999, p 207),

> Um objetivo de se aprender matemática é o de poder transformar certos problemas não rotineiros em rotineiros. O aprendizado, deste modo, pode ser visto como um movimento do concreto (um problema do mundo real que serve como exemplo do conceito ou da técnica operatória) para o abstrato (uma representação simbólica de uma classe de problemas e técnicas para operar com esses símbolos).(ONUCHIC, 1999, p.207)

3.1.3 – A Resolução de Problemas e o Ensino-Aprendizagem de Matemática

Apesar de bastante vasta a literatura de pesquisa em Educação Matemática a respeito de Resolução de Problemas, encontrada em muitos textos e livros-texto de Matemática, Schroeder e Lester (1989, p.32), afirmam que a expressão "*resolução de problemas*" nem sempre foi bem compreendida. Esses autores encontraram, em seus estudos, na década de oitenta, duas formas de compreender esse termo presente na recomendação da "Agenda para a Ação" que dizia ser a resolução de problemas o foco da matemática escolar para essa década: *ensinar sobre* e *ensinar para*.

Entendia-se ensinar *sobre resolução de problemas* com o significado de trabalhar esse assunto como um novo conteúdo, adicionando a esse trabalho um número de heurísticas ou estratégias. Enfim, teorizando sobre o assunto.

Ensinar *para resolver problemas* tinha o significado de concentrar-se na maneira como a matemática é ensinada e o que dela pode ser aplicada na resolução de problemas rotineiros e não rotineiros. Segundo Onuchic (1999), embora a aquisição de conhecimento matemático seja importante, a proposta essencial para se aprender matemática é a de ser capaz de usá-la. Em consequência disso, dão-se aos alunos muitos exemplos de conceitos e estruturas matemáticas a respeito daquilo que estão estudando e muitas oportunidades de aplicar essa matemática construída ao resolver problemas.

No final da década de oitenta, com todas essas recomendações de ação, pesquisadores passaram a questionar o ensino e o efeito de estratégias e modelos. Começaram a discutir as perspectivas didático-pedagógicas da resolução de problemas que passaram a ser pensadas como uma metodologia de ensino, como um ponto de partida e um meio de se ensinar matemática. Então, começou-se a falar em ensinar matemática *através da resolução de problemas.*

3.1.3.1 – Ensinar Matemática teorizando *sobre* resolução de problemas

Polya, em 1945, foi um dos precursores no estudo deste tema. Muitos estudiosos seguem sua abordagem, eles defendem a ideia de que, a fim de atender às peculiaridades presentes na tarefa de solucionar situações-problema, é preciso que se adotem estratégias que possam facilitar uma orientação de como se resolve tal situação.

A obra intitulada *How to Solve it* (1945), de Polya, tornou-se referência nesse assunto, tendo sido traduzida para o português em 1978, por Heitor Lisboa de Araújo com o nome de *A Arte de Resolver Problemas.*

Nessa obra, Polya inseriu seu "roteiro", com orientações sobre como resolver um problema, dividido em quatro partes: a) compreender o problema; b) estabelecer um plano; c) executar o plano e d) fazer um retrospecto para examinar a solução obtida. Alguns dos muitos seguidores de Polya entendem que, para bem cumprir a tarefa de resolução de problemas, é preciso que se adotem estratégias a fim de se dar ao trabalho uma orientação específica, isto é, os passos necessários para sua resolução: ensinar a resolver problemas, ou, conforme defendem Schroeder e Lester (1989), "ensinar sobre a resolução de problemas."

Onuchic (1999, p.210) escreveu que, para Polya,

> “resolver problemas” era o tema mais importante para se fazer matemática e “ensinar o aluno a pensar” era a sua importância primeira. Um tema que fundamenta a investigação e resolução de problemas em matemática é “como pensar”. Polya insistia que se tomasse muito cuidado nos esforços feitos para se ensinar a “como

> pensar” e que, na resolução de problemas, não se transformasse em ensinar “o que pensar” ou “o que fazer”. (ONUCHIC, 1999, p.210)

3.1.3.2 – Ensinar Matemática *para* resolver problemas

A segunda abordagem, no que se refere a expressão “resolução de problemas”, destinada a atividades de ensino da Matemática, foi a de ensinar primeiramente o conteúdo de matemática que se acreditasse necessário para, depois, resolver problemas, isto é, propor problemas para os estudantes resolverem mas ajudá-los a usar e aplicar recursos dados para chegar à solução.

Essa mesma ideia é encontrada no trabalho de Thompsom (1989), quando recomenda ser a resolução de problemas mais um conteúdo a ser ensinado. Thompsom explicava que havia dificuldades para a implementação desse método, devidas às interrelações que o aluno devia estabelecer entre: a) seus recursos matemáticos (conceitos, conhecimento de fatos e de procedimentos); b) Heurísticas, ou seja, métodos e regras de invenção e descoberta matemáticas; c) controle dos mecanismos necessários à coordenação desses recursos e processos; d) crenças dos alunos sobre matemática em geral, e de resolução de problemas em particular; e e) a variedade de fatores afetivos e contextuais que conduzem ao desempenho da resolução de problemas.

Segundo Schroeder e Lester (1989), o grande risco dessa abordagem é o de se considerar a resolução de problemas como uma atividade que só pode ser realizada depois da transmissão de um novo conceito ou do treino de alguma habilidade de cálculo ou algoritmo.

A concepção de resolução de problemas, como mera aplicação de conteúdos e que muitos autores apontam como simplista, é vista, por Contreras e Carrillo (1998) como uma tendência tecnológica, onde a resolução de problemas seria apenas usada para dar à teoria um emprego prático.

Van de Walle (2001) entende haver uma clara separação entre o fato de ensinar matemática e o de resolver problemas, pois, dessa forma, os problemas servem somente como uma forma de avaliar se o aluno aprendeu a aplicar a teoria trabalhada, ou seja, é usado como um exercício de fixação e/ou verificação.

3.1.3.3 – Ensinar Matemática *através da* resolução de problemas

A atividade matemática escolar não se limita a olhar para coisas prontas e definitivas, mas para a construção e a apropriação, pelo aluno, de um conhecimento do qual se servirá para compreender e transformar a realidade.

Para Santos (2002, p.14) a resolução de problemas se liga a um processo histórico de construção do conhecimento científico. Ele diz que

> esse modelo coloca o aluno na situação de alguém que precisa resolver um certo problema, mas que não possui a ferramenta necessária ou mais econômica para fazê-lo; nessa situação, não existe outra solução, para o sujeito, que [não seja] construir essa ferramenta que permite a resolução de seu problema, numa situação análoga àquela vivida no processo de construção dos conceitos científicos.(SANTOS, 2002, p.14)

O intenso trabalho desenvolvido na década de oitenta, em torno das situações-problema, não proporcionou a melhora esperada na aprendizagem pretendida. Daí a razão de se pensar na possibilidade de usar essas situações-problema como um meio de se ensinar Matemática, em tentativas associadas à retomada das ideias do construtivismo, segundo as quais os estudantes não são mais considerados recipientes vazios ou *tábulas rasas* a serem preenchidos, mas seres pensantes aos quais se devem dar oportunidade de interpretar as situações-problema, com o uso de conhecimentos prévios adquiridos e disponíveis para a construção de conhecimentos novos.

Segundo Onuchic (1999, p 207),

> ao se ensinar matemática através da resolução de problemas, os problemas são importantes não somente como um propósito de se aprender matemática mas, também, como um primeiro passo para se fazer isso. O ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com uma situação-problema que expressa aspectos-chave desse tópico e são desenvolvidas técnicas matemáticas como respostas razoáveis para problemas razoáveis.(ONUCHIC, 1999, p.207)

Como já dissemos, Schoenfeld (1989) advoga que o ambiente de sala de aula de Matemática deve propiciar uma forma de aprendizagem com sentido, de modo que o ensino da Matemática deveria ser um meio voltado a um fim e não um fim em si mesmo. Isso leva os alunos, muitas vezes, a automatizar procedimentos por memorização. Se um desses dados problemas exigisse um caminho diferente, os alunos não mais seriam capazes de resolvê-lo. Então, simplesmente repetem, não param para pensar sobre cada problema individualmente, não veem sentido no que leem e no que fazem.

Isso nos leva à constatação de que simplesmente dominar procedimentos formais da Matemática não significa aprender Matemática, ou seja, não significa *pensar matematicamente*, quando o desejável seria que os educandos fossem estimulados a pensar matematicamente, seja dominando os instrumentais matemáticos, seja adquirindo a compreensão de que tal procedimento é uma atividade que dá sentido às coisas e que ambos os aspectos estão relacionados.

Observando e analisando os aspectos relevantes dos diferentes modos de abordar esse procedimento, Schroeder e Lester (1989) enfatizam que o ensino de matemática através da resolução de problemas seria a abordagem mais coerente com as recomendações do NCTM: a) habilidades e conceitos matemáticos devem ser aprendidos no contexto da resolução de problemas; b) o desenvolvimento de processos de pensamento de ordem superior deve ser estimulado por meio de experiências em resolução de problemas; e c) o ensino de Matemática deve ocorrer, por investigação orientada, em um ambiente de resolução de problemas.

Tratando das habilidades do professor para colocar em prática esses novos procedimentos, Noddings (1989) afirma que o mestre deve ter uma visão mais avançada, conseguindo uma análise dos problemas e dos novos conceitos que serão ensinados, de modo que as sub-habilidades básicas dos alunos possam ser diagnosticadas, ensinadas ou revisadas, a fim de conseguir que os alunos percebam o que é mais importante e o que é auxiliar ou secundário.

Seria bom repetir que essa abordagem de resolução de problemas não exclui as demais concepções, pois, ao adotar tal metodologia, os alunos aprendem tanto *sobre* resolução de problemas, como conhecer matemática *para* resolver novos problemas *através da resolução de problemas*. Embora Van de Walle (2001) afirme ser difícil ensinar matemática através da resolução de problemas, apresenta algumas razões que justificam esse esforço e entre elas estão: a) a resolução de problemas coloca o foco da atenção dos estudantes sobre as “ideias” e sobre o "dar sentido" a elas; b) a resolução de problemas envolve os estudantes nos cinco padrões de processo descritos nos Standards 2000: resolução de problemas, raciocínio e prova, comunicação, conexões e representação; c) a resolução de problemas desenvolve nos estudantes a crença de que eles são capazes de fazer Matemática e de que ela faz sentido, isto é, aumenta a confiança e a auto-estima dos estudantes; d) a resolução de problemas fornece, ao professor, dados de avaliação que lhe permitem tomar decisões sobre o ensino e ajudar os estudantes a ter sucesso com a aprendizagem e e) os alunos se entusiasmam com o desenvolvimento da capacidade de compreensão que experimentam por meio de seu próprio raciocínio.

3.2 – A Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática ***através*** da Resolução de Problemas, na sala de aula

Até aqui descrevemos as razões que, acreditamos, fazem com que, a partir de problemas, os alunos possam ser conduzidos à construção do conhecimento. Mas, como fazer funcionar essa dinâmica?

Admite-se, hoje, que a visão colocada em 1989, pelos Standards do NCTM, pedindo uma reforma na matemática escolar, objetivando à criação de uma posição coerente com o que significa ser matematicamente alfabetizado, assumindo uma coleção de padrões que permitissem uma diretriz para guiar essa revisão do currículo matemático escolar e de sua correspondente avaliação, não atingiu seus propósitos.

Segundo Van de Walle (2001), mudança está ocorrendo na Educação Matemática sem dúvida, porém num ritmo bastante lento. Isso, todavia, não é razão para desânimo, a revolução por uma melhora e o que se apresenta a nós, professores, como forma de trabalhar nesse movimento é um desafio. Nesse processo, o aluno deve ser visto como a parte mais importante e o professor deve desenvolver nele autoconfiança e compreensão.

Quatro ideias estão sendo trabalhadas no contexto desse movimento de reforma. Assim, no que se refere ao professor, ele deve

- Gostar da disciplina Matemática, e isso significa trabalhar a Matemática com prazer;
- Compreender como os alunos aprendem e constroem suas ideias, ouvindo-os e deixando-os falar e discutir matematicamente;
- Ter habilidade em planejar e selecionar tarefas, de modo a poder contribuir para o crescimento dos alunos quanto à aprendizagem, num ambiente de resolução de problemas;
- Ter habilidades em integrar sempre a avaliação com o processo de ensino.

Sabemos que os conceitos matemáticos criados pelos alunos, em qualquer nível, são formados passo a passo, ao longo do tempo, depois que eles tenham refletido sobre essas ideias e feito testes durante o trabalho em variados caminhos.

Em Onuchic; Allevato (2005, p.220) podemos ler

> Os conceitos matemáticos que os alunos criam, num processo de construção, não são as ideias bem formadas concebidas pelos adultos. Novas ideias são formadas pouco a pouco, ao longo do tempo, quando os alunos refletem ativamente sobre elas e as testam através dos muitos diferentes caminhos que o professor pode lhes oferecer. Aí está o mérito das discussões entre os estudantes em grupos de trabalho. Quanto mais condições se deem aos alunos para pensar e testar uma ideia emergente, maior é a chance de essa ideia ser formada corretamente e integrada numa rica teia de ideias e de compreensão relacional (...) Nesse contexto se insere a Metodologia de "Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas", que se constitui num caminho para se ensinar Matemática através da Resolução de Problemas e não apenas para se ensinar a resolver problemas. Nela, conforme já foi recomendado pelos PCN, o problema é um ponto de partida e, na sala de aula, através da Resolução de Problemas, deve-se fazer conexões entre os diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos. Numa sala de aula onde o trabalho é feito com a abordagem de ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas, busca-se usar tudo o que havia de bom nas reformas anteriores: repetição, compreensão, o uso da linguagem Matemática da teoria dos conjuntos, Resolução de Problemas e, às vezes, até a forma de ensino tradicional. (ONUCHIC;ALLEVATO, 2005, p.220)

Campbell (1996) lembra a importância dos professores no processo de conseguir fazer com que seus alunos empreguem conhecimentos anteriores, com o fim de saber o que precisa de certa dose de atenção e que lacunas devem ser preenchidas. A autora, todavia, refere que a falta de conhecimentos anteriores não deve ser usada como justificativa para limitar a oportunidade de os estudantes aprenderem algo novo.

Campbell (1996) também entende que os conceitos matemáticos devem ser examinados à luz de situações-problema para se tornarem significativos. Assim, mesmo problemas abstratos podem ser significativos se o aluno os compreende e, de fato, empenha-se em sua resolução. Esta autora aconselha que o ensino de

Matemática deva ocorrer em um ambiente caracterizado pela investigação orientada pela resolução de situações-problema.

Em Onuchic; Allevato (2005, p.222), o

> Ensino-aprendizagem de um tópico matemático deve sempre começar com uma situação-problema que expressa aspectos-chave desse tópico e técnicas Matemáticas devem ser desenvolvidas na busca de respostas razoáveis à situação-problema dada. O aprendizado, deste modo, pode ser visto como um movimento do concreto (um problema do mundo real que serve como exemplo do conceito ou da técnica operatória) para o abstrato (uma representação simbólica de uma classe de problemas e técnicas para operar com estes símbolos). (ONUCHIC;ALLEVATO, 2005, p.222)

3.2.1 – O Ensino de Matemática *através* da resolução de problemas na sala de aula

Pode-se notar que a matemática que deve ser trabalhada através da resolução de problemas é uma ideia que está ganhando força. Nesse sentido, pode-se perceber que atividades envolvendo problemas se apresentam como caminhos pelos quais os currículos devem ser desenvolvidos e que, como consequência, podem produzir aprendizagem.

Van de Walle (2001, p.44) diz que

> ensinar matemática através da resolução de problemas não significa simplesmente apresentar um problema, sentar-se e esperar que uma mágica aconteça. O professor, diz ele, é responsável pela criação e a manutenção de um ambiente matemático, motivador e estimulante, no qual a aula deve transcorrer. (VAN DE WALLE, 2001, p.44)

Van de Walle (2001) diz que, para que isso ocorra, é preciso que ao planejar-se uma aula, ela seja vista como composta por três importantes partes: ANTES, DURANTE e DEPOIS.

Para a primeira parte: ANTES, o professor deve garantir que os alunos estejam mentalmente prontos para receber a tarefa e assegurar-se de que todas as suas expectativas estejam claras.

Na segunda: DURANTE, os alunos em grupos trabalham e o professor observa e avalia esse trabalho.

Na terceira: DEPOIS, o professor aceita as resoluções dos grupos e conduz uma discussão que leva os alunos a justificarem e avaliarem os resultados e os métodos de cada grupo. Depois o professor, em sua total responsabilidade, formaliza tudo o que de novo em matemática foi construído, relatando com notação e terminologia corretas tudo o que foi trabalhado.

Aí se nota uma grande diferença entre o ensino de Matemática tradicional e o ensino de Matemática através da resolução de problemas. No tradicional o conteúdo de matemática necessário à resolução de um problema é dado antes e alguns exemplos são colocados. Somente depois é que os alunos passam a resolver os problemas que se encontram, como nos livros didáticos, numa lista, no fim do capítulo.

> A Resolução de Problemas deve ser vista como a principal estratégia de ensino, e chama-se a atenção para que o "ensinar" comece sempre onde estão os alunos, ao contrário da forma usual em que o ensino começa onde estão professores, ignorando-se o que os alunos trazem consigo para a sala de aula. Ainda, pode-se ver que o valor de se ensinar a partir de problemas é muito grande e, apesar de ser difícil, há boas razões para empreender esse esforço. (ONUCHIC E ALLEVATO (2005, p.222), apud VAN DE WALLE (2001, p.41)).

Entretanto, é importante dizer que há um significativo confronto entre as novas e as velhas crenças, orientações e práticas. Então, não é uma tarefa fácil convencer o professor e nem os alunos, acostumado a uma prática já consolidada, a mudar seu modo de agir, principalmente porque, ao adotar o ensino de matemática através da resolução de problemas, é-lhe de fundamental importância ter clareza sobre aquilo em que acredita e deseja fazer e o que é pertinente ao ensino. Enfim, é difícil, para muitos professores, abrir mão do costumeiro apego ao cumprimento dos conteúdos programáticos, em prol de grandes ideias, bem como saber escolher quais são os conteúdos centrais e quais os secundários e, ainda, depois dessa escolha, conseguir propor bons problemas que possam ajudar o aluno a alcançar seus objetivos.

3.2.2 – Aspectos didáticos da Resolução de Problemas como uma metodologia

Como já foi dito, não há dúvidas de que ensinar com problemas é difícil. As atividades precisam ser planejadas ou selecionadas para cada aula, levando-se em conta a compreensão dos alunos e as solicitações do currículo. Se o professor faz uso de um livro-texto tradicional, é preciso, muitas vezes, que adaptações sejam feitas, de modo a se encaixarem nas normas da nova metodologia. Se os alunos nunca trabalharam cooperativamente, precisam ser adequadamente conscientizados sobre essa diferente forma de trabalho. Se tarefas extra-classe, oferecidas com frequência e cobradas rigorosamente, não faziam parte de sua rotina, como fazer para que isso se torne uma exigência? Assim, muitas coisas mudam ao se fazer mudanças que se acreditam importantes para uma melhora significativa ao ensino e à aprendizagem de matemática.

Entretanto, há boas razões para se fazer esse esforço. Segundo Onuchic & Allevato Onuchic (2005), podem-se enunciar algumas delas assim:

- Resolução de problemas coloca o foco da atenção dos alunos sobre “ideias” e sobre o “dar sentido”. Ao resolver problemas, os alunos necessitam refletir sobre ideias que são inerentes ou estão ligadas ao problema;
- Resolução de problemas desenvolve nos alunos um “poder matemático”, isto é, uma capacidade matemática, uma “matemática forte”. Os estudantes, ao resolverem problemas, em sala de aula, se engajam nas diferentes estratégias, convenientes aos diferentes problemas dados, permitindo avançar na compreensão de novos conteúdos que estão sendo construídos na sala de aula;
- Resolução de problemas desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer matemática e de que a matemática faz sentido, sendo que, cada vez que a classe resolve um problema, a compreensão, a confiança e a autovalorização dos estudantes aumenta;

- Resolução de problemas fornece dados de avaliação contínua que podem ser usados para se tomar decisões instrucionais, ajudar os alunos a serem bem sucedidos e informar os pais sobre a realidade dos filhos;
- É bom, é gostoso! Professores que experimentam ensinar dessa maneira nunca querem voltar a ensinar do modo "ensinar dizendo". A excitação de desenvolver a compreensão dos alunos, através de seu próprio raciocínio, vale todo o esforço feito e, de fato, pode-se até tornar divertido, tanto para o professor como para os alunos;
- A formalização de toda teoria matemática pertinente a cada tópico trabalhado, dentro do programa assumido, feita pelo professor no final da atividade, passa a fazer mais sentido para os alunos.

3.2.3 – A Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas aplicada na sala de aula

Campbell (1996), alinhando algumas singularidades do ensino de matemática à luz da teoria construtivista, afirma que o professor deve dar oportunidade aos alunos de construírem seu próprio conhecimento, a partir de conhecimentos prévios, privilegiando o raciocínio e não a obtenção de respostas esperadas, propiciando-lhes tempo para pensar, explicar ou justificar suas respostas, questionando-os, ouvindo-os e estimulando-os a levar em conta as opiniões de seus colegas, explorando conceitos matemáticos relativos à resolução de problemas e trabalhando com grupos diversificados de alunos num processo cooperativo e colaborativo.

Para Van de Walle (2001), um problema proposto para melhorar a aprendizagem de matemática deve apresentar três características:

- deve começar a partir dos conhecimentos que os alunos têm;
- estar relacionado com o conteúdo matemático que se pretende que eles aprendam, de modo que questões secundárias não se tornem, ou desviem, o foco do trabalho de resolução do problema;

- o problema deve exigir justificativas e explicações para as respostas e métodos apresentados.

Com autorização das autoras, Onuchic; Allevato (2009), membros do GTERP e, em se tratando de prática usual em nossas aplicações de ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas, transcrevemos inteiramente, neste item, alguns trechos de seu artigo “Formação de Professores - Mudanças na Licenciatura em Matemática”, publicado no Livro Educação Matemática no Ensino Superior - Pesquisas e debates, organizadoras Maria Clara Rezende Frota e Liliam Nasser, no capítulo 10, página 169, editado pela SBEM em 2009.

Há muito tempo, a Resolução de Problemas tem sido um tópico presente nos currículos de Matemática. No entanto, ela tem experimentado um processo de ressignificação, de modo que novas formas de concebê-la têm sido consideradas e as levam a novas formas de trabalho em sala de aula. Uma concepção bastante atual refere-se à Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas que se constitui num caminho para se ensinar Matemática e não apenas para se ensinar a resolver problemas. Nela, o problema é um ponto de partida e orientação para a aprendizagem, e os professores, através e durante a resolução dos problemas, devem fazer conexões entre os diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos (Onuchic; Allevato, 2005).

Allevato; Onuchic (2006) destacam que quando se faz uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, há uma forte atividade de investigação tanto por parte do professor quanto por parte do aluno. O professor deve escolher ou criar problemas adequados à construção de novo conhecimento sobre um determinado tópico do programa, daquela determinada série; selecionar, entre muitas, as estratégias mais adequadas à resolução daquele problema; planejar questões-chave, para conduzir os alunos na análise dos resultados apresentados e chegar ao consenso sobre os resultados obtidos; e preparar a melhor formalização dos novos conceitos e novos conteúdos construídos a partir do problema dado.

Os alunos investigam quando buscam, usando seus conhecimentos já construídos, descobrir caminhos e decidir quais devem tomar para resolver o problema, trabalhando cooperativamente e colaborativamente, relacionando ideias e discutindo o que deve ser feito para chegar à solução.

Apesar de não haver formas rígidas de programar e colocar em prática o trabalho com Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, com o auxílio de um grupo de professores de um curso de Educação Continuada, em 1998 foi redigido um roteiro de atividades que pode servir como referência ou orientação aos professores interessados em trabalhar com essa metodologia.

1) Formar grupos - entregar uma atividade

Lembrar que, no mundo real, aprender é muitas vezes um processo compartilhado e que o progresso em direção a um objetivo vem através de esforços combinados de muita gente. É preciso que os estudantes experimentem este processo cooperativo e que se lhes dê a oportunidade de aprender uns com os outros. Sentimos que muito da aprendizagem em sala de aula será feita no contexto de pequenos grupos.

2) O papel do professor

Dentro desse trabalho, o papel do professor muda de comunicador de conhecimento para o de observador, consultor, mediador, interventor, controlador e incentivador da aprendizagem. O professor lança questões desafiadoras e ajuda os alunos a se apoiarem, uns nos outros, para atravessar as dificuldades. O professor faz a intermediação, leva os alunos a pensar, espera que eles pensem, dá tempo para isso, acompanha suas explorações e resolve, quando necessário, problemas secundários.

3) Resultados na lousa

Com o trabalho dos alunos terminado, o professor anota na lousa os resultados obtidos pelos diferentes grupos. Anota resultados certos, errados e aqueles feitos por diferentes caminhos.

4) Plenária

Chama os alunos, de todos os grupos, para uma assembléia. Como todos trabalharam sobre o problema dado, estão ansiosos quanto a seus resultados. Procuram defender seus pontos de vista e participam.

5) Análise dos resultados

Nesta fase, os pontos de dificuldade encontrados pelos alunos são novamente trabalhados. Surgem, outra vez, problemas secundários que, se não resolvidos, poderão impedir que se leve o trabalho à frente. O aspecto exploração é bastante importante nesta análise.

6) Consenso

A partir da análise feita, com a devida retirada das dúvidas, busca-se um consenso sobre o resultado pretendido.

7) Formalização

Num trabalho conjunto de professor e alunos, com o professor dirigindo o trabalho, é feita uma síntese do que se objetivava aprender a partir do problema dado. São colocadas as devidas definições, identificadas as propriedades e feitas as demonstrações. É importante destacar, nesse momento, o que de matemática nova se construiu, usando as novas terminologias próprias ao assunto.

Refletindo sobre esse roteiro criado e analisando o trabalho em sala de aula a partir de problemas, ele foi *revisto e aprimorado* e, agora, considera as seguintes etapas:

1) Formar grupos e entregar a atividade

O professor apresenta o problema aos alunos que, após uma leitura individual, distribuem-se em pequenos grupos, leem novamente e tentam interpretar e compreender o problema. Ressalta-se que o conteúdo necessário, ou mais indicado, para a resolução do problema dado ainda não foi trabalhado em sala de aula. O problema proposto aos alunos, que chamamos problema gerador, é que, durante o processo de resolução, conduzirá ao conteúdo que o professor planejou construir naquela aula.

2) Observar e incentivar

O professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos tentam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. O professor faz a intermediação no sentido de levar os alunos a pensar, dando-lhes tempo para tal, e incentivando a troca de ideias entre os alunos.

3) Auxiliar nos problemas secundários

O professor incentiva os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios ou técnicas já conhecidas para resolver o problema, estimula-os a escolher diferentes métodos a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que atenda aos alunos em suas dificuldades, colocando-se como um interventor e questionador, acompanhando suas explorações e ajudando-os, quando necessário, a resolver problemas secundários. Trata-se de dúvidas apresentadas pelos alunos no contexto do vocabulário presente no enunciado, no contexto da leitura e interpretação, além daqueles que podem surgir por ocasião da resolução do problema: notação, passagem da linguagem vernácula para linguagem matemática, conceitos relacionados, técnicas operatórias, a fim de possibilitar a continuidade do trabalho.

4) Registrar as resoluções na lousa

Representantes dos grupos são convidados a registrar suas resoluções na lousa. Resoluções certas e erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.

5) Realizar uma Plenária

O professor chama todos os alunos para discutirem as resoluções realizadas pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos, pois este é um momento bastante rico para a aprendizagem.

6) Buscar um consenso

Após sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto.

7) Formalizar o conteúdo

Neste momento, denominado "formalização", o professor faz uma apresentação formal dos novos conceitos e conteúdos construídos, destacando as diferentes técnicas operatórias e as propriedades qualificadas para o assunto.

Esta dinâmica que foi apresentada formalmente aqui é, de fato, a que será conhecida como a Metodologia de Trabalho em sala de aula, em nossa pesquisa.

Assim, juntando as situações de Antes, Durante e Depois, de Van de Walle e fazendo uso dessa Metodologia de Trabalho em sala de aula, nossa “Sala de Aula”, o terceiro eixo temático de nossa pesquisa, colaborará com nosso trabalho no ensino de **Integrais.**

CAPÍTULO 4

A SALA DE AULA NA ENGENHARIA

Capítulo 4 – A SALA DE AULA NA ENGENHARIA

Introdução

Retomando o Modelo Modificado, criado dentro da sequência de Romberg, podemos ver que a atividade 3 desse modelo de Romberg – Relacionar com ideias de outros – pedia, para nossa pesquisa: História da Integral como parte da História da Matemática; Resolução de Problemas vista como uma Metodologia de ensino – Metodologia de Ensino–Aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas; e como terceiro eixo temático, para a fundamentação teórica de nossa pesquisa, apareceria nossa Sala de Aula onde, trabalhando Cálculo num curso de ensino superior, visávamos ao ensino e a aprendizagem de *Integrais.*

A Matemática e a Sociedade

Como já dissemos, nosso propósito, neste item é o de compilar o que outros nos disseram sobre os componentes de uma sala de aula. No livro Math Worlds – Philosophical and Social Studies of Mathematics and Mathematics Education[6], o artigo de Roland Fischer, no Capítulo 6, na página 113, pode–se ler que

> As reivindicações das ciências variam ao influenciar o que fazem os homens. Por um lado, estão as ciências como física ou sociologia que se satisfazem em descrever o que são. Por outro lado, tem–se as ciências técnicas ou a pedagogia que dão, mais ou menos, pistas de como os humanos devem agir. Uma questão importante sobre isso é aquela de conhecer as relações entre a matemática e a sociedade. Usualmente esse tópico é estudado em disciplinas como sociologia ou história da ciência. Pretende–se influenciar a relação *matemática* $\Leftrightarrow$ *sociedade* através da educação matemática. A disciplina acadêmica correspondente, Didática da Matemática, pode se mostrar como um esforço coletivo para estudar e moldar a relação entre os homens por um lado e a matemática por outro. (FISCHER, 1993 p.113)

Esse autor ainda escreve, sobre A Matemática vista como um Meio (recurso) e como um Sistema , dizendo que

> Uma das ideias fundamentais para justificar esse título é que a Matemática dá um meio para os indivíduos explicarem e controlarem situações complexas do ambiente natural e do artificial, e para se comunicarem sobre aquelas situações. Por outro lado, a Matemática é um sistema de conceitos, algoritmos e regras, em nós incorporado, em nosso pensar e no nosso fazer; nós estamos sujeitos a esse sistema, ele determina partes de nossa identidade. Esse sistema caminha desde quantificações diárias para elaborar padrões de fenômenos naturais até mecanismos complexos da ciência moderna. Na base de considerações matemáticas, definimos relações da ciência entre as pessoas e definimos o que é justiça. Assim, vejo matemática de um lado como um meio, que podemos manusear como uma ferramenta, e do outro, como um sistema, que temos que obedecer e que está inseparavelmente conectado com nossa organização social (...) sendo que o aspecto do meio e o aspecto do sistema são inseparáveis. Assim, falo de uma dualidade da matemática como um meio e como um sistema. (FISCHER, 1993 p.113)

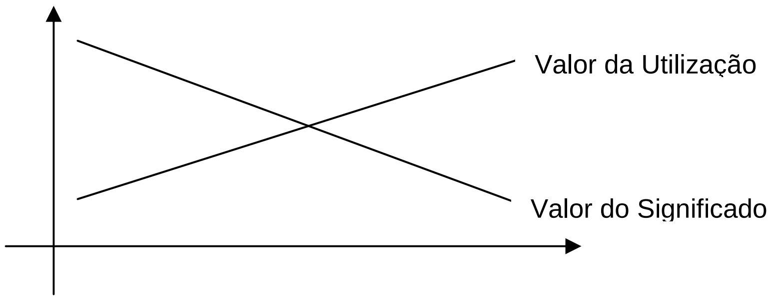
[6] Livro editado por Sal Restivo et al, da Suny Series in Science, Tecnology, and Society, e publicado pela State University of New York, Albany – USA, em 1993.

Na página 114, ele continua, dizendo que

> negligenciando o lado sistêmico da matemática, tornamos absoluto o aspecto do meio. Hoje a relevância da matemática para a sociedade é primeiramente vista em termos de seu papel como um meio eficiente para resolver problemas. Esse é, também, o caso para a relevância das ciências naturais e, num sentido mais fraco, também para as outras ciências. Mas, como mostram os estudos históricos esse não é apenas um modo possível para explicar a relevância das ciências para a sociedade. (FISCHER, 1993 p.114)

Fisher, na página 115 de seu artigo, diz que Tenbruck distingue entre "o valor do significado" e o "valor da utilização" de uma proposição científica. O primeiro refere–se ao "conteúdo do significado que uma proposição científica pode possuir antes e independente de sua utilização". "Conteúdo de significado" corresponde à possibilidade de se obter orientações para a sociedade, para suas filosofias de vida. O valor do significado e o valor da utilização não são apenas determinados pelo conteúdo de uma proposição científica. Eles dependem de condições societárias sobre o conhecimento já existente, e assim por diante.

Tenbruck, como fala Fisher, formulou a "Lei da Trivialização", como segue:



A Lei da Trivialização

Fonte: FISHER 1993, p. 116

> No progredir do conhecimento, os fatos ou leis perdem seu significado. No início, eles têm um alto valor de significado mas, usualmente, nenhum valor de utilização. No fim, eles não têm valor de significado mas, usualmente, um alto valor de utilização ... O progresso da ciência fornece mais e mais conhecimento, mas destrói seu significado ... O processo de trivialização abrevia as ciências a acontecimentos brutos, nus e crus, proposições sobre simples fatos. A ciência não é mais uma fonte de legitimação para a

> sociedade, ou ela se torna uma fonte muito problemática. (TENBRUCK, 1975 p.23-24 apud FISCHER, 1993,)

4.1 – A Matemática no Ensino Superior

Assim como os homens, para se comunicarem no mundo das ideias, precisam conhecer sua língua vernácula, precisam, também, para se comunicar no mundo das quantidades, do conhecimento matemático.Dessa forma, é necessário que se defina uma linguagem matemática que expresse, fatos de um modo claro, livre de afirmativas dúbias e de uma complexidade inútil e que atenda à descoberta do porquê e do como.

Do site http://www.pp.ufu.br/paineis/PAINEL%203.pdf, extraído em 05 de agosto de 2009, Artur J.S. Fernandes, do Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal Fluminense, falando sobre o Ensino Superior e a Matemática, diz que

> Ao longo dos séculos muita gente tem se preocupado com o ensino da matemática, não somente a matemática trabalhada nas escolas mas, também, a matemática de fora da escola. Disse ele que atualmente a sociedade requer homens em condições de compreender e de descrever com rigor os avanços científicos quase sempre conhecidos através da matemática e que se pode verificar que há duas formas para se ensinar matemática: uma é realizada com um ensino apoiado na experiência e o outro apoiado na construção de conceitos, procedimentos e princípios. E fácil observar que, por suas próprias características, o ensino pela experiência é mais prazeroso e, de certa forma, atende mais facilmente a condição do aprendiz que, em razão das preocupações recentes sobre a qualidade do ensino superior, começaram a surgir diversas linhas de análise. Uma delas, ao estimular a criatividade do aluno em adquirir o conhecimento, faz uso da experiência de Leonardo Da Vinci (1452–1519), considerado um homem da práxis. (...) O ensino superior, mais do que as etapas de ensino anteriores, tem a *motivação* por ingrediente básico para o sucesso do seu processo formativo. Aumentar o nível da motivação leva inevitavelmente a entender e praticar o ato de aprender através da dicotomia satisfação–frustração, cujo resultado é o prazer intelectual do conhecimento. A prática de tal concepção pode encontrar graus de dificuldade em sua aplicação dada a natureza das matérias envolvidas.

Marcos Masetto em seu livro “Docência Universitária”, de 1998, nas páginas 12 e 13, escreveu que

> Colocar a aprendizagem na prática como objetivo central da formação dos alunos significa iniciar pela alteração da pergunta que fazemos regularmente quando vamos preparar nossas aulas – *o que devo ensinar aos meus alunos?* – por outra mais coerente – *o que meus alunos precisam aprender para se tornarem cidadãos profissionais competentes numa sociedade contemporânea?* Se fizermos essa pequena experiência em nosso trabalho docente, veremos as implicações e as modificações que resultarão, de imediato, em nossas práticas pedagógicas. Com essas reflexões, queremos dizer que a *docência no ensino superior* exige não apenas domínio de conhecimentos a serem transmitidos por um professor como também *um profissionalismo semelhante àquele exigido para o exercício de qualquer profissão.* A docência nas universidades precisa ser encarada de forma profissional, e não amadoristicamente. (...) Os cursos do ensino superior no Brasil, vêm–se caracterizando pela formação de profissionais das mais diferentes áreas de conhecimento e dos mais diversos serviços de que a sociedade necessita. (...) Com a consciência crítica de que o processo de aprendizagem é o objetivo central dos cursos de graduação, a própria maneira de conceber a formação do profissional também passou por uma transformação. (MASETO, 1998, p.12-13)

Van de Walle (2001) cita

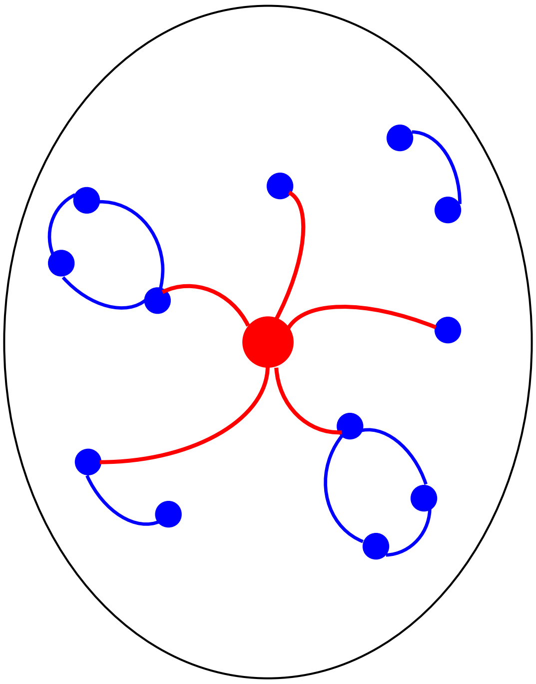
> como uma matéria prática, a matemática é uma ciência de padrão e ordem. Seu domínio não é formado por moléculas e células, mas números, chance, forma, algoritmos e mudança. Como uma ciência de objetos abstratos, a matemática se apoia sobre a lógica mais do que sobre a observação como seu padrão de verdade, ainda que empregue a observação, a simulação, e mesmo a experimentação como meio de descobrir a verdade. (MATHEMATICAL SCIENCES EDUCATION BOARD,1989, p.31)

Van de Walle, nas páginas 16 e 17 diz

> Ver uma sala de aula onde os alunos estão “fazendo matemática”, que verbos poderiam ser usados para descrever suas atividades? Para muita gente que só participou de ensino e aprendizagem de matemática quando estudou, possivelmente as respostas seriam apenas trabalhar e obter respostas ou poderiam dizer estamos adicionando ou multiplicando. Na realidade, quem “pensa matematicamente” pode identificar o “fazer matemática” por meio

> dos seguintes verbos: explorar, investigar, conjecturar, resolver, justificar, representar, formular, descobrir, construir, verificar, explicar, predizer, desenvolver, descrever e usar. Todos esses verbos indicam o processo de dar sentido e representar. Quando se está envolvido em atividades sugeridas por essa lista é, impossível para os alunos serem apenas observadores passivos. A Construção ou edificação de qualquer coisa no mundo físico requer ferramentas, materiais e esforço. A construção de ideias pode ser vista de modo análogo. As **ferramentas** que usamos para construir a compreensão são as nossas ideias existentes, o conhecimento que já possuímos. Os **materiais** de que dispomos para construir a compreensão podem ser coisas que vemos, ouvimos ou tocamos – elementos de nossos ambientes físicos. Às vezes, os materiais são nossos próprios pensamentos e ideias. O **esforço** que deve ser suprido é o pensamento ativo e reflexivo. Se as mentes não forem ativamente pensantes, nada acontece.(VAN DE WALLE, 2001 p.16-17)

O diagrama seguinte, exibido por Van de Walle,



Fonte: VAN DE WALLE, 2001, p. 27

mostra que são usadas as ideias que já temos (pontos azuis) para construir uma nova ideia (ponto vermelho), desenvolvendo no processo uma rede de conexões entre as ideias. Quanto mais ideias sejam usadas e quanto mais conexões sejam feitas, melhor se entende.

Falando sobre trabalho cooperativo e colaborativo, Van de Walle diz que trabalhar com grupos de três ou quatro alunos sobre um mesmo problema é uma estratégia extremamente útil para encorajar o falar e a interação pretendida em uma comunidade matemática. Uma sala arranjada em pequenos grupos tem, muitas vezes, mais interação e discussão do que aquela que ocorre com a sala toda. Frequentemente, uma simples parceria de estudantes é tudo o que é necessário. Em grupos ou pares, os alunos ficam muito mais desejosos e capazes de falar, explorar ideias, explicar coisas a seu grupo, questionar e aprender um com o outro, propor argumentos e ter suas próprias ideias desafiadas numa atmosfera de aprendizagem amigável.

A resolução de problemas pode ser vista como uma das principais estratégias de ensino, pois, como Van de Walle disse, na página 40 de seu livro,

> A maioria, se não todos, os conceitos e procedimentos matemáticos importantes podem ser mais bem ensinados através da resolução de problemas. Isto é, tarefas e problemas podem e devem ser propostos, de modo a engajar os alunos no pensar e no desenvolvimento de matemática importante que devem aprender. (VAN DE WALLE, 2001 p.40)

Numa citação de Hiebert et al (1997, p.25), referente à resolução de problemas, no livro de Van de Walle, nessa mesma página, lê–se “acreditamos que se quisermos alunos que compreendam matemática, é mais útil pensar na compreensão como algo que resulta da resolução de problemas mais do que algo que se possa ensinar diretamente”.

Nas páginas 40 e 41 de seu livro, Van de Walle afirma que

> O ensino deve estar centrado no aluno que, por sua vez, deve ser o co–construtor de seu próprio conhecimento. O professor deve ter consciência do conhecimento prévio que o aluno traz para sua sala de aula. Se houver lacuna entre o que o professor quer que seus alunos aprendam e o que eles, na verdade, trazem para a sala de aula, a compreensão se torna difícil. (...) Tradicionalmente, o professor ensina matemática, os alunos a praticam por um tempo, e depois espera–se que eles usem essas novas habilidades ou ideias na resolução de problemas. Esta abordagem, fortemente engrenada na nossa cultura, raramente funciona bem. Primeiro, ela começa onde está o professor e não onde estão os alunos, ignorando o que eles podem ou não trazer para a sala de aula. Assume–se que explicações maravilhosas, talvez acrescidas por materiais manipulativos, possam produzir compreensão. Embora esta abordagem às vezes tenha sucesso com alguns alunos, mostrar e dizer depende de uma absorção passiva de ideias e deixa a maioria

> dos estudantes acreditarem que a matemática é misteriosa e ultrapassa a compreensão. (VAN DE WALLE, 2001 p.40-41)

4.2 – Diretrizes Curriculares dos Cursos de Engenharia

Este Documento legal, Diretrizes Curriculares dos Cursos de Engenharia, foi extraído do site http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES1362.pdf, em 30 de julho de 2009. Em seu Relatório apresentado, aprovado em 12/12/2001, consta o Histórico da graduação nos cursos de Engenharia e nele, pode–se ler que

> O desafio com que se apresenta o ensino de engenharia no Brasil é um cenário mundial que demanda uso intensivo da ciência e tecnologia e exige profissionais altamente qualificados. O próprio conceito de qualificação profissional vem se alterando, com a presença cada vez maior de componentes associadas às capacidades de coordenar informações, interagir com pessoas, interpretar de maneira dinâmica a realidade. O novo engenheiro deve ser capaz de propor soluções que sejam não apenas tecnicamente corretas, ele deve ter a ambição de considerar os problemas em sua totalidade, em sua inserção numa cadeia de causas e efeitos de múltiplas dimensões. Não se adequar a esse cenário procurando formar profissionais com tal perfil significa atraso no processo de desenvolvimento. As IES no Brasil têm procurado, através de reformas periódicas de seus currículos, equacionar esses problemas. Entretanto essas reformas não têm sido inteiramente bem sucedidas, dentre outras razões, por privilegiarem a acumulação de conteúdos como garantia para a formação de um bom profissional.

e que

> As tendências atuais vêm indicando na direção de cursos de graduação com estruturas flexíveis, permitindo que o futuro profissional a ser formado tenha opções de áreas de conhecimento e atuação, articulação permanente com o campo de atuação do profissional, base filosófica com enfoque na competência, abordagem pedagógica centrada no aluno, ênfase na síntese e na transdisciplinaridade, preocupação com a valorização do ser humano e preservação do meio ambiente, integração social e política do profissional, possibilidade de articulação direta com a pós–graduação e forte vinculação entre teoria e prática.

Falando sobre o currículo, dizem que

> Nesta proposta de Diretrizes Curriculares, o antigo conceito de currículo, entendido como grade curricular que formaliza a estrutura de um curso de graduação, é substituído por um conceito bem mais amplo, que pode ser traduzido pelo conjunto de experiências de aprendizado que o estudante incorpora durante o processo participativo de desenvolver um programa de estudos

> coerentemente integrado.Define–se ainda Projeto Curricular como a formalização do currículo de determinado curso pela instituição em um dado momento.

Na nova definição de currículo, destacam–se três elementos fundamentais para o entendimento da proposta aí apresentada.

> Em primeiro lugar, enfatiza-se o conjunto de experiências de aprendizado. Entende-se, portanto, que C*urrículo* vai muito além das atividades convencionais de sala de aula e deve considerar atividades complementares, tais como iniciação científica e tecnológica, programas acadêmicos amplos, a exemplo do Programa de Treinamento Especial da CAPES (PET), programas de extensão universitária, visitas técnicas, eventos científicos, além de atividades culturais, políticas e sociais, dentre outras, desenvolvidas pelos alunos durante o curso de graduação. Essas atividades complementares visam ampliar os horizontes de uma formação profissional, proporcionando uma formação sociocultural mais abrangente.
>
> Em segundo lugar, explicitando o conceito de processo participativo, entende–se que o aprendizado só se consolida se o estudante desempenhar um papel ativo de construir o seu próprio conhecimento e experiência, com orientação e participação do professor.
>
> Finalmente, o conceito de programa de estudos coerentemente integrado se fundamenta na necessidade de facilitar a compreensão totalizante do conhecimento pelo estudante. Nesta proposta de Diretrizes Curriculares, abre–se a possibilidade de novas formas de estruturação dos cursos. Ao lado da tradicional estrutura de disciplinas organizadas através de grade curricular, abre–se a possibilidade da implantação de experiências inovadoras de organização curricular, como por exemplo, o sistema modular, as quais permitirão a renovação do sistema nacional de ensino.

Perfil dos Egressos

O perfil dos egressos de um curso de engenharia compreenderá uma sólida formação técnico–científica e profissional geral que o capacite a absorver e desenvolver novas tecnologias, estimulando a sua atuação crítica e criativa na identificação e resolução de problemas, considerando seus aspectos políticos, econômicos, sociais, ambientais e culturais, com visão ética e humanística, em atendimento às demandas da sociedade.

Esse documento ainda menciona: Competências e Habilidades; Estrutura do Curso; Conteúdos Curriculares; Estágios.

4.3 – O papel da Matemática na Engenharia

Ao consultar o livro “Cálculo com Geometria Analítica”, volume 1, de George F. Simmons (Wiener, apud Simmons,1987, p.VIII), tradução de Seiji Hariki, lemos uma citação de Norbert Wiener que diz

> Para mim, lógica e aprendizado e todas as atividades mentais têm sido sempre incompreensíveis como uma imagem fechada e completa e têm sido compreensíveis somente como um processo pelo qual o homem se coloca em relação ao seu ambiente. É a batalha para aprender o que é significativo, e não a vitória. (WIENER, apud SIMMONS, 1987 p.VIII)

A Engenharia, definida como a arte de aplicar conhecimentos científicos e empíricos no atendimento das necessidades humanas, tem a abordagem investigadora como parte inerente à sua estrutura. E, para efetivar essa investigação, é conveniente a utilização de uma linguagem que permita expressar universalmente os resultados encontrados. Ela é a Matemática.

Sem Matemática não há Engenharia. Também é coerente que sem “engenharia”, entendida como necessidades do mundo real, não há matemática. Ao longo da história do homem, a Aritmética surgiu como resposta às necessidades do comércio nas civilizações sumérias, a Geometria deve as suas origens às medições da terra e às navegações. O Cálculo foi originado em razão da sistematização da Astronomia e da Física. Na idade moderna, como reflexo da sociedade da informação, a matemática desenvolvida atingiu o domínio discreto, com particular destaque para a lógica.

O que há de especial no ensino da matemática para os estudantes de Engenharia? Ora, essa questão existe, sim, e é muito importante. Não existe Engenharia sem Matemática, e uma boa preparação matemática ajuda muito o futuro engenheiro, quer seja na concepção, no projeto, no desenvolvimento, na inovação, de investigação, e uma das principais “forças” da Matemática está em que as suas ideias e ferramentas são gerais, e muito do poder da Matemática, mesmo da elementar, vem-lhe precisamente da aplicabilidade de ideias gerais em vários contextos diferentes.

4.4 – O Cálculo no curso de Engenharia

A partir do livro *A prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo*, página 147, J.B. Laudares; Jonas Lachini (2001) escrevem

> O Cálculo Diferencial e Integral, um ramo da Matemática, tem como principal objetivo o estudo do movimento e da variação. Considerado como a linguagem por excelência do paradigma científico e como instrumento indispensável de pensamento para quase todas as áreas do conhecimento, desde sua consolidação no final do século XVII, com Newton e Leibniz, é colocado como disciplina básica e obrigatória em diversos cursos de graduação da área de Ciências Exatas. Dentro desses cursos, o ensino–aprendizagem de Cálculo pretende cumprir dois objetivos principais: um deles é habituar o estudante a pensar de maneira organizada e com mobilidade; o outro, estabelecer condições para que o estudante aprenda a utilizar as ideias do Cálculo como regras e procedimentos na resolução de problemas em situações concretas. O primeiro destes objetivos almeja que o estudante tenha contato com a matemática como técnica de conhecer, de pensar e de organizar; é preciso que o estudante pense sobre o significado geométrico e numérico do que está fazendo, saiba avaliar e analisar dados e explique o significado de suas respostas. O segundo está orientado para que o aluno adquira compreensão e capacidade de aplicação prática dos conceitos e definições, estando atento para que o Cálculo não se torne um mero receituário.(LAUDARES; LACHINI, 2001 p.147)

4.4.1 – O Conceito de Função

> O conceito mais importante em toda a Matemática é o de função. Não importa que ramo consideremos – Álgebra, Geometria, Teoria dos Números, Probabilidade ou outro qualquer –, quase sempre se verifica que os objetos principais de investigação são funções. Isto é particularmente verdadeiro no Cálculo, onde a maior parte do trabalho se orienta ao desenvolvimento de instrumental para o estudo das funções e a aplicação desse instrumental a problemas de outras ciências. (SIMMONS, 1987, p.36)

O conceito de função, apesar de fazer parte do currículo do Ensino Médio, não é, na maioria das vezes, bem compreendido pelos alunos que podem até fazer operações sobre elas mas sem lhes dar o devido significado.

Explorando funções

Num texto didático americano recente, de 2006, destinado a alunos de 5º a 8º ano, *middle grades*, portanto alunos de 10 a 13 anos de idade, ao trabalhar com uma metodologia alternativa de ensino: a Metodologia de Ensino–Aprendizagem de Matemática através de resolução de problemas, ao iniciar o tópico "funções", Van de Walle, destaca a necessidade de se realçar as "grandes ideias" que apoiam esse processo de ensino-aprendizagem.

De Van de Walle (2006), podemos extrair as seguintes citações:

> O raciocínio algébrico envolve uma busca por regularidade em tudo na matemática. As funções são uma das mais poderosas ferramentas neste empenho. Elas nos permitem representar relações simbolicamente, visualmente, e oralmente, e a generalizar relações entre variáveis em cada área da matemática que envolve quantidades que são relacionadas. Isto torna o conceito de função uma das grandes ideias da matemática.
>
> As funções são a ferramenta usada para matematicamente modelar todos os tipos de mudança do mundo real. Representar funções em diferentes modos pode levar a analisar e compreender essa mudança. Os estudantes nos graus médios deveriam desenvolver uma compreensão dos múltiplos métodos de expressar relações funcionais do mundo real (palavras, gráficos, equações e tabelas). Trabalhar com estas diferentes representações de funções permitirá aos alunos desenvolver uma plena compreensão deste importante conceito. (p.284)

Em seu trabalho, Van de Walle expressa As Grandes Ideias num trabalho escolar sobre funções, assim:

> 1) As funções são relações ou regras que de maneira única associam membros de um conjunto com membros de outro conjunto.
>
> 2) Numa relação funcional, uma variável (a variável dependente) é definida em termos de outra variável (a variável independente).
>
> 3) As relações funcionais podem ser expressas em contextos reais, gráficos, equações algébricas, tabelas, e palavras. Cada representação para uma dada função é simplesmente um modo diferente de expressar a mesma ideia. Cada representação dá uma diferente visão da função e o valor de uma particular representação dependendo de seu propósito. (p.284)

e falando sobre Conceitos e representações de função, afirma que

> Um estudo de funções é um estudo do modo como a mudança numa variável afeta a mudança na outra; é um estudo de variação conjunta de variáveis. Uma função é uma regra que de maneira única define como a primeira ou variável independente afeta a segunda ou variável dependente.Há cinco diferentes modos para interpretar ou representar uma função: através de um contexto, de uma tabela de valores, da linguagem adotada, de um gráfico, e, finalmente, da familiar equação. Cada uma delas é um modo diferente de comunicar a mesma regra de correspondência ou relação. É importante ver que cada representação expressa a mesma ideia uma vez que dá um modo diferente de olhar ou pensar sobre a relação. (p.284)

4.4.2 – O Conceito de Limite

Stewart (2001), em seu livro Cálculo volume 1 na página 3, destaca que Cálculo é fundamentalmente diferente da matemática estudada por alunos do Ensino Básico. O Cálculo é menos estático e mais dinâmico. Ele trata de variação e de movimento, bem como de quantidades que tendem a outras quantidades. É bastante útil conhecer algumas das principais ideias do Cálculo que mostram como surgem os limites quando tentamos resolver uma variedade de problemas: o problema do limite, o problema da área, o problema da tangente, o problema da velocidade, o limite de uma sequência, a soma de uma série infinita. Em cada um desses problemas o tema comum é o cálculo de uma quantidade como o limite de outras quantidades mais facilmente calculáveis. É essa ideia básica que coloca o Cálculo à parte das demais áreas da matemática. Na verdade, o Cálculo poderia ser definido como *“o ramo da matemática que trata de limites”.*

O que se entende por Limite

De acordo com as ideias colocadas, a ideia de limite está subentendida em vários ramos do Cálculo e, como disse Stewart (2001, p.9)

> Sir Isaac Newton inventou sua versão do Cálculo, a fim de explicar o movimento dos planetas em torno do Sol. Hoje, o Cálculo é usado na determinação de órbitas de satélites e naves espaciais, na predição do tamanho de uma população, na estimativa de como aumenta o preço do café, na previsão do tempo, na medida do fluxo sanguíneo de saída do coração, no cálculo dos prêmios dos seguros de vida e numa grande variedade de outras áreas. (STEWART, 2001, p.9)

Ainda, segundo Stewart (2001, p.105)

> Os princípios do Cálculo são encontrados na forma de determinar as áreas e volumes por eruditos da Grécia antiga, tais como Eudoxo e Arquimedes. Embora aspectos da ideia de limite estejam implícitos em seu "método de exaustão", Eudoxo e Arquimedes nunca formularam explicitamente o conceito de limite. Da mesma forma, matemáticos como Cavalieri, Fermat e Barrow, precursores imediatos de Newton no desenvolvimento do Cálculo, realmente não usaram limites. Foi Isaac Newton o primeiro a falar explicitamente sobre limites. Ele explicou que a ideia principal por trás dos limites é que quantidades "ficam mais próximas do que qualquer diferença dada". Newton estabeleceu que o limite era o conceito básico no Cálculo, mas foi deixado para matemáticos posteriores, como Cauchy, tornar claras suas ideias sobre limites. (STEWART, 2001, p.105)

Infelizmente, esse conceito tão importante, na maioria das vezes, é concebido de uma maneira errônea, fazendo com que o aluno não consiga compreender e dar significado a ele.

No Projeto "INSIGHTS into SECONDARY STUDENTS' UNDERSTANDING OF MATHEMATICS[7] de Anna O. Graeber e Martin L. Johnson (1990), pode–se encontrar um artigo chamado "Limit as Approaching: the dynamic view of a limit" que expressa uma concepção errônea muitas vezes assumida pelos alunos: **Limite como aproximação: A visão dinâmica de um limite.**

Por que essa é uma concepção errônea?

> O estudo de Cálculo se apresenta a muitos estudantes da *High School* (Ensino Médio) e da Universidade como o maior desafio conceitual de suas carreiras matemáticas. Os três conceitos mais importantes do Cálculo: limites, derivadas e integrais são abstratos e complexos em suas relações. Porque as integrais e as derivadas são tipos de limites, o conceito de limite é fundamental. Apesar da importância do conceito e do fato de ele estar por baixo de outros conceitos, não é usual para os estudantes terem uma completa compreensão do conceito de limite.

[7]Este material foi desenvolvido na Universidade Maryland, College Park, sob o regisgtro TEI–8751456 do National Science Foundation. Anna Graeber, 2311 Benjamin Building, UMCP, College Park, MD.

> Uma concepção errônea comum assumida por estudantes de Cálculo é que o limite é um procedimento ao invés de um número. Os estudantes, com esta concepção errônea, identificam o limite de uma função como o processo da função “aproximando–se de um valor” em vez de o valor numérico do qual está “sendo aproximado”. Tall e Vinner (1981) levantaram a hipótese de que os estudantes veem limites como processos dinâmicos. Heid (1984) identificou esta concepção errônea “limite como aproximação” em entrevistas com estudantes universitários no Cálculo introdutório. Esta concepção errônea foi posteriormente verificada em outros estudos (Mamona–Downs, 1990, Williams, 1990).
>
> A concepção errônea “limite como aproximação” está algumas vezes ligada a outra concepção errônea comum sobre limites, aquela em que o valor que está sendo aproximado nunca é alcançado. Estudantes com esta concepção errônea usam a linguagem “chega perto mas nunca o atinge” para descrever a relação entre o processo de aproximação e o valor do qual está sendo aproximado (Tall & Vinner, 1981; Williams, 1990). Além disso, esses alunos pensam que uma sequência nunca pode atingir seu limite. Por exemplo, um estudante num trabalho de Davis e Vinner (1986, p. 296) disse:
>
> Um limite é uma fronteira além da qual a sequência não pode ir. Mas há algumas diferenças importantes. Um limite de velocidade, numa rodovia, define somente um ponto além do qual, supostamente, não se pode ir. Mas o limite de uma sequência nunca é atingido.
>
> Tanto a concepção errônea “limite como aproximação” quanto a concepção errônea “chega perto mas nunca atinge” foram identificadas por Heid (1984) em suas entrevistas com estudantes de Cálculo. Aqueles estudantes que se referiam a limites como aproximados mais do que exatos eram também aqueles que provavelmente se referiam a derivadas como aproximações para as declividades e as integrais definidas como aproximações de áreas.

O Limite de uma função

Consideremos a função $y = f(x)$ e seja α um ponto pertencente a seu campo de definição.

Ao escrever $$\lim_{x \to \alpha} f(x) = L,$$

e dizer “o limite de $f(x)$, quando x tende a α, é igual a L”,

entende–se que se pode tornar os valores de $f(x)$ cada vez mais próximos de L, fazendo x suficientemente próximo de α, pela esquerda e pela direita, mas com $x \neq \alpha$.

Reforçando, no trabalho de sala de aula, se o conceito de função estiver bem claro e se, a partir dele, pudermos fazer uma tabela e/ou gráfico, a notação usual para expressar o limite L dessa função $f(x)$, quando o ponto x se aproxima de um determinado valor α, quer–se expressar que os valores de $f(x)$ ficam cada vez mais próximos de L, ou seja, dado ε > 0 e arbitrário, existe $\delta > 0$, $\delta = \delta(\varepsilon)$, tal que $0 < |x - \alpha| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$.

4.4.3 – A Continuidade de uma função

Para uma função f ser contínua no ponto α é necessário que ocorram três condições:

- A função deve ser definida no ponto α , ou seja, que α pertence ao domínio de f
- A função deve ter limite no ponto α, ou seja, que $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = L$
- $L = f(\alpha)$

Uma função é dita contínua no conjunto A quando f é contínua em todos os pontos do conjunto A.

4.4.4 – A Derivada de uma função

Para que uma função seja diferenciável é preciso que a função seja contínua e, além disso, diz–se que a derivada de uma função f em um número fixo α é dada por

$$f\,'(\alpha) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h}$$

onde α é um ponto qualquer do campo de definição da função e h o acréscimo dado ao ponto α, então

$$f\,'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Dado um número x para o qual esse limite existe, faz–se corresponder a ele o número $f'(x)$, o valor da derivada da função f no ponto x. Assim, podemos considerar f' como uma nova função, chamada derivada de f e definida pela última equação acima. Sabe–se que o valor de f' em x, $f'(x)$, pode ser interpretado geometricamente como a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$.

Olhando sob outro ângulo, pode–se dizer que $f'(\alpha)$ é a taxa de variação instantânea de $y = f(x)$ em relação a x quando $x = \alpha$.

4.4.5 – A Integral de uma função

<u>Definição de Integral Definida</u> Seja f uma função contínua para $a \le x \le b$. Seja o intervalo $[a,b]$ dividido em n subintervalos de comprimentos iguais a $\Delta x = (b-a)/n$. Sejam $x_0(=a), x_1, x_2, ..., x_n(=b)$ os extremos desses subintervalos e consideremos os pontos amostrais $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$ nesses subintervalos, de tal forma que x_i^* está no *i*-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Então a integral definida de f é dada por

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

Segundo Stewart (2001), o símbolo $\int$ foi introduzido por Leibniz e é chamado sinal de integral. Na notação do símbolo $\int_a^b f(x)dx$ como um todo, $f(x)$ é chamado integrando, a e b são chamados limites de integração onde a é o limite inferior, b é o limite superior. O símbolo dx é o diferencial e indica em relação a que variável f é integrada. O processo de calcular uma integral é chamado integração.

Bernard Riemann recebeu seu doutorado sob a orientação do legendário Gauss na Universidade de Göttingen e lá permaneceu para lecionar. Gauss, que não tinha o hábito de elogiar outros matemáticos, referiu-se a Riemann como *uma mente criativa, ativa e verdadeiramente matemática e de uma originalidade gloriosamente fértil.*

A definição utilizada acima para a integral é devida a Riemann.

4.5 – O Cálculo na Facens

Apresentamos a seguir os dados relativos ao ensino do Cálculo 2 anual proposto pela FACENS, para o ano de 2008.

1. Ementa

Funções de duas ou mais variáveis.

Derivadas parciais e direcionais

Integrais múltiplas e aplicações.

Sistemas no Espaço não ortogonais.

Sequências e Séries.

Equações Diferenciais.

Integral de Linha.

2. Objetivos

Despertar a curiosidade e o interesse do aluno, de modo a poder aplicar suas ideias e levá-lo a descobrir novas soluções para a resolução de um problema; relacionar, sempre que possível, os assuntos a serem trabalhados com as experiências dos estudantes, a fim de que eles possam desenvolver uma visão mais ampla, e não fragmentada, da disciplina; desenvolver no aluno o hábito do estudo, o rigor e a precisão no uso da linguagem científica, respeitando as regras, convenções, notações, etc., que foram criadas justamente para facilitar a comunicação e a pesquisa científica.

4.6 – A pergunta de nossa pesquisa

Voltando ao Modelo de Romberg, é chegada a hora de definir a pergunta de nossa pesquisa.

Com a atividade 3 de Romberg completada, procurando "ouvir" de "outros" o que pensam sobre a história da integral, o que dizem sobre resolução de problemas; e a forma como podem conceber uma sala de aulas, trabalhando Cálculo Diferencial e Integral, tornou–se possível identificar nosso problema de pesquisa, que é a atividade 4 de Romberg.

Para Romberg (2007)[8],

> a definição da pergunta da pesquisa é um passo chave em seu processo porque, conforme se examina um fenômeno particular, uma grande quantidade de perguntas potenciais inevitavelmente aparece.

e diz, ainda, que

> decidir quais perguntas devem ser examinadas não é fácil.

e escreve que,

> John Platt argumentou "que a escolha de qual questão deve ser examinada é crucial. Se questões 'críticas' são feitas, então, 'fortes' inferências podem ser feitas. Caso contrário, um estudo particular pode contribuir pouco para uma cadeia de indagações".

[8]ROMBERG, T.A. Perspectivas sobre o Conhecimento e Métodos de Pesquisa. Tradução: ONUCHIC, L.; BOERO, M.L. In: **BOLEMA – Boletim de Educação Matemática**. Rio Claro: UNESP, n.27, p.93–139, 2007.

Citando, agora, Werner Heisenberg (1901–1976),

> ...os físicos aprenderam a fazer as perguntas corretas. E fazer a pergunta certa é frequentemente, mais do que a metade do caminho que conduz a solução do problema.

Esperamos então definir, com cautela, nossa pergunta de pesquisa sob a seguinte expressão:

Como se pode construir um projeto de ensino-aprendizagem, destinado a trabalhar Integrais, com alunos de um Curso de Engenharia, num ambiente de resolução de problemas, fazendo uso de uma nova metodologia, com recursos à história da matemática e com os alunos, em grupos, num trabalho cooperativo e colaborativo, sendo co-construtores de um conhecimento autogerado?

CAPÍTULO 5

A RESOLUÇÃO DO

PROBLEMA DA PESQUISA

Capítulo 5 – A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

Introdução – 2º Bloco de Romberg – Atividades 5 e 6

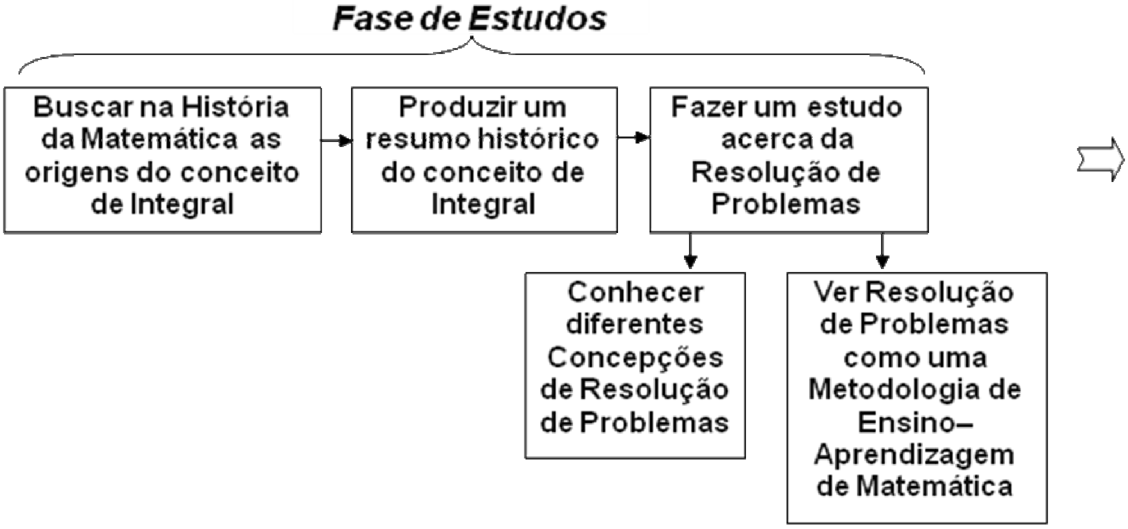
Tendo sido identificado o problema da nossa pesquisa, o passo seguinte seria o de ir em busca de sua resolução.

Voltando à introdução de nosso trabalho, onde pudemos referir que nosso interesse pelo tema – Integrais – aconteceu na junção de algumas singularidades, de nossa trajetória acadêmica, com circunstâncias da nossa área de atuação como professor. Lecionando Cálculo em uma Faculdade de Engenharia e verificando a dificuldade que os alunos apresentam ao trabalhar esse tema, decidimos enfrentar o desafio de ver esse conteúdo trabalhado em sala de aula, fazendo uso de uma metodologia diferente, baseada em Resolução de Problemas e apoiada em importantes recursos da História da Integral.

Retomando o Modelo Modificado, criado dentro da sequência de Romberg, podemos ver que a atividade 3 desse Modelo – Relacionar com ideias de outros – pedia, para nossa pesquisa: História da Integral como parte da História da Matemática; Resolução de Problemas, vista como uma Metodologia de ensino – A Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática **através** da resolução de problemas; e, como terceiro eixo temático, para a fundamentação teórica de nossa pesquisa, aparecia nossa Sala de Aula, onde trabalhando Cálculo num curso de ensino superior, visávamos ao ensino de *Integrais.*

Nosso Modelo Modificado foi diagramado em três Fases: uma Fase de Estudos, uma Fase de Descobertas e uma Fase de Aplicação.

Na primeira fase



5.1 – A História da Integral na Sala de Aula

Não se pretende, neste momento, historiar mas fazer, na sala de aula, o uso da História da Integral como parte integrante do item 3 de Romberg – Relacionar com Ideias de Outros.

Para preparar nossa Sala de Aula visando ao ensino de integrais, para alunos do 2º ano do Ensino Superior, em engenharia, fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas e recorrendo à História da Integral como parte da História da Matemática, estabelecemos uma ordem para desenvolver essa pesquisa:

5.1.1 – Trabalhar a História da Integral desde suas origens até Riemann

- Período Clássico – a partir do séc.VI a.C. – com Thales de Mileto, Pitágoras de Samos, Antífon, Hipócrates de Quio, Eudoxo de Cnido, Euclides e Arquimedes;
- Período Medieval – do séc.VI ao séc.XVI – com Copérnico, Tyco Brahe, Galileu e Kepler;

- Período Pré-Moderno – séc.XVII e séc.XVIII – com Descartes, Fermat, Torricelli, Pascal, Huygens, Barrow, Newton e Leibniz;
- Período Moderno – séc.XIX e séc.XX – com Cauchy, Weirstrass e Riemann.

Observamos que Riemann formalizou a Teoria da Integração.

Como levar essa plêiade de cientistas, responsáveis pela matemática no mundo, até nossos alunos, em sala de aula, querendo que eles possam perceber como, ao longo de tantos séculos, tanta gente pôde colaborar para a criação e a formalização do conceito de Integral e de outros conceitos a ele relacionados? Como convencer nossos alunos da importância do conhecimento desse conceito em sua carreira de engenheiro?

Ao pensar na criação de um projeto que pudesse melhorar o conhecimento dos alunos sobre o conceito de Integral, a nós, nos pareceu que eles mereciam, para o trabalho com a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, conhecer mais do que fórmulas e tabelas que os conduzissem a responder listas intermináveis de exercícios para achar derivadas e calcular integrais de funções, em listas selecionadas por nós, nos livros-texto de Cálculo.

Assim, como mostrar aos nossos alunos, a forma como os problemas, para muitos cientistas da Antiguidade, eram enfrentados sem o conhecimento dos conceitos de função, limite, derivadas e integrais, trabalhando somente com o uso de réguas não graduadas e compassos rudimentarmente construídos, sem ter a noção de infinito e sem saber explicar a ação do movimento no mundo, tentando arduamente encontrar, com precisão, a área de um círculo, sabendo que, naquela época eles só tinham conhecimento dos números racionais e da geometria?

Adequando, a nossos alunos do curso de engenharia, o que disse a Professora Doutora Helena N. Cury, na introdução de seu artigo *História e Estórias da Matemática: uma entrevista com Heron nos dias atuais,* no livro *História e Tecnologia no Ensino da Matemática,* volume II, a seus licenciandos, podemos fazer uma adaptação dizendo que, ao trabalhar com Ensino Superior, em cursos de

Engenharia, têm–se desenvolvido variadas abordagens para introduzir ou revisar tópicos matemáticos e metodologias adequadas para seu ensino.

Sabe–se que, na maioria dos cursos de Engenharia, o recurso do ensino tradicional é o mais frequente; que o uso de livros-texto é também comum; e que um trabalho com questionamentos dirigidos para a busca de respostas também se apresenta às vezes. Mas, segundo Cury (2008), para a maioria dos alunos, as definições matemáticas, uma vez estabelecidas, passam a ser verdades absolutas e não lhes é permitido questioná-las, então, perguntamos, será bom mudar? Será que poderemos convencê-los de que é possível, para eles, entender aquilo que eles veem escrito ou que lhes foi dito?

Quase sempre a História da Matemática é utilizada para motivar uma discussão sobre certo objeto matemático, seu significado e sua função. Mas, quando se levanta uma questão histórica e se passa a uma discussão, isso é feito no contexto presente, na realidade das novas atribuições desse objeto nos dias atuais. E como viver a passagem entre o tempo passado e o tempo atual?

Diz Cury que, mesmo baseados em fontes teóricas confiáveis, acabamos impregnando a ordem histórica de elementos que supostamente motivam o aluno, ao tecer comentários, a subverter a ordem histórica em nome de uma nova ordem, a didática.

E se fizéssemos o contrário? Se impregnássemos uma ordem pedagógica, por nós considerada favorável, de um teor histórico?

Isso equivaleria, em nosso entender, a trazer os sábios até nós, até nosso tempo, e ver, com os recursos de hoje, o que aconteceria sobre os fatos e as construções de seu tempo passado.

No livro *Coffee with Isaac Newton*, de Michael White, com Prefácio de Bill Bryson – um diálogo ficcional baseado em fatos biográficos – o autor diz que se trouxéssemos a maioria de ilustres figuras do passado, elas teriam muito a nos dizer se nos emprestassem uma hora de seu tempo.

E, para nós, indo das origens da Integral – antes do séc.VI a.C.; atravessando o Período Clássico – séc.VI a.C. ao séc.V; passando pela Idade Média – do séc.VI ao séc.XVI; adentrando ao Período Pré–Moderno – séc.XVII e séc.XVIII; e, por fim, ao Período Moderno – séc.XIX e séc.XX, como poderíamos chamar todos esses sábios para virem até nós que, com os recursos de hoje, poderíamos lhes falar sobre os avanços da matemática que eles tanto ajudaram a construir?

Como, em tão pouco tempo de aulas, poderíamos fazer isso?

Em nosso trabalho de pesquisa levantamos 30 problemas apresentados nas páginas 170 a 174, tanto para, a partir deles, fazer algumas dessas chamadas quanto para mostrar como, com os recursos de hoje, esses problemas podem ser resolvidos.

À medida em que as ideias da integral forem tomando forma, fazendo uso dos problemas que coletamos como geradores do conceito de integral, desde o seu início, chamaremos a atenção dos alunos para o conhecimento existente no mundo hoje e para executar a tarefa que eles se propunham a resolver. A História poderá lhes indicar como os processos matemáticos evoluíram, caíram, tornaram a aparecer e, com novas descobertas sobre os fatos existentes, puderam, um dia, chegar até eles, resolvendo problemas reais, usando a tecnologia que a matemática ajuda a construir, e chegar a um século XX capaz de levar o homem à Lua, a falar sobre a Relatividade de Einsten, e devisar muita ciência que pede ardentemente o auxílio da Matemática.

Como fazer então?

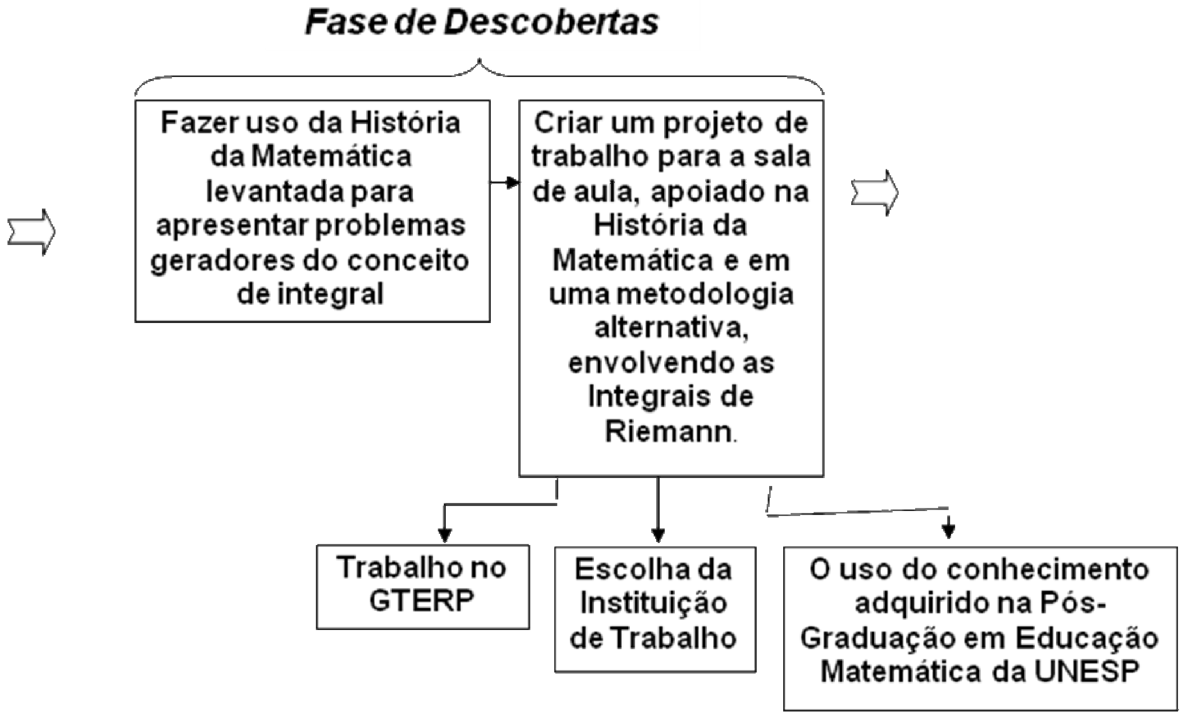
Fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas, colocando-lhes os problemas que a História propôs e tomando os alunos como co-construtores de seu próprio conhecimento, poderemos enfrentar uma nova forma de trabalhar essas ideias e principalmente construir, com os alunos, os novos conceitos e os novos conteúdos necessários à construção do Conceito de Integral, tão importante para os engenheiros.

5.2 – A resolução de problemas na sala de aula

O ponto central de nosso interesse em trabalhar o ensino–aprendizagem de matemática através da resolução de problemas baseia-se na crença de que a razão mais importante para esse tipo de ensino é a de ajudar os alunos a compreender os conceitos, os processos e as técnicas operatórias necessárias dentro do trabalho feito em cada unidade temática.

Em nossa visão, segundo Onuchic (1999), a compreensão de matemática, por parte dos alunos, envolve a ideia de que, entender é essencialmente saber relacionar. Esta posição baseia-se na observação de que a compreensão aumenta quando: o aluno é capaz de relacionar uma determinada ideia matemática a um grande número ou a uma variedade de contextos; o aluno consegue relacionar um dado problema a um grande número de ideias matemáticas implícitas nele; o aluno consegue construir relações entre as várias ideias matemáticas contidas num problema. As indicações de que um estudante entende, interpreta mal ou não entende ideias matemáticas específicas surgem, com frequência, quando ele resolve um problema. Acreditamos que, ao invés de fazer da resolução de problemas o foco do ensino da matemática, professores, autores de livros, promotores de currículos e avaliadores de aprendizagem deveriam fazer da compreensão seu ponto central e seu objetivo. Fazendo isso, eles mudariam a visão estreita de que a matemática é apenas uma ferramenta para resolver problemas, para uma visão mais ampla de que matemática é um caminho de pensar e um organizador de experiências. Com isso não pretendemos tirar a ênfase dada à resolução de problemas, mas sentir que o papel da resolução de problemas no currículo passaria de uma atividade limitada para engajar os alunos, depois da aquisição de certos conceitos e determinadas técnicas, para ser tanto um meio de adquirir novo conhecimento como um processo no qual pode ser aplicado aquilo que previamente havia sido construído.

Passando para a segunda fase de nosso Modelo Modificado – a Fase das Descobertas



vamos criar um projeto sobre o ensino–aprendizagem de integrais para ser aplicado em sala de aula, apoiados numa metodologia alternativa de ensino e recorrendo à História da Matemática.

Observando esta fase e relembrando a pergunta de nossa pesquisa – atividade 4 – é fácil perceber que dentro do Modelo de Romberg, ao selecionar estratégias e procedimentos correspondentes – atividades 5 e 6, a estratégia geral – E_G – mostrou interesse em ***criar um projeto*** que levasse a resolver o problema criado. Assim, nossa E_G será a de criar um projeto de atividades a ser aplicado na sala de aula.

Visando à criação desse projeto, observa-se, dentre as variáveis contidas no Modelo Modificado, que várias estratégias auxiliares se manifestam: E_1 – onde seria aplicado esse projeto?; E_2 – quem se incumbiria de seu desenvolvimento?; E_3 – a que público alvo o projeto se destinaria?; E_4 – a construção de um roteiro de atividades; E_5 – qual seria a metodologia adotada para sua aplicação?

Como procedimento geral – P_G correspondente à estratégia geral E_G, teremos a criação do projeto e como procedimentos auxiliares: P_1 - definir o local onde seria aplicado o projeto; P_2 - definir o responsável por sua aplicação; P_3 - quem seria o público alvo; P_4 - a construção, em detalhes, do roteiro de atividades; P_5 – e a definição de uma metodologia de ensino-aprendizagem que desse vida à dinâmica de trabalho em sala de aula.

5.3. – Nosso levantamento de problemas, da História da Matemática, responsáveis pela criação do conceito de Integral

Um levantamento de problemas será feito sabendo que alguns deles pedirão por raciocínios e técnicas operatórias; outros estarão dando oportunidade, a nossos alunos, de refletir sobre fatos históricos relativos à construção do avanço da matemática no que diz respeito à integral; ainda, outros de caráter essencialmente histórico, permitindo-lhes uma postura condizente com sua formação intelectual.

Esse levantamento não nos obriga a aplicá-los, em sua totalidade, aos nossos alunos em sala de aula. Ao longo da aplicação do projeto, acreditamos que alguns deles possam se mostrar convenientes e, então, serão escolhidos.

1. Encontrar a área do círculo

2. Quadrar a área do círculo – A quadratura do círculo

3. Lema de Eudoxo ou de Arquimedes

Dadas duas grandezas que têm uma razão (isto é, nenhuma delas sendo zero), pode-se achar um múltiplo de qualquer delas que seja maior que a outra.

4. O Método de Exaustão

Se de uma grandeza qualquer subtrairmos uma parte não menor que sua metade e do resto novamente subtrai-se não menos que a metade e se esse processo de subtração é continuado, finalmente restará uma grandeza menor que qualquer grandeza de mesma espécie.

5. O problema de Eudoxo

Sejam c e C *dois* círculos, com diâmetros d e D e áreas a e A.

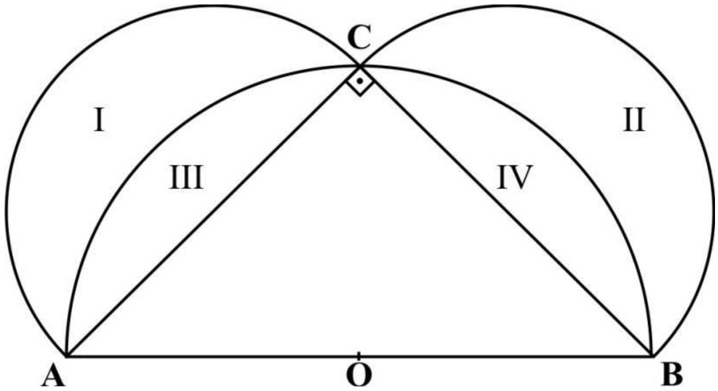
Provar que $a : A :: d^2 : D^2$ ou $\frac{a}{A} = \frac{d^2}{D^2}$.

6. Na tentativa de quadrar o círculo, buscou-se encontrar outras figuras curvas que pudessem levar à quadratura do círculo. Pode-se mostrar algumas dessas tentativas? É possível falar-se sobre algumas delas?

6.1 – Problema 1 de Hipócrates - Burton (2007, p.124)

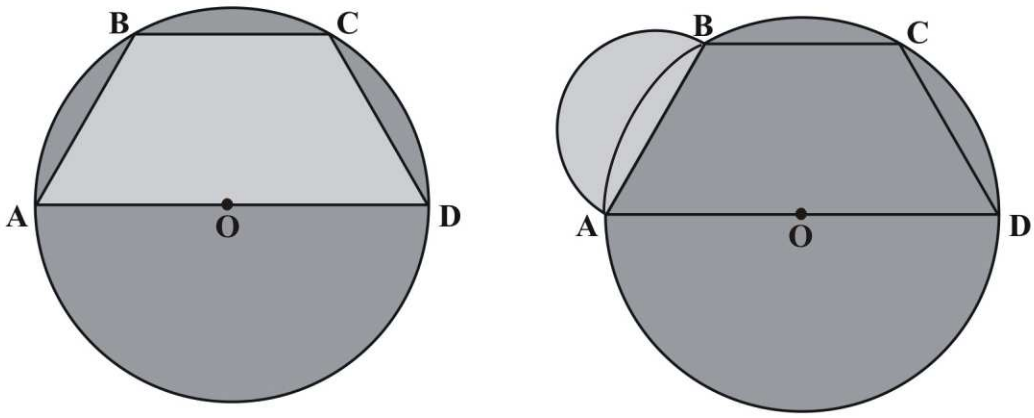
Entende-se por luna uma figura plana, na forma de uma lua, limitada por dois arcos circulares de raios desiguais e mesmos extremos.

A partir de um triângulo retângulo isósceles ABC, construir semicírculos sobre os três lados do triângulo. Mostrar, com base no desenho abaixo construído, que a soma das áreas das lunas I e II é igual à área do triângulo retângulo ABC.



6.2 – Problema 2 de Hipócrates - Eves (2004, p.155)

Seja ABCD um semi-hexágono regular inscrito num círculo de diâmetro AD. Construir uma luna descrevendo, exteriormente ao círculo, um semicírculo de diâmetro AB. Mostrar que a área do trapézio ABCD é a soma do triplo da área da luna com a área do semicírculo de diâmetro AB.



7. O problema da quadratura da área de um segmento parabólico, comumente chamado "Quadratura da Parábola"

8. Com o conhecimento matemático de hoje, é possível reconhecer, nesses dois problemas de Hipócrates, a razão do sucesso de suas quadraturas, embora se saiba que esse trabalho não tenha conduzido à quadratura do círculo? Justifique sua resposta.

9. Fazendo uso do Método de Exaustão, Arquimedes chegou a quadrar o círculo? Justifique.

10. Apoiando-se na razão do comprimento da circunferência pelo diâmetro da mesma, foi possível Arquimedes chegar ao número π ? Por quê? Justifique.

11. Das obras de Arquimedes e de outros gregos, algumas deixaram registros. Depois de muitos séculos, cópias deles foram feitas. Mosteiros religiosos mantinham quase que em segredo essas cópias. Que importância essas obras tiveram para o avanço da matemática que resultaram na busca do conceito de integral?

12. A restauração do valor do número, devido às necessidades da navegação para fins comerciais e, portanto, financeiros, promoveu um acordar matemático que avançasse para o conhecimento da integral?

13. A Astronomia e a Física existentes na Renascença exigiam mais matemática para responder a seus anseios, uma vez que estavam ligadas ao problema do movimento. Por que isso?

14. Os filósofos escolásticos, aqueles que com pensamento cristão da Idade Média, baseados na tentativa entre um ideal de racionalidade corporificado na tradição grega do Platonismo e do Aristotelismo, vinham distinguindo a quantificação das “formas variáveis” que é um conceito de Aristóteles aproximado e equivalente à qualidade. Entre tais formas estudavam a velocidade de um objeto móvel e a variação da temperatura, de ponto para ponto, num objeto com temperatura não uniforme. É possível reconhecer, nessas atitudes, uma inquietação pelos movimentos físicos que eram observados pelo homem?

15. Por que os problemas da navegação levaram a uma investigação cada vez mais cuidadosa dos movimentos dos astros? Por que, de uma maneira geral, essa preocupação exigia um estudo mais rigoroso do movimento, um estudo *quantitativo* que permitisse *medir* e *prever*?

16. Quem foi o cientista que primeiro descobriu a Lei do Movimento dos corpos celestes? E quem criou o primeiro telescópio?

17. Que conceito matemático precisou ser criado para se poder trabalhar essas novas ideias relacionadas ao movimento? O que é uma variável?

18. Como vocês acham que, fazendo uso do conceito de função, esses cientistas chegaram ao conceito de infinitésimo?

19. Como se pode chegar ao conceito de limite como generalização do conceito de infinitésimo?

20. Quem foi o primeiro cientista a falar explicitamente sobre o importante conceito de limite?

21. Depois de Newton ter dado sentido ao conceito de limite, quem conseguiu dar clareza às ideias desse conceito?

22. Qual foi o matemático que estabeleceu a definição de limite exatamente na forma em que a usamos hoje?

23. É sempre possível garantir a existência do limite?

24. No senso comum, para quem estuda limite, as expressões:
"tem por limite *L"; " t*ende para *L"; e "c*onverge para *L" s*ão equivalentes.
Isso é verdade para o conhecimento matemático do conceito de limite?

25. De que forma o trabalho de Fermat colaborou para a criação do Cálculo Diferencial e Integral?

26. Que papel importante para o desenvolvimento do conceito de integral desempenharam Barrow e Huygens?

27. Que papel desempenharam os irmãos Bernoulli na construção do Cálculo Diferencial e Integral?

28. Qual foi a contribuição de Newton para o Cálculo Diferencial e Integral?

29. Qual foi a contribuição de Leibniz para o Cálculo Diferencial e Integral?

30. Qual foi a contribuição de Riemann para o Cálculo Diferencial e Integral?

5.4. – A Criação de um Projeto sobre Ensino-Aprendizagem de Integrais

Introdução

Definido o procedimento geral e seus procedimentos auxiliares P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5 , o procedimento geral seria posto em ação depois de colocados cada um dos procedimentos auxiliares em ação.

Para a aplicação desse projeto, em sala de aula, seria necessário que se fizesse a escolha e se obtivesse a aceitação de uma Instituição de Ensino onde ele seria aplicado. Pela facilidade que tínhamos, decidimos escolher a escola em que o professor-pesquisador trabalha, a FACENS, Faculdade de Engenharia de Sorocaba. Fomos até a Coordenação de Cursos e conversamos com os coordenadores que, prontamente, autorizaram o início do trabalho.

Tendo esta autorização, pretendíamos aplicar o projeto em uma de nossas quatro salas de Cálculo Diferencial e Integral 2, em regime anual e, inicialmente, esse trabalho diferenciado seria realizado com a turma de Engenharia da Computação. Mas, apesar dessa escolha ter sido feita, talvez por desconhecermos o trabalho que iríamos enfrentar, optamos por desenvolver o projeto em todas as quatro salas, Computação, Civil, Elétrica 1 e Elétrica 2, uma vez que ele seria desenvolvido, quanto ao mesmo conteúdo, nas quatro salas, pelo mesmo professor.

5.4.1 – A Criação de um Roteiro de Atividades

Com a Metodologia de trabalho para a sala de aula definida como a Metodologia de Ensino–Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas, apresentada e descrita no Capítulo 3, em **3.2.3**, e com o uso da História da Integral, passamos à criação do projeto.

Queremos expor neste momento as razões deste projeto ter sido programado para o 2º ano do Curso de Engenharia:

- A FACENS é uma faculdade particular, sem fins lucrativos.
- A Coordenação de Cursos é quem faz a atribuição das disciplinas e das aulas aos professores.
- O professor-pesquisador trabalhava, nesse ano, Cálculo 2 em regime anual, ou seja, nos terceiro e quarto semestres do curso.
- Uma necessidade e a solicitação da disciplina Física, dessa instituição, aos professores de Cálculo 2, sobre o conhecimento de derivadas parciais, logo no primeiro bimestre do ano, precisou ser atendida.
- O fato da disciplina Cálculo 1 necessitar de uma intensa revisão da matemática trazida do Ensino Médio, pelos alunos, faz com que o desenvolvimento de tópicos referentes à própria disciplina Cálculo 1, seja trabalhado com menos intensidade, devido principalmente à diminuição de tempo a ele destinado.
- Em geral, o trabalho feito com esses alunos tem se preocupado mais com as técnicas operatórias do Cálculo 1 do que com conhecimento conceitual.
- Assim, a oportunidade do professor-pesquisador, ao comprometer-se com o conteúdo de integrais duplas, no Cálculo 2, foi a de efetuar uma revisão do Cálculo 1 dando ênfase às grandes ideias do Cálculo Diferencial e Integral, como introdução a esse novo conteúdo.

Nessas condições, acreditamos que o projeto se mostrava válido para essas turmas.

Nosso planejamento, para a composição de datas dos encontros, mostrou–se irregular em sua distribuição para as quatro turmas que, devido ao calendário escolar e com a frequência de certos feriados, não permitiu o mesmo número de aulas para todas as turmas, em virtude das turmas terem aulas em dias da semana diferentes.

As aulas, para as diferentes turmas, no que se refere ao período de aplicação do projeto, foram assim distribuídas

Turma	Início e Término	Encontros de 100 min	Número de alunos	Data da Prova
2º Computação Turma 132	09/04 e 21/05	12	60	26/05
2º Civil Turma 128	10/04 e 19/05	10	40	26/05
2º Elétrica 1 Turma 131	11/04 e 21/05	11	35	28/05
2º Elétrica 2 Turma 130	11/04 e 16/05	9	51	29/05
	Total	42	186	

Para a aplicação de nosso projeto, foi considerado o desenvolvimento de nove atividades, com o objetivo de chegar aos conceitos de integral simples e integral dupla em coordenadas retangulares.

Como foi importante o planejamento das aulas, por parte do professor, para que os objetivos das aulas fossem, em sua maioria, atingidos, explicitamos aqui uma programação da ordem das aulas. Esse planejamento, com o objetivo de definir quais e quantas seriam as aulas utilizadas para a aplicação do projeto criado, deveria seguir a ordem de utilização dos problemas geradores dos novos conceitos visados.

Para a primeira turma (Computação), as atividades foram assim planejadas:

Encontro (100 minutos)	Data	Planejamento das Atividades
1º	09/04/2008 (quarta–feira)	• Atividade 1 • Atividade 2 • Tarefa extraclasse – Atividade 3
2º	14/04/2008 (segunda–feira)	• Atividade 3 – Discussão e resolução • Tarefa extraclasse – Atividade 4

3º	16/04/2008 (quarta–feira)	• Atividade 4 – Discussão e resolução • Atividade 5 – Tarefa extraclasse, As Lunas de Hipócrates: Resolução do problema 1 • Como Desafio – Resolver o problema 2.
4º	23/04/2008 (quarta–feira)	• Discussão e resolução da tarefa extraclasse • Atividade 6 – O problema do Jarro • Tarefa extraclasse: Você é capaz de resolver este problema de geometria de alguma forma matemática diferente?
5º	28/04/2008 (segunda–feira)	• Análise da Tarefa extraclasse. • Atividade 7 • Tarefa extraclasse – Revisão da teoria trabalhada
6º	30/04/2008 (quarta–feira)	• Complemento da Atividade 7 • Trabalho sobre um “quebra–cabeças” geométrico • Tarefa extraclasse – Escrever sobre os questionamentos levantados feitos em classe, por professor e alunos.
7º	05/05/2008 (segunda–feira)	• Análise dos questionamentos levantados em classe, no 6º encontro. • Atividade 8 – exercícios (1) e (2) • Tarefa extraclasse – Rever a atividade desenvolvida em sala de aula neste encontro
8º	07/05/2008 (quarta–feira)	• Análise da tarefa deixada para casa. • Atividade 8 – exercícios (3) a (8) • Tarefa extraclasse – Refazer por escrito os exercícios (3) a (8)
9º	12/05/2008 (segunda–feira)	• Tirar dúvidas a respeito dos exercícios (3) a (8) da atividade 8 • Exercício (9) da atividade 8 • Tarefa extraclasse – Refazer ou terminar o exercício 9 da atividade 8
10º	14/05/2008 (quarta–feira)	• Tirar dúvidas sobre o exercício (9) da atividade 8 • Atividade 9 – exercícios (1), (2) e (3) • Tarefa extraclasse – Exercícios (4) e (5) • Tarefas adicionais – Exercícios do livro de Cálculo,

		THOMAS (2002), capítulo 12, seção 12.1, exercícios números (33), (34), (36) e (38).
11º	19/04/2008 (segunda–feira)	• Coleta de exercícios deixados como tarefa • Discussão desses exercícios • Atividade 9 – Exercícios (6), (7), (8) e (9) • Tarefa extraclasse – Atividades adicionais – exercícios do livro de Cálculo, THOMAS (2002), capítulo 12, seção 12.1, exercícios números (43), (46), (47) e (44).
12º	21/05/2008 (quarta–feira)	• Coleta de exercícios deixados como tarefa extraclasse • Atividade 9 – Exercícios (10), (11), (12), (13), (14) e (15) • Tarefas adicionais – Exercícios do livro de Cálculo, THOMAS (2002), capítulo 12, seção 12.2, exercícios números (7), (8), e (6).

Observação:

As turmas de Engenharia Civil e Elétrica (1 e 2) teriam, por razões já ditas, um menor número de encontros, devido aos feriados de quintas-feiras e sextas-feiras. Mas a intenção do professor-pesquisador era a de buscar acomodar essas atividades dentro do tempo disponível para as turmas.

5.4.2 – As Atividades criadas para o projeto

As atividades criadas seriam entregues, uma após outra, separadamente, aos alunos em grupos, no decorrer de sua aplicação em sala de aula. Para cada tipo de atividade foi estipulado um objetivo geral e, para cada atividade em particular, um objetivo específico.

Além disso o professor-pesquisador executaria cada uma dessas questões visando a atender a seus objetivos e justificativas, preparando-se para o trabalho em sala de aula.

Atividade 1

Você é capaz de determinar a área de:

> **Num primeiro momento, pede–se desenvolver os cálculos sem calculadora e após, se necessário, com calculadora.**

a) Um retângulo de lados 4 cm e 6 cm? O que é um retângulo?

b) Um quadrado de lado 3,732 cm? O que é um quadrado?

Existe diferença entre um retângulo e um quadrado? Qual?

c) Um triângulo cuja base é 7 cm e a altura 5 cm?

d) Um losango cujas diagonais valem 6 cm e 4 cm? O que é um losango?

e) Um paralelogramo de base $2\sqrt{3}$ cm e altura $\sqrt{21}$ cm. O que é um paralelogramo?

f) Um trapézio com base maior 10 cm, base menor 7 cm e altura 5 cm.

O que é um trapézio? Como você identifica os lados denominados bases de um trapézio?

Existe diferença entre um paralelogramo e um trapézio? Qual?

O que é área para você? Descreva com suas palavras.

- ***Objetivo da Atividade:*** Os exercícios desta atividade têm, como objetivo, "relembrar", "reconstruir" ou até mesmo o de construir os conceitos que envolvem área e superfície levando os alunos à construção de suas fórmulas.
- ***Justificativa:*** O cálculo de áreas de figuras poligonais desempenha um importante papel e possui múltiplas aplicações dentro da engenharia.

Atividade 2

Você é capaz de determinar a área de:

g) Um retângulo de lados $2\sqrt{2}$ cm e $\sqrt{6}$ cm ?
h) Um quadrado de diagonal 8 cm.
i) Um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 20 cm e um dos catetos mede 16 cm.
j) Um triângulo cujos três lados são iguais a 7 m.
k) Um triângulo cujos lados medem 17 cm,16 cm e 17 cm.
l) Um triângulo de vértices MVR, onde $\hat{M} = 60^o$, $\overline{MR} = 3\sqrt{2}$ cm e $\overline{MV} = 2\sqrt{6}$ cm.
m) Um triângulo cujos lados medem 14 cm, 11 cm e 7 cm
n) Um triângulo de vértices ABC, onde o ângulo C é reto, $\hat{B} = 60^o$ e o segmento BC mede 12m.
o) Um losango de perímetro 20 cm e um ângulo interno de 60º.
p) Um paralelogramo com lados 6 m e 8 m e um ângulo interno de 150º
q) um trapézio com lados iguais a 6 cm, 13 cm, 13 cm, 16 cm.

2) *Descreva como você calcularia a área de um Pentágono, Hexágono, Heptágono, Octógono e Eneágono regulares. E os não regulares?*

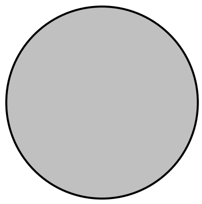
3) *Supondo que você não conheça a* ***área de um círculo****, como você faria para calcular sua área ? Pense nos antigos, os gregos por exemplo. Como eles a calcularam?*

- ***Objetivo da Atividade:*** Esta atividade tem, também, por objetivo fazer o cálculo de áreas de polígonos, como na atividade 1, mas, nestes exercícios, trabalhar com outras situações que, envolvendo diferentes condições nelas apresentadas, pedem atenção aos casos que envolvem triângulos e, consequentemente, polígonos com mais lados.
- ***Justificativa:*** Relacionar com os problemas dos gregos, visando à construção de padrões, com precisão, para as áreas de polígonos, fazendo uso de medidas de lados e ângulos e, a partir de situações-problema, fazer com que os alunos cheguem à matemática necessária, para isso, como co–construtores de novos conhecimentos.

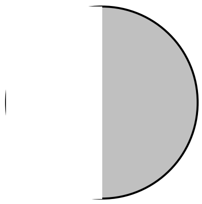
Atividade 3

01) Determine a área das figuras:

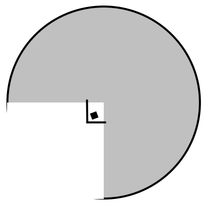
a) raio =7 cm



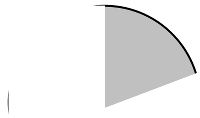
b) diâmetro = 5cm



c) raio = 8cm

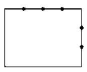


d) raio = 6cm e ângulo central de ***72º***

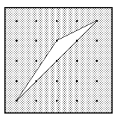


02) Determine a ***área escura***.

a) Os lados do retângulo da figura, de área 48, foram divididos em partes iguais pelos pontos assinalados.



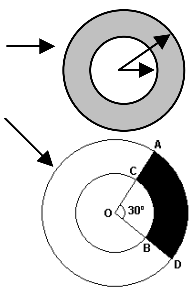
b) distância entre dois pontos 1 cm



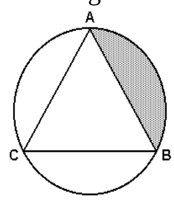
c) raios 4 cm e 7 cm

c_1)

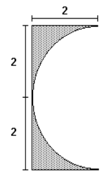
c_2)



d) diâmetro igual a 9 cm

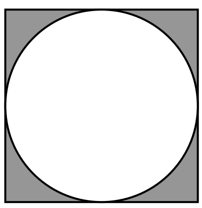


e)

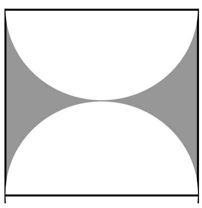


03) Nos próximos exercícios adote lado do quadrado igual a 8 cm.
Determine a ***área escura***.

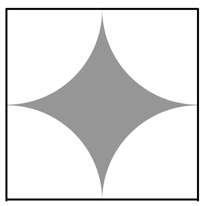
a)



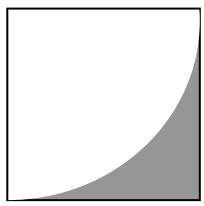
b)



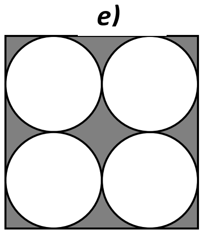
c)



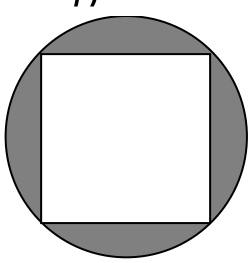
d)



e)

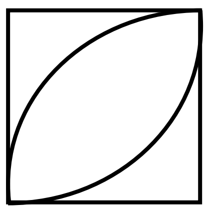


f)

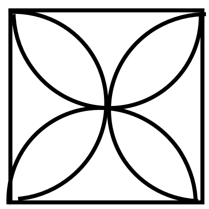


04) Determine a *área interna* das pétalas. Considere lado do Quadrado igual a 8 cm.

a)



b)

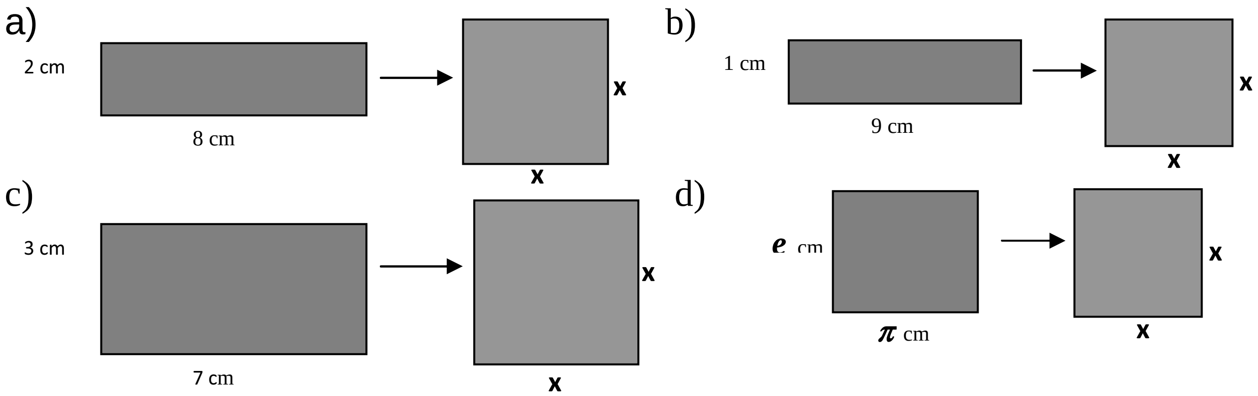


- ***Objetivo da Atividade:*** Através desses exercícios espera–se que os alunos calculem, com recursos próprios da matemática de hoje, as áreas pedidas e as adições e subtrações de partes decompostas de outras figuras.
- ***Justificativa:*** Em todos os exercícios apresentados, exceto (2a) e (2b), há necessidade da presença do número π, para o cálculo das áreas das figuras dadas.

Atividade 4

Você é capaz de resolver os seguintes problemas?

01) Determine o valor de x em:

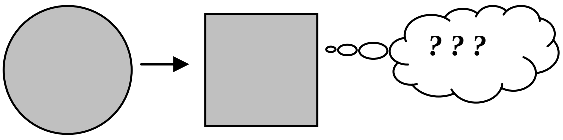


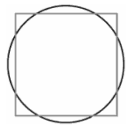
02) Qual deverá ser o lado de um quadrado de mesma área de um trapézio com base maior 12 cm, base menor 6 cm e altura 4 cm?
03) Qual deverá ser o lado de um quadrado de mesma área de um losango cujas diagonais valem 6 cm e 4 cm?
04) O que você fez nos exercícios acima? Há algo em comum? Você poderia dar algum nome a isso? Qual?

- ***Objetivo da Atividade:*** O objetivo primeiro, nesses exercícios, é o de encontrar o lado de um quadrado de área equivalente à área de cada figura dada e, posteriormente nomear essa operação.
- ***Justificativa:*** Desde os gregos, quando se propunham a calcular a área do círculo, uma de suas primeiras propostas era a de quadrar essa área. Isso lhes havia sido motivado pela possibilidade de quadrar a área de diferentes polígonos convexos e de algumas figuras circulares.

Atividade 5

Quadrar um círculo significa simplesmente, que, dado um círculo devemos construir um quadrado que tenha exatamente a mesma área do círculo, usando somente uma régua não graduada e um compasso. Este procedimento parece ser tranquilo quando se trata de retângulos e outros polígonos.

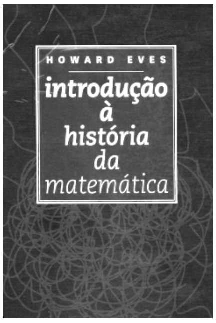




<u>*Para pensar e responder:*</u>
01) É possível quadrar um círculo?
02) Como você pode resolver o problema acima?
03) De que maneira você pode fazer isso?
04) Há alguma relação entre as áreas dessas figuras? Demonstre–a se houver.
05) O valor obtido é um valor exato? é aproximado? De que tipo?

Tente resolver o 1º problema de Hipócrates em aula, e o 2º fica como desafio, como tarefa extraclasse.

4.12 As Lunas de Hipócrates (Página 155 Eves)



Hipócrates de Quio (440 a.C.,?) quadrou certas ***lunas***, talvez na expectativa de que suas investigações pudessem derramar alguma luz sobre o problema da quadratura do círculo. A seguir, dão–se duas das quadraturas de lunas de Hipócrates.

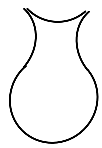
1º) Seja AOB um quadrante de um círculo. Tomando $\overline{AB}$ como diâmetro, trace o semicírculo voltado para fora do quadrante. Mostre que a luna limitada pelo quadrante e pelo semicírculo tem área igual à do triângulo AOB.
2º) Seja ABCD um semi–hexágono regular inscrito num círculo de diâmetro $\overline{AD}$. Construa uma luna descrevendo, exteriormente ao círculo, um semicírculo de diâmetro $\overline{AB}$. Mostre que a área do trapézio ABCD é a soma do triplo da área da luna com a área do semicírculo de diâmetro $\overline{AB}$.

- ***Objetivo da Atividade:*** Fazer uso da história da matemática, de modo que seja reconhecida a dificuldade do cálculo da área do círculo e de outras figuras circulares sem o conhecimento do número π. Ainda, estimular os alunos a fazer o cálculo dessas áreas, a partir do conhecimento do π.
- ***Justificativa:*** Desenvolver nos alunos as ideias de uma possível quadratura do círculo, usando representações geométricas.

Atividade 6

Problema para Pensar. **Você é capaz de resolver este problema de geometria?**

"Três um-quarto de círculo e um três-quartos de círculo – todos de raio igual a 10 cm – compõem esta atraente forma de jarro. Qual é sua área?"



Tente resolver numericamente e se for possível algebricamente, com ferramental geométrico e pense se haveria alguma outra forma de resolver esse problema.

- ***Objetivo da Atividade:*** A partir das atividades anteriores e conseguindo entender o enunciado proposto, esperamos que os grupos possam fazer uso de seus conhecimentos prévios e tentem, de alguma forma, representar geometricamente suas ideias e quadrar a área do vaso.
- ***Justificativa:*** Seguindo essas ideias, solicitar aos grupos que busquem outro modo, não geométrico, que possibilite a resolução desse problema. Saber usar conhecimentos anteriores convenientemente, de forma a transformá–los em saber, é uma condição importante para a aprendizagem.

Atividade 7

Você é capaz de resolver e responder às questões propostas?

01) O que é para você uma função?

02) O que é variável dependente e variável independente em uma função? Como você poderia representar uma função ou funções?

03) Determine a área da região do plano cartesiano, limitada pelo *eixo* ***x***, com ***x*** variando de 3 a 7 inclusive e pela função constante $f(x) = 4$. A área dessa região assemelha–se a quê? Isto é, que representação geométrica você tem para ela?

04) Determine a área da região do plano cartesiano, limitada pelo *eixo* ***x***, com ***x*** variando de 0 a 6 inclusive e pela função linear $f(x) = \frac{2x}{3}$. A área dessa região assemelha–se a quê? Isto é, que representação geométrica você tem para ela?

05) Determine a área da região do plano cartesiano, limitada pelo *eixo* ***x***, com ***x*** variando de 1 a 5 inclusive e pela função afim $f(x) = 3x + 2$. A área dessa região assemelha–se a quê? Isto é, que representação geométrica você tem para ela?

06) Determine a área da região do plano cartesiano, limitada pelo *eixo* ***x***, com ***x*** variando de 1 a 3 inclusive e pela função quadrática $f(x) = x^2$. A área dessa região assemelha–se a quê? Isto é, que representação geométrica você tem para ela?

07) Os ***valores*** encontrados para as áreas das questões 3, 4, 5 e 6 ***são exatos?***

- ***Objetivo da Atividade:*** Deixar clara a definição de função e as ideias de variável dependente e de variável independente. Conhecido o conceito de área, fazer aplicações para o cálculo de áreas de determinadas regiões do plano.
- ***Justificativa:*** No trabalho, com Cálculo Diferencial e Integral, dentre as grandes ideias nele contidas, o conceito de função é primordial. Como os alunos, em geral, sabem calcular as áreas de figuras planas geometricamente, acreditamos que se lhes apresentarmos outras figuras, cujas áreas não podem ser calculadas geometricamente, os estimularíamos a buscar novos caminhos. Esses seriam trabalhados através do cálculo de integrais.

Atividade 7

(COMPLEMENTO)

Você é capaz de resolver e responder às seguintes questões?

08) Como se define uma integral? Como podemos definir a área de uma região através de uma integral simples? Qual é a expressão que envolve a integral analiticamente?

09) Qual a diferença entre uma integral ***definida*** e uma integral ***indefinida?***

10) Então, existe apenas uma maneira para resolver os problemas dados? A solução é única? Por que na questão 6 você não resolveu só por geometria? Por que vocês lançaram mão da Integral para fazer isso?

11) O que significa para você a palavra ***Integrar?***

12) O que significa para você a palavra ***Integração?***

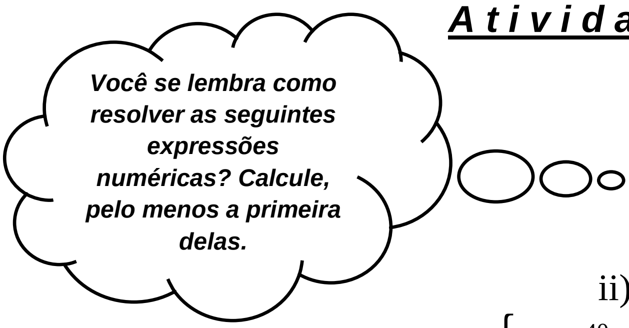
13) O que significa para você a palavra ***Integral?***

14) O que representa a expressão ***dx*** no cálculo de uma Integral?

15) ***QUEBRA – CABEÇA***

- ***Objetivo da Atividade:*** Definir a área de uma região plana através de uma integral simples. Expressar a área analiticamente como uma integral. Reconhecer os conceitos de integral definida e integral indefinida. Conhecer os significados das palavras integrar, integração e integral. Reconhecer os diferentes modos de se referir a *dx.*
- ***Justificativa:*** Conhecer todos os elementos que constituem o nobre conceito de função é importante e saber fazer uso deles, na construção de outros conceitos derivados, é necessário. É fundamental fazer com que os alunos, em seus grupos, possam "fazer matemática", discutindo e construindo esses conceitos, visando às suas aplicações.

A t i v i d a d e 8 – parte 1



i) $\left\{\left[\left(1+\frac{1}{2}\right):\left(1-\frac{1}{2}\right)\right]:\left[\left(2+\frac{2}{3}\right):\left(2-\frac{1}{3}\right)\right]\right\}:\frac{9}{4}$

ii) $\left\{[(-7-2)^2:(-3)^3+4.(-2)]-32^1\right\}-(5+2)$

iii) $\left\{(-1)^{40}-(-2-1)^2-\left[(4+0)^2\cdot(6-4)^3\right]\right\}:(-8+6)^3$

- ***Objetivo da Atividade:*** Discutir com os alunos sobre a necessidade de se reconhecer, obedecendo a ordem dos sinais de reunião, em primeiro lugar tudo o que estiver dentro de parêntesis, segundo, tudo o que estiver dentro de colchetes; e, depois, tudo o que estiver dentro de chaves. Com as operações, dentro dos sinais de reunião, deve ser obedecida da seguinte ordem: em primeiro lugar potenciações e radiciações, na ordem em que aparecerem; segundo, multiplicações e divisões, na ordem em que aparecerem; terceiro, adição e subtração, na ordem em que aparecerem.

- ***Justificativa:*** A necessidade de reconhecer a hierarquia da ordem das operações e da obediência aos sinais de reunião torna-se importante para a execução de técnicas operatórias, uma vez que essas ordens determinam a aceitação numa linguagem matemática das ações a serem desenvolvidas.

A t i v i d a d e 8 – parte 2

Você é capaz de resolver e responder as seguintes questões?

01) Se $y = f(x)$ dizemos que $y' = \frac{dy}{dx}$. Se $y' = 3x$ qual é o valor de ***y*** ? ____________

02) Seja $z = f(x,y)$

a) Se $f_{xx} = 4 - 3x + 2y$ então $f(x,y) = z =$ ____________________________

b) Se $f_{yy} = 4 - 3x + 2y$ então $f(x,y) = z =$ ____________________________

c) Se $f_{xy} = 4 - 3x + 2y$ então $f(x,y) = z =$ ____________________________

d) Se $f_{yx} = 4 - 3x + 2y$ então $f(x,y) = z =$ ____________________________

- ***Objetivo da Atividade:*** Usar conhecimentos de derivadas parciais que os alunos já haviam trabalhado no primeiro bimestre de Cálculo 2 para resolver as questões dadas.
- ***Justificativa:*** A necessidade de reconhecer nas integrais duplas a ordem de integração no que se refere ao domínio das variáveis de integração. Ainda, que os alunos compreendam o processo de iteração de procedimentos, ao calcular as integrais dadas. Para um bom desempenho em integrais definidas, é necessário que os alunos tenham conhecimento do conceito de antiderivada. Esses problemas dados requisitaram um treinamento com antiderivadas.

A t i v i d a d e 8 – parte 3

Você é capaz de resolver e responder as seguintes questões?

Integrais Iteradas

ITERAÇÃO **–** é o processo de resolução de uma equação mediante uma sequência de operações em que o objeto de cada uma é o resultado da que a precede.

Veremos como expressar uma *integral dupla* como uma *integral iterada (ou repetida)* e assim poderemos calculá–las como duas integrais simples.

Você é capaz de resolver e responder as seguintes questões?

03) No exercício seguinte esboce a região de integração e calcule a integral.

a) $\int_0^3\int_0^2 (4-y^2)\,dydx$ b) $\int_0^2\int_0^3 (4-y^2)\,dxdy$

c) $\int_0^3\int_{-2}^0 (x^2y-2xy)\,dydx$ d) $\int_{-2}^0\int_0^3 (x^2y-2xy)\,dxdy$

P E R G U N T A S :

04) O que você observou nos exercícios ***a*** e ***b***? ***c*** e ***d***?
05) O que difere quando se apresenta numa integral dupla ***dxdy*** ou ***dydx?***
06) Essa técnica operatória mudou muito a forma de resolver uma integral dupla daquela que usávamos para resolver uma integral simples?
07) Qual é a expressão que envolve a integral dupla analiticamente? Existe apenas uma forma? Se houver mais de uma, como você pode representá-las?

- ***Objetivo da Atividade:*** Relacionar a técnica operatória de uma integral dupla como uma integral iterada (repetida) e, assim, poder calcular a integral dada a partir de duas integrais simples.
- ***Justificativa:*** Ao fazer uma representação gráfica de cada problema, é importante reconhecer que a ordem de integração é irrelevante, desde que se observem os respectivos limites de integração.

A t i v i d a d e 8 – parte 4

Você é capaz de resolver os seguintes exercícios?

09) Nos exercícios seguintes esboce a região de integração e calcule a integral.

a) $\int_0^1 \int_0^{y^2} 3y^3 e^{xy}\, dxdy$ b) $\int_0^{\pi} \int_0^{x} x sen y\, dydx$

- ***Objetivo da Atividade:*** Nos exercícios (a) e (b), reconhecer que uma variável é dependente da outra e que, para calcular essas integrais, uma vai necessitar do processo de substituição e outra da técnica de integração por partes.
- ***Justificativa:*** Saber reconhecer o que objetivamos com esses exercícios faz–se necessário para a compreensão das técnicas operatórias utilizadas na integração dupla.

Atividade 9 – parte 1

Você é capaz de resolver e responder às seguintes questões?

INVERTENDO A ORDEM DE INTEGRAÇÃO

Nos exercícios abaixo esboce a região de integração e escreva uma integral dupla equivalente a ela com a ordem de integração invertida

01) $\int_0^2 \int_{y-2}^{0} dxdy$	**02)** $\int_0^1 \int_2^{4-2x} dydx$	**03)** $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} dxdy$
(22 do 12.1 THOMAS (2002))	(21 do 12.1 THOMAS (2002))	(23 do 12.1 THOMAS (2002))

- ***Objetivo da Atividade:*** Estes exercícios têm, por objetivo, fazer com que os alunos, ao analisarem os limites de integração, possam integrar primeiro, segundo uma ou outra variável, sempre buscando maior facilidade para o cálculo final.
- ***Justificativa:*** Orientar os alunos sobre a possibilidade de que uma escolha não conveniente da variável pode fazer com que a resolução desse problema fique bastante complicada ou, até, não conseguindo chegar à solução.

Atividade 9 – parte 2

Você é capaz de resolver e responder às seguintes questões?

<table>
<tr><td colspan="2">Nos exercícios 4 e 5 esboce a região de integração, inverta a ordem de integração e calcule a integral.</td></tr>
<tr><td>04) $\int_0^2 \int_x^2 2y^2 sen(xy)dydx$
(32 do 12.1 THOMAS (2002)
1º OBA!!! Adicionais: 33) 34) 36) e 38 do 12.1 THOMAS (2002)</td><td>05) Se R é uma Região triangular limitada pelas retas $\begin{cases} y = x \\ y = 2x \\ x + y = 2 \end{cases}$
Calcule a integral $\iint_R xydA$
[40 do 12.1 THOMAS (2002)]</td></tr>
</table>

- ***Objetivo da Atividade:*** Analisar as ordens de integração da integral dada; perceber qual seria a mais vantajosa e calcular a integral.
- ***Justificativa:*** Para que os alunos adquiram versatilidade com a técnica de resolução de integrais duplas é preciso que uma variedade de exemplos seja colocada, de modo a lhes provocar interesse e desenvolver essa habilidade.

Atividade 9 – parte 3

Você é capaz de resolver e responder às seguintes questões?

CURTAS E FÁCEIS	**VOLUME sob uma Superfície z = f(x,y)**
06) Qual é o volume de um paralelepípedo de base retangular com arestas iguais a 3 cm e 4 cm e altura 2 cm? ***07)*** Qual é o volume de um paralelepípedo de base retangular com arestas iguais a $\boldsymbol{x}$ cm e $\boldsymbol{y}$ cm e altura $\boldsymbol{z}$ cm? ***08)*** Como podemos expressar analiticamente o volume de uma superfície através de uma integral dupla?	***09)*** Encontre o volume do sólido que é limitado superiormente pelo cilindro $z = x^2$ e inferiormente pela região delimitada pela parábola $y = 2 - x^2$ e pela reta $y = x$ no plano xy. [42 do 12.1 THOMAS (2002)] **2º OBA!!!** *Adicionais: 43) 46) 47) 44) do 12.1 THOMAS (2002)*

- ***Objetivo da Atividade:*** Para "Curtas e Fáceis", nosso objetivo é o de preparar os alunos para resolver o problema colocado, isto é, questionando-os sobre o conceito de Volume e pedindo que ele possa ser expresso por uma integral dupla.
- ***Justificativa:*** Levar os alunos a perceber que, quando se trata de superfícies curvas, a geometria pode não dar conta de encontrar um valor exato e preciso para o volume.

Atividade 9 – parte 4

Você é capaz de resolver e responder às seguintes questões?

CURTAS E FÁCEIS	ÁREA por Integração Dupla
10) Qual é o valor numérico da área de um retângulo de lados 2 cm e 3 cm? ***11)*** Qual é a expressão algébrica para a área de um retângulo de lados ***x*** cm e ***y*** cm? ***12)*** Qual é o valor numérico do volume de um paralelepípedo de base retangular de arestas 2 cm e 3 cm e **1** cm de altura? ***13)*** Qual é a expressão algébrica para o volume de paralelepípedo de base retangular de arestas ***x*** cm e ***y*** cm e **1** cm de altura? ***14)*** Como podemos expressar analiticamente a área de uma região plana através de uma integral dupla?	Esboce a região limitada pelas retas e curvas dadas. Depois expresse a área da região como uma integral dupla iterada e calcule a integral ***15)*** A parábola $x = -y^2$ e a reta $y = x + 2$ (3 do 12.2 THOMAS (2002) ***3º OBA!!!*** *Adicionais: 7) 8) 6) do 12.2 THOMAS (2002)*

- ***Objetivo da Atividade:*** O que se pretende nesta atividade é que os grupos cheguem ao conceito de área de regiões limitadas do plano, dizendo que, se $f(x, y) = 1$, na definição da integral dupla sobre uma região *R*, onde $\Delta A = \Delta x \cdot \Delta y$, as somas parciais se reduzem a $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k$ e, à medida em que $\Delta\mathrm{x}$ e $\Delta\mathrm{y}$ se aproximam de zero, a cobertura de uma Região *R* pelos $\Delta\mathrm{A}_\mathrm{k}$ torna–se cada vez mais e mais completa.

  Define–se a área da região dessa região como o limite dado por $\acute{A}rea = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k = \iint_R dA$

- ***Justificativa:*** O fato de a área de uma região limitada no plano ser calculada através de um limite é uma ideia importante no Cálculo. Assim, definir essa área através do limite, que leva a uma integral dupla merece ser trabalhada.

5.4.3 – A resolução das atividades criadas para o Projeto pelo professor

Introdução

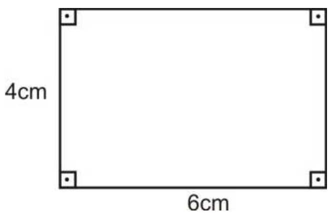
O professor, conhecendo o assunto e tendo elaborado as questões, buscou resolvê-las em detalhes, na expectativa de entender os caminhos trilhados pelos alunos, tanto conceitualmente como no uso de técnicas operatórias.

5.4.3.1 – Atividade 1 – resolução

Atividade 1

Você é capaz de determinar a área de:

a) Um retângulo de lados 4 cm e 6 cm? O que é um retângulo?

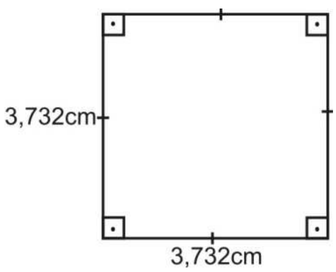


$$Área = b.h = 4cm \cdot 6cm = 24\,cm^2$$

Retângulo: é um quadrilátero com 2 pares de lados opostos congruentes e paralelos. Possui 4 ângulos retos.

b) Um quadrado de lado $\ell = 3{,}732\,cm$? O que é um quadrado?

Existe diferença entre um retângulo e um quadrado? Qual?

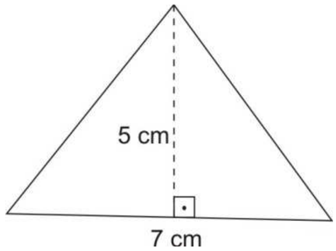


$$Área = \ell \cdot \ell = \ell^2 = (3{,}732cm)^2 = 13{,}927824\,cm^2$$

Quadrado: quadrilátero com todos os lados congruentes e quatro ângulos retos.

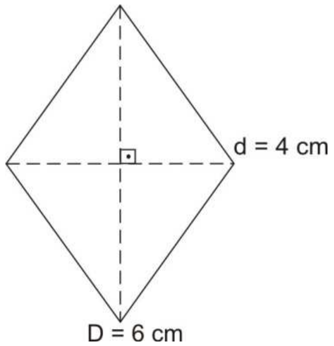
Ambos possuem lados opostos paralelos congruentes, contudo o retângulo possui 2 pares de lados congruentes e o quadrado os 4 lados congruentes. Ambos possuem os quatro ângulos retos. Assim, todo o quadrado é um retângulo, mas nem todo o retângulo é um quadrado.

c) Um triângulo cuja base é 7 cm e a altura 5 cm?



$$Área = \frac{1}{2}b.h = \frac{1}{2}.7cm.5cm = \frac{35}{2}cm^2$$

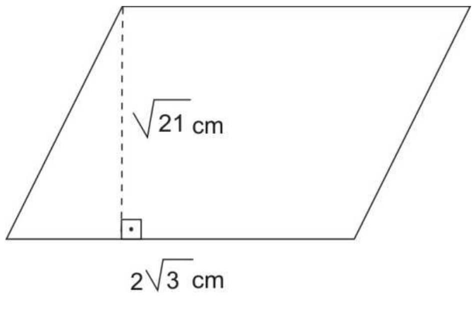
d) Um losango cujas diagonais valem 6 cm e 4 cm? O que é um losango?



$$Área = \frac{D.d}{2} = .\frac{6cm.4cm}{2} = 12\,cm^2$$

Losango é um quadrilátero que tem os quatro lados congruentes e os ângulos dois a dois congruentes.

e) Um paralelogramo de base $2\sqrt{3}$ cm e altura $\sqrt{21}$ cm. O que é um paralelogramo?



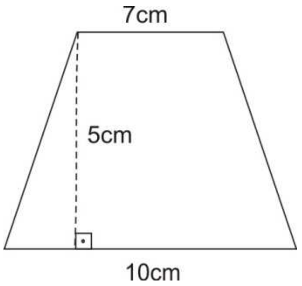
$$Área = b.h = 2\sqrt{3}cm.\sqrt{21}cm = 6\sqrt{7}\,cm^2$$

Paralelogramo: é um quadrilátero com dois pares de lados opostos paralelos e congruentes.

f) Um trapézio com base maior 10 cm, base menor 7 cm e altura 5 cm.

O que é um trapézio?

Como você identifica os lados denominados bases de um trapézio?



$$Área = \frac{(B+b)h}{2} = \frac{(10cm+7cm)5cm}{2} = \frac{17cm \cdot 5cm}{2} = \frac{85}{2}cm^2$$

Trapézio: é um quadrilátero com um par de lados paralelos que são denominados bases.

Existe diferença entre um paralelogramo e um trapézio? Qual?

Resposta: Sim. O trapézio possui somente um par de lados paralelos, enquanto que o paralelogramo possui dois pares de lados paralelos.

O que é área para você? Descreva com suas palavras.

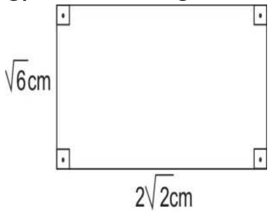
Resposta: Área é a medida de uma superfície plana.

5.4.3.2 – Atividade 2 – resolução

Atividade 2

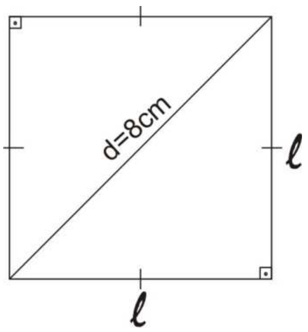
Você é capaz de determinar a área de:

g) Um retângulo de lados $2\sqrt{2}$ cm e $\sqrt{6}$ cm ?



$$Área = b.h = 2\sqrt{2}cm.\sqrt{6}cm = 2\sqrt{2.6}cm^2 = 2.2\sqrt{3}cm^2 = 4\sqrt{3}\,cm^2$$

h) Um quadrado de diagonal 8 cm.

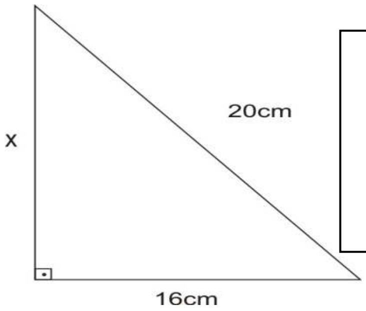


$$\ell^2 + \ell^2 = d^2 = (8cm)^2$$
$$2\ell^2 = 64cm^2$$
$$\ell^2 = 32cm^2$$
$$\text{Área} = \ell^2 = 32cm^2$$

ou

$$Área = \frac{d^2}{2} = \frac{8^2}{2} = \frac{64}{2} = 32\,cm^2$$

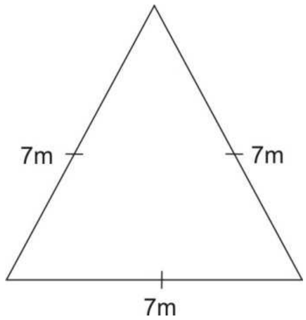
i) Um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 20 cm
e um dos catetos mede 16 cm.



$$(20cm)^2 = (16cm)^2 + x^2 \qquad \text{logo} \qquad x = 12 \text{ cm}$$

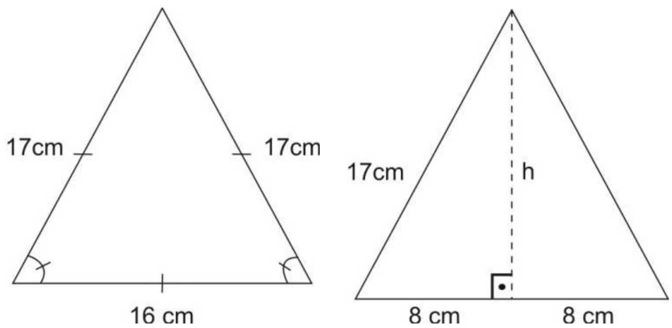
$$Área = \frac{b.h}{2} = \frac{cateto \text{ x } cateto}{2} = \frac{12cm.16cm}{2} = 96\, cm^2$$

j) Um triângulo cujos três lados são iguais a 7 m.



Triângulo equilátero $Área = \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{(7m)^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{49\sqrt{3}}{4} m^2$

k) Um triângulo cujos lados medem 17 cm,16 cm e 17 cm.

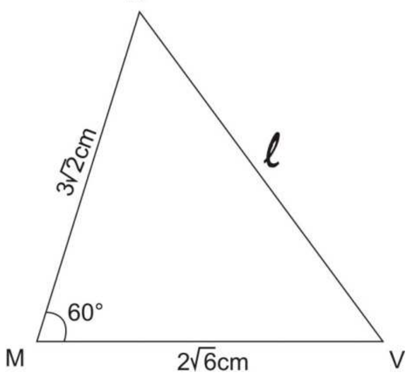


$$(17cm)^2 = (8cm)^2 + h^2$$

logo $h = 15 \text{ cm}$

$$Área = \frac{1}{2} b \cdot h = \frac{16cm \cdot 15cm}{2} = 120\, cm^2$$

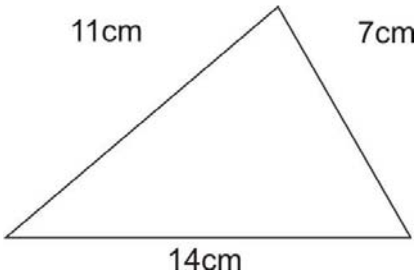
l) Um triângulo de vértices MVR, onde $\hat{M} = 60^o$, $\overline{MR} = 3\sqrt{2}$ cm e $\overline{MV} = 2\sqrt{6}$ cm.



$$Área = \frac{a.b}{2} sen\alpha = \frac{2\sqrt{6}cm.3\sqrt{2}cm}{2} sen60^0 =$$

$$= 3.\sqrt{12}\frac{\sqrt{3}}{2} cm^2 = \frac{3\sqrt{36}}{2} cm^2 = \frac{18}{2} cm^2 = 9\, cm^2$$

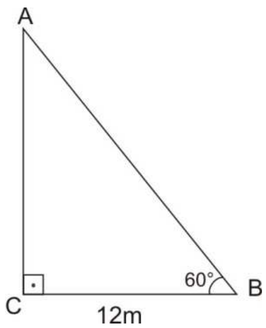
m) Um triângulo cujos lados medem 14 cm, 11 cm e 7 cm



$$(11cm + 7cm) > 14cm \quad \text{logo existe o triângulo}$$
$$\text{Fórmula de Heron} \quad perímetro = 2p = (11 + 7 + 14)cm$$
$$\text{logo temos } 2p = 32cm \quad \text{logo } p = 16cm$$
$$\text{Área} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$Área = \sqrt{16cm(16cm - 7cm)(16cm - 11cm)(16cm - 14cm)} =$$
$$= \sqrt{16cm.9cm.5cm.2cm} = 12\sqrt{10}\ cm^2$$

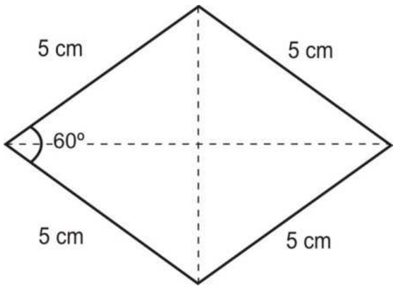
n) Um triângulo de vértices A,B, e C, onde o ângulo C é reto,

$\hat{B} = 60^o$ e o segmento BC mede 12m.



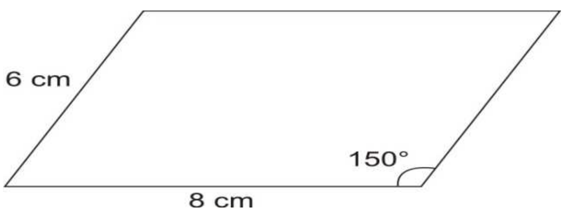
$$tg\,60^o = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AC}}{12m}$$
$$\overline{AC} = 12\sqrt{3}\text{ m}$$
$$Área = \frac{\overline{AC}.\overline{BC}}{2} = \frac{12\sqrt{3}m.12m}{2} =$$
$$Área = 72\sqrt{3}\text{ m}^2$$

o) Um losango de perímetro 20 cm e um ângulo interno de 60º.



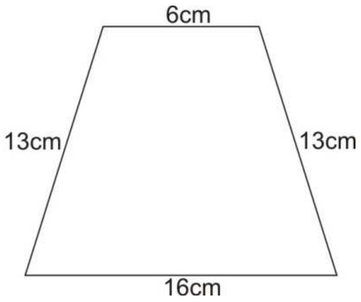
$$\text{Perímetro} = 20\text{ cm} \quad \text{logo} \quad 4\ell = 20\text{cm} \quad \text{assim} \quad \ell = 5\text{cm}$$
$$\text{Área} = 2\frac{.\ell \cdot \ell}{2} sen\alpha = 2\frac{5cm.5cm}{2} sen60° = 25\frac{\sqrt{3}}{2} cm^2$$

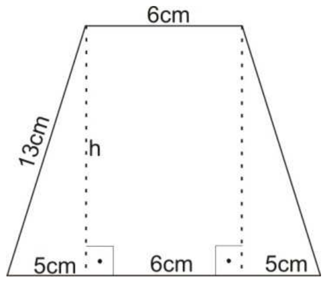
p) Um paralelogramo com lados 6 m e 8 m e um ângulo interno de 150º



$$\text{Área} = 2\frac{a.b}{2} sen\alpha = 2\frac{6cm.8cm}{2} sen150° =$$
$$= 6.8.sen30° cm^2 = 48.\frac{1}{2} cm^2 = 24\,cm^2$$

q) um trapézio com lados iguais a 6 cm, 13 cm, 13 cm, 16 cm.



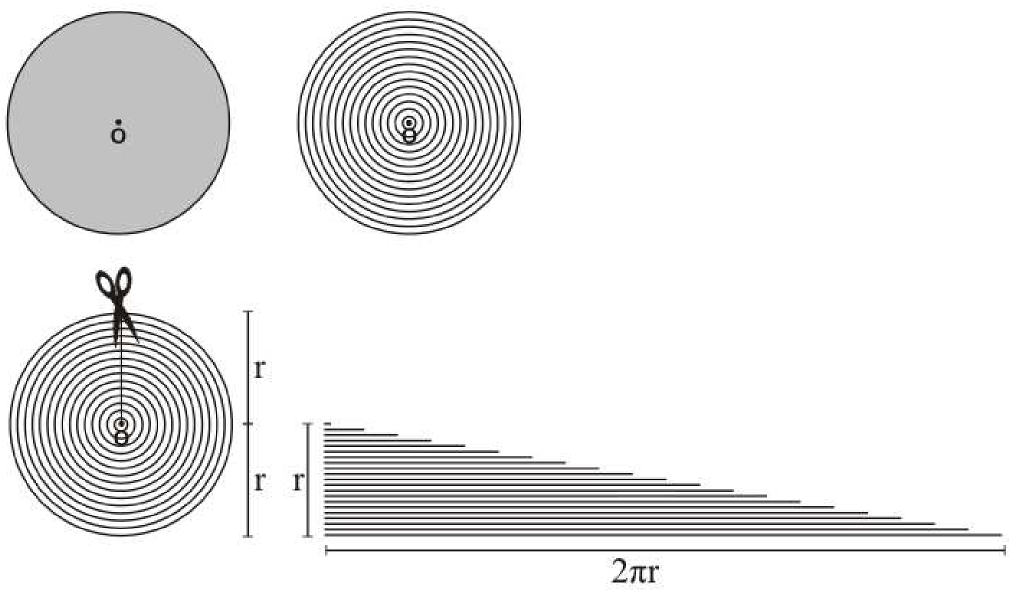


$$(13cm)^2 = (5cm)^2 + h^2$$
$$h = 12 \text{ cm}$$
$$Área = \frac{(B+b)h}{2} = \frac{(16cm + 6cm)12cm}{2} =$$
$$= 11cm.12cm = 132\ cm^2$$

2) Descreva como você calcularia a área de um: Pentágono, Hexágono, Heptágono, Octógono e Eneágono regulares. E os não regulares?

Resposta: Posso proceder tanto para os polígonos regulares quanto para os não regulares da mesma maneira. Uma possibilidade é traçar todas a diagonais a partir de um vértice do polígono obtendo assim triângulos. A partir daí, calculo a área de cada um dos triângulos e efetuo a adição de todas suas áreas. Um polígono de n lados gerará $(n-2)$ triângulos.

3) *Supondo que você não conheça a **área de um círculo**, como você faria para calcular sua área ? Pense nos antigos, os gregos por exemplo. Como eles a calcularam?*



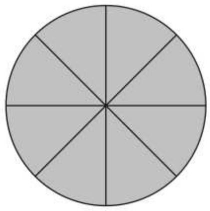
Imaginemos um círculo composto por infinitas circunferências concêntricas. Traçando um raio r da maior circunferência, da parte externa até o seu centro O, sabe-se que essa circunferência desse círculo tem por comprimento $C = 2\pi \cdot r$. Em seguida tomamos uma outra das circunferências, de raio $r_1 < r$ e, assim sucessivamente até a "última". Mostrando os comprimentos de todas essas circunferências paralelamente, notamos a formação de um triângulo retângulo que tem por base $C = 2\pi \cdot r$ e tem por altura $h = r$ Logo a área do círculo se apresentará equivalente à do triângulo retângulo construído. Assim,

$$\text{Área do círculo} = \text{Área do triângulo} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2\pi\, r \cdot r}{2} = \pi \cdot r^2$$

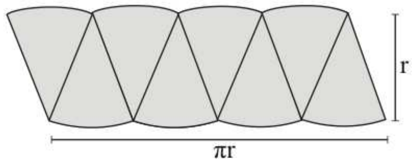
Sabe-se que Arquimedes já via a área do círculo como a área de um triângulo retângulo tendo o comprimento da circunferência do círculo como um lado e o raio do círculo como outro, entendendo-se esses lados que partem do vértice do ângulo reto.

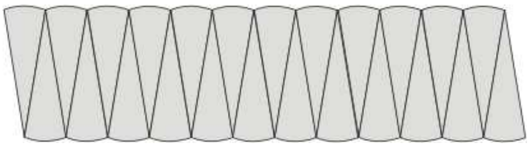
Passamos agora a uma demonstração apresentada em Onuchic; Allevato (2009) no artigo Trabalhando Volume de Cilindros através da Resolução de Problemas a ser publicado na revista da SBEM-RS, onde podemos ler que uma das descobertas mais interessantes a que as crianças podem chegar, é a de buscar a relação entre o comprimento C da circunferência de um círculo (a distância que circunda o círculo ou o perímetro) e o comprimento D do diâmetro (uma reta que passa pelo centro ligando dois pontos da circunferência). O comprimento da circunferência de um círculo é cerca de 3,14 vezes o comprimento do diâmetro. A razão exata entre C e D é um número irracional próximo de 3,14 e é representado pela letra grega π. Assim, $\pi = C/D$, o comprimento da circunferência dividido pelo seu diâmetro. Ou, de uma forma diferente, $C = \pi D$. Como metade do diâmetro é o raio r, então a mesma equação pode ser escrita $C = 2\pi r$.

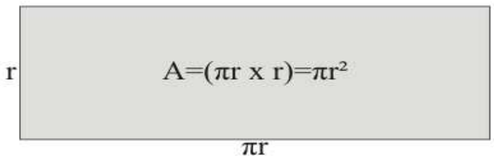
A busca de uma fórmula para o cálculo da área A de um círculo pode ser feita de várias maneiras. Uma delas, utilizando um trabalho manual com os alunos, poderia ser o caso de se tomar um círculo e dividi-lo em 8 setores, todos eles tendo a mesma área.Os 8 setores podem ser arranjados numa figura "próxima de um paralelogramo". Se, ao invés de 8, construíssemos 24 setores, essa figura ficaria "muito mais próxima de um paralelogramo". Como o número de setores pode se tornar bem maior, a figura, então, se tornará "mais e mais próxima de um retângulo", que é um particular paralelogramo, cuja área é dada por $A = b \cdot h = \pi r \cdot r = \pi \cdot r^2$.



C=2πr



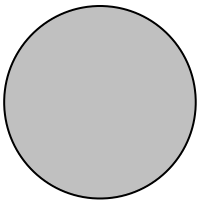
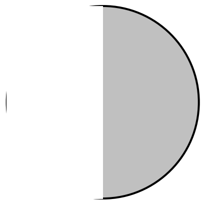
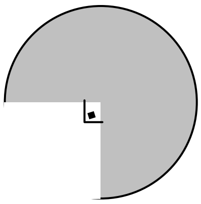
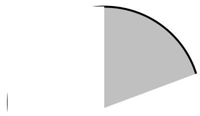




5.4.3.3 – Atividade 3 – resolução

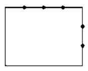
Atividade 3

01) Determine a área das figuras:

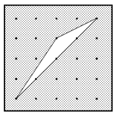
a) raio = 7 cm  $Área = \pi.r^2$ $Área = \pi.(7cm)^2 =$ $= 49\pi\ cm^2$	b) diâmetro = 5cm  Como d = 2r temos r = $\frac{5}{2}cm$ $Área = \frac{1}{2}\pi.r^2 =$ $= \frac{\pi}{2}.\left(\frac{5}{2}cm\right)^2 =$ $= \frac{\pi}{2}.\frac{25}{4}cm^2 =$ $= \frac{25\pi}{8}cm^2$	c) raio = 8cm  $Área = \frac{3}{4}.\pi.r^2 =$ $= \frac{3.\pi.(8cm)^2}{4} =$ $= \frac{3.\pi.64}{4}cm^2 =$ $= \frac{3.\pi.16}{1} =$ $= 48\pi\ cm^2$	d) raio = 6cm e ângulo central de ***72º***  $Área = \frac{\pi.r^2.\alpha}{360º} =$ $= \frac{\pi.(6cm)^2.72º}{360º} =$ $= \frac{36\pi}{5}cm^2$

02) Determine a ***área escura***.

a) Os lados do retângulo da figura, de área 48 u^2, foram divididos em partes iguais pelos pontos assinalados.

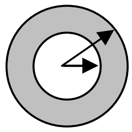


b) distância entre dois pontos 1 cm

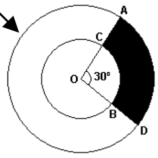


c) raios 4 cm e 7 cm

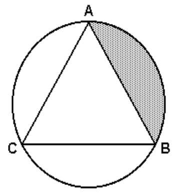
c_1)



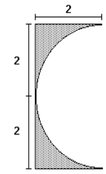
c_2)



d) diâmetro igual a 9 cm



e)



2a) Seja ***x*** a unidade linear dos lados de um retângulo de base *4x* e altura *3x.*

Assim, $3x.4x = 48u^2 \quad 12x^2 = 48u^2 \quad x^2 = 4u^2 \quad x = 2u$

Temos um triângulo em branco com lados

$3x = 6u$ e $3x = 6u$ e outro de lados $1x = 2u$ e $4x = 8u$

Então,

Área escura será igual a área total da qual se subtrai a área dos dois triângulos em branco

$$48u^2 - \frac{6u.6u}{2} - \frac{8u.2u}{2} = (48 - 18 - 8)u^2 = 22u^2$$

2b)

$$Área_{Triângulo} = \frac{b.h}{2} = \frac{4\sqrt{2}cm.\frac{\sqrt{2}}{2}cm}{2} = 2cm^2 \quad Área \text{ Escura} = 6cm.6cm - 2cm^2 = 34cm^2$$

2c_1)

$$\pi.R^2 - \pi.r^2 = \pi.(R^2 - r^2)$$
$$\pi.[(7cm)^2 - (4cm)^2] = \pi[49cm^2 - 16cm^2] = 33\pi\ cm^2$$

2c2)

$$\frac{\pi.R^{2.\alpha}}{360°}-\frac{\pi.r^2.\alpha}{360°}=\frac{\pi^2.\alpha.(R^2-r^2)}{360°}=$$

$$=\frac{\pi.30°}{360°}[(7cm)^2-(4cm)^2]=\frac{\pi.30°}{360°}(49cm^2-16cm^2)=\frac{33.\pi}{12}cm^2=\frac{11.\pi}{4}cm^2$$

2d) Sendo ABC equilátero, o ângulo C mede 60°.

Logo, o ângulo central mede 120°.

$$\frac{2.h}{3}=r \quad \text{assim } \frac{2h}{3}=\frac{9}{2}\text{cm} \quad Logo, h=\frac{27}{4}cm$$

$$Com, h=\frac{\ell\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\frac{27}{4}cm=\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{27}{2\sqrt{3}}cm=\ell\Rightarrow\ell=\frac{9\sqrt{3}}{2}\text{cm}^2$$

Área procurada = (Área do círculo – Área do triângulo) / 3

$$Área=\frac{\pi.r^2-\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}}{3}=\frac{\frac{\pi(\frac{9}{2}cm)^2}{1}-\frac{(\frac{9\sqrt{3}}{2}cm)^2.\sqrt{3}}{4}}{3}=\frac{\frac{81\pi}{4}cm^2-\frac{243\sqrt{3}}{16}cm^2}{3}=$$

$$=\frac{\frac{324\pi-243\sqrt{3}}{16}}{3}cm^2==\frac{324\pi.243\sqrt{3}}{3.16}cm^2=\frac{3(108\pi-81\sqrt{3})}{3.16}\text{cm}^2=\frac{108\pi-81\sqrt{3}}{16}\text{cm}^2$$

2e)

$$Área=\frac{4u.4u-\pi.(2u)^2}{2}=$$

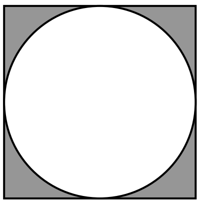
$$=\frac{16-4\pi}{2}u^2=\frac{4(4-\pi)}{2}u^2=2(4-\pi)u^2=$$

$$=(8-2\pi)\,u^2$$

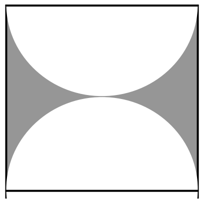
03) Nos exercícios abaixo adote lado do quadrado igual a 8 cm.

Determine a ***área escura***.

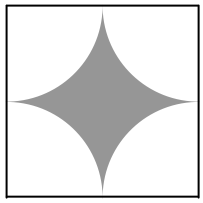
a)



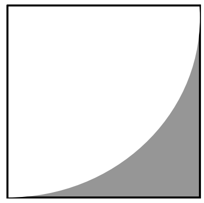
b)



c)



d)



3a) $A = (8cm)^2 - \pi(4cm)^2 = (64-16\pi)cm^2 = 16(4-\pi)cm^2$

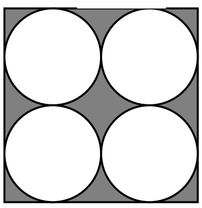
3b) $Área = (64-16\pi)cm^2$

3c) $Área = (64-16\pi)cm^2$

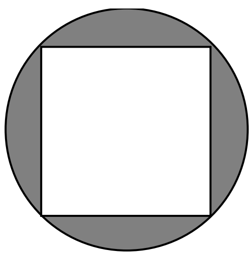
3d) $Área = (8cm)^2 - \frac{1}{4}\pi.r^2 = (8cm)^2 - \frac{1}{4}\pi.(8cm)^2 = (8cm)^2(1-\frac{\pi}{4}) = (64-16\pi)\ cm^2$

04) Determine a *área interna* das pétalas. Considere lado do Quadrado igual a 8 cm.

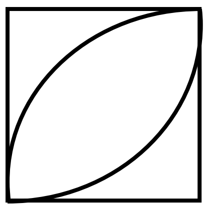
3e)



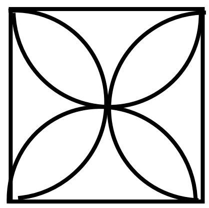
3f)



4a)



4b)



3e) Lado do quadrado = 8 cm

$$(8cm)^2 - 4\pi.r^2 =$$
$$= 64cm^2 - 4\pi(2cm)^2 =$$
$$= (64 - 16\pi)\ \text{cm}^2$$

3f) Lado do quadrado = 8 cm

diâmetro da circunferência é igual

a diagonal do quadrado

$$R = \frac{8\sqrt{2}}{2}cm = 4\sqrt{2}cm$$
$$\acute{A}rea = \pi\ \text{r}^2 - (8\text{cm})^2 =$$
$$= \pi(4\sqrt{2}cm)^2 - 64cm^2 =$$
$$= \pi.16.2cm^2 - 64cm^2 =$$
$$= (32\pi - 64)cm^2 = 32(\pi - 2)\ \text{cm}^2$$

4a)

$$\acute{A}rea = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{8cm.8cm}{2} = \frac{\pi.64cm^2}{4} - \frac{64}{2}cm^2 =$$
$$= \left(\frac{64\pi}{4} - \frac{64}{2}\right)cm^2 = (16\pi - 32)\text{cm}^2 \quad \text{(meia pétala)}$$

logo para uma pétala temos:

$$2 \cdot (16\pi - 32)cm^2 =$$
$$= (32\pi - 64)cm^2 =$$
$$= 32(\pi - 2)\ \text{cm}^2$$

4b)

$$\acute{A}rea = 4\left[2(\frac{\pi.r^2}{4} - \frac{4cm.4cm}{2}\right] =$$
$$= 8\left[\frac{\pi.(4\text{cm})^2}{4} - \frac{16}{2}cm^2\right] =$$
$$= (32\pi - 64)cm^2 =$$
$$= 32(\pi - 2)\ \text{cm}^2$$

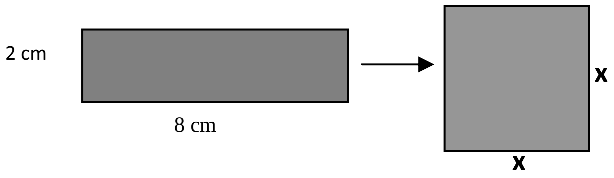
5.4.3.4 – Atividade 4 – resolução

Atividade 4

Você é capaz de resolver os seguintes problemas?

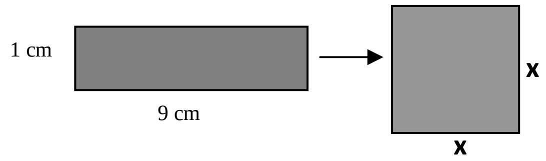
01) Determine o valor de x em:

a)



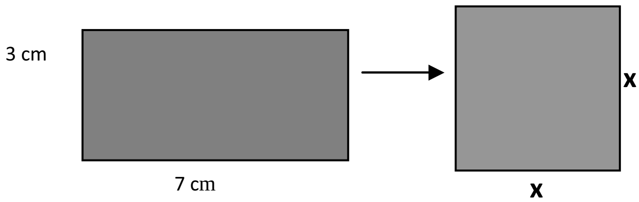
$$2cm.8cm = x^2$$
$$16cm^2 = x^2$$
$$4cm = x$$

b)



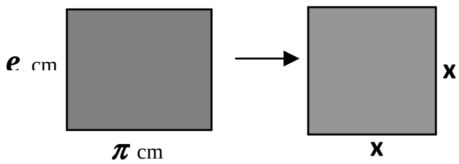
$$1cm.9cm = x^2$$
$$9cm^2 = x^2$$
$$3cm = x$$

c)



$$3cm.7cm = x^2$$
$$21cm^2 = x^2$$
$$\sqrt{21}\,cm = x$$

d)



$$e\,cm.\pi\,cm = x^2$$
$$e\pi\,cm^2 = x^2$$
$$\sqrt{e\pi}\,cm = x$$

02) Qual deverá ser o lado de um quadrado de mesma área de um trapézio com base maior 12 cm, base menor 6 cm e altura 4 cm?

$$\text{Área do Trapézio} = \text{Área do quadrado}$$
$$\frac{(B+b).h}{2} = x^2 \quad \text{logo} \quad \frac{(12cm + 6cm).4cm}{2} = \frac{18cm \cdot 4cm}{2} = x^2 \quad \text{assim,}\ 36cm^2 = x^2 \quad \text{e} \quad x = 6\,\text{cm}$$

03) Qual deverá ser o lado de um quadrado de mesma área de um losango cujas diagonais valem 6 cm e 4 cm?

$$\text{Área do Losango} = \text{Área do quadrado}$$
$$\frac{D.d}{2} = x^2 \quad \text{logo} \quad \frac{6cm.4cm}{2} = x^2 \quad \text{assim}\ 12cm^2 = x^2 \quad \text{e} \quad x = \sqrt{12}cm = 2\sqrt{3}cm$$

04) O que você fez nos exercícios acima?

Resposta: Determinei a medida do lado do quadrado que possui a mesma área de cada um dos polígonos.

Há algo em comum? *Resposta:* Sim

Você poderia dar algum nome a isso? Qual? *Resposta:* Sim, quadrar polígonos.

5.4.3.5 – Atividade 5 – resolução

Atividade 5

01) É possível quadrar um círculo?

02) Como você pode resolver o problema acima?

03) De que maneira você pode fazer isso?

04) Há alguma relação entre as áreas dessas figuras? Demonstre–a se houver.

05) O valor obtido é um valor exato? é aproximado? De que tipo?

Para ser possível quadrar um círculo deveríamos ter

$\text{Área do Quadrado} = \text{Área do Círculo}$

$\text{x}^2 = \pi . r^2$ logo $\text{x} = \sqrt{\pi . r^2}$ assim $x = r\sqrt{\pi}$

Mas não é possivel construir, somente com régua e compasso, o lado desse quadrado, um segmento de comprimento $r\sqrt{\pi}$. π e $\sqrt{\pi}$ são números irracionais, mas não algébricos, por isso são chamados irracionais transcendentes, ou seja, aqueles que não são raízes de uma equação algébrica de coeficientes racionais.

O número π é igual a 3,14159265358979323846264338327950288419716939 9**...** uma decimal infinita não periódica.

Muitos séculos se passaram e, finalmente, revelou-se não ser possível resolver o problema da quadratura do círculo, pelo fato de ele envolver o número π .

Carl Louis Ferdinand Von Lindemann (1852-1939), um matemático alemão, tornou-se notável pela prova dessa impossibilidade. Em 1882, publicou seu resultado pelo qual é mais conhecido, a transcendentalidade de π . Seus métodos são parecidos com aqueles que, nove anos antes, permitiram a Charles Hermite demonstrar que o número de Euler, $e = 2{,}7182818284\ 59...$, a base dos logaritmos naturais, é transcendente. Anterior à publicação da demonstração de Lindemann, sabia-se que se π fosse transcendente, então o antigo problema da quadratura do círculo não poderia ser resolvido.

O pesquisador gostaria de deixar registrado ter observado que

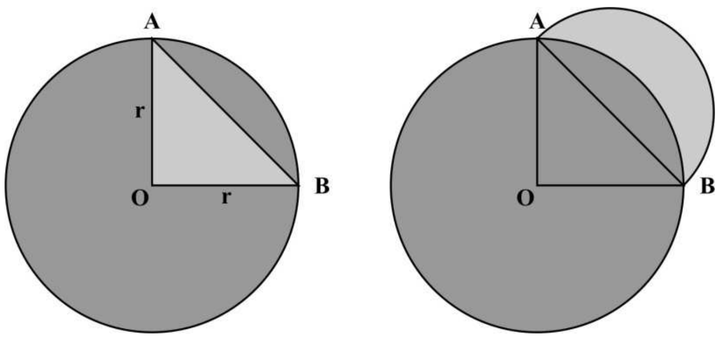
$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, que a função gama $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^{\alpha-1} dx$, com $\alpha > 0$ assume $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Outras considerações o pesquisador deixa a cargo do leitor.

Problemas de Hipócrates (Eves (2004, p.155)

Uma luna é uma figura plana, na forma de lua, limitada por dois arcos circulares de raios desiguais e mesmos extremos.

1º) Seja AOB um quadrante de um círculo. Tomando $\overline{AB}$ como diâmetro, trace o semicírculo voltado para fora do quadrante. Mostre que a luna limitada pelo quadrante e pelo semicírculo tem área igual à do triângulo AOB.

Resolução problema 1



Área do triângulo = $\dfrac{b.h}{2} = \dfrac{r.r}{2} = \dfrac{r^2}{2}$

Área do segmento circular = Área do quadrante ($\frac{1}{4}$ de círculo) menos a área do triângulo $= \pi\dfrac{r^2}{4} - \dfrac{r^2}{2}$

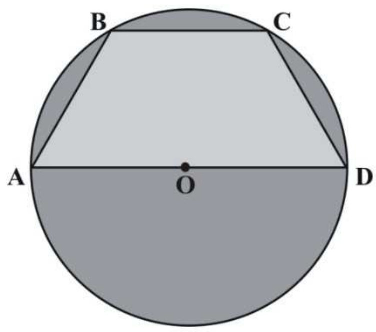
Área da Luna = Área do semicírculo de diâmetro $r\sqrt{2}$ menos a área do segmento circular (segmento AB = $r\sqrt{2}$)

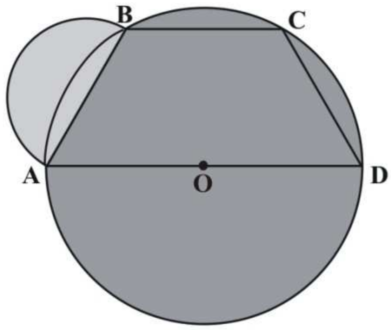
De fato Área da Luna = $\begin{cases} = \dfrac{1}{2}\cdot\pi\dfrac{(r\sqrt{2})^2}{4} - \left(\pi\dfrac{r^2}{4} - \dfrac{r^2}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\cdot\pi\dfrac{r^2\cdot 2}{4} - \left(\pi\dfrac{r^2}{4} - \dfrac{r^2}{2}\right) = \\ = \pi\dfrac{r^2}{4} - \left(\pi\dfrac{r^2}{4} - \dfrac{r^2}{2}\right) == \pi\dfrac{r^2}{4} - \pi\dfrac{r^2}{4} + \dfrac{r^2}{2} = \dfrac{r^2}{2} \end{cases}$

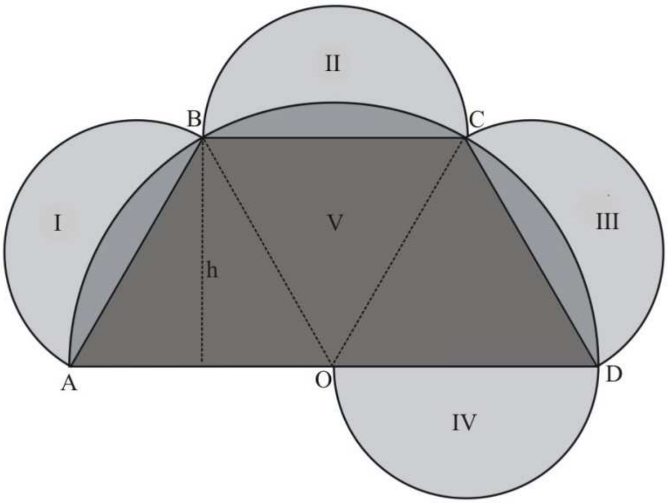
Então, Área da Luna = Área do triângulo.

2º) Seja ABCD um semi–hexágono regular inscrito num círculo de diâmetro $\overline{AD}$. Construa uma luna descrevendo, exteriormente ao círculo, um semicírculo de diâmetro $\overline{AB}$. Mostre que a área do trapézio ABCD é a soma do triplo da área da luna com a área do semicírculo de diâmetro $\overline{AB}$.

<u>*Resolução problema 2*</u>





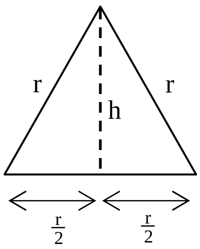


com $\overline{OD} = \overline{OC} = \overline{BC}$

Queremos provar que

Área do Trapézio = $A_{Trapézio}$ = V=I + II + III +IV, isto é que

3.Área da Luna + Área do semicírculo = Área do trapézio

Cálculo da altura do Trapézio	Cálculo da área do Trapézio
$r^2 = h^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 =$ $= r^2 = h^2 + \frac{r^2}{4} =$ $= r^2 - \frac{r^2}{4} = h^2 =$ $= \frac{3}{4}r^2 = h^2 =$ $= \frac{\sqrt{3}}{2}r = h$  	$A = \frac{(b+B)h}{2}$ onde $b = \overline{BC} = r$; $B = \overline{AD} = 2r$; $h = r\frac{\sqrt{3}}{2}$ $A_{Trapézio} = \frac{(r+2r)\frac{r\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{3r^2\sqrt{3}}{4}$

$$\text{Área do semicírculo de diâmetro } \overline{AB} = r \text{ é } = \tfrac{1}{2}\text{Área do círculo} = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \pi\frac{r^2}{8} = A_{SEMICÍRCULO}$$

$$\text{Área do triângulo AOB} = \text{Área do triângulo equilátero} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{r \cdot \frac{r\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = A_{Triângulo\ AOB}$$

$$\text{Área do setor circular} = \frac{1}{6}\pi \cdot r^2$$

$$\text{Área do segmento circular} = \text{Área do setor - } A_{Triângulo\ AOB} = \frac{1}{6}\pi \cdot r^2 - \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = r^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\text{Área da Luna} = A_{Semicírculo} - A_{Segmento\ circular} = \pi\frac{r^2}{8} - r^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = r^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{24}\right)$$

Queremos mostrar que $3 \cdot \text{Área da Luna} + \text{Área do Semicírculo} = \text{Área do Trapézio}$

$$= 3 \cdot \left[r^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{24}\right)\right] + \pi \cdot \frac{r^2}{8} =$$

$$= 3r^2\frac{\sqrt{3}}{4} - 3r^2\frac{\pi}{24} + \pi \cdot \frac{r^2}{8} =$$

$$= 3r^2\frac{\sqrt{3}}{4} - \pi \cdot \frac{r^2}{8} + \pi \cdot \frac{r^2}{8} =$$

$$= 3r^2\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3r^2\sqrt{3}}{4}$$

Então, $3 \cdot \text{Área da luna} + \text{Área do Semicírculo} = \text{Área do Trapézio} = \frac{3r^2\sqrt{3}}{4}$

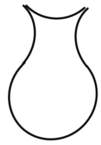
Assim, foi possível aos gregos quadrarem essas lunas pois elas, no seus cálculos, não necessitam do número π, isto é, independem do número π. A prova dos gregos foi puramente geométrica, e nós a encontramos no livro de Burton (2007) na página 125.

5.4.3.6 – Atividade 6 – resolução

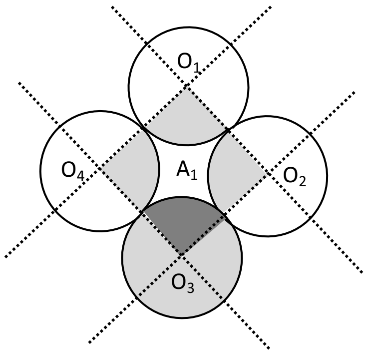
Atividade 6

Problema para Pensar. Você é capaz de resolver este problema de geometria?

"Três um-quarto de círculo e um três-quartos de círculo – todos de raio igual a 10 cm – compõem esta atraente forma de jarro. Qual é sua área?"



Tente resolver numericamente e se for possível algebricamente, com ferramental geométrico e pense se haveria alguma outra forma de resolver esse problema.



Área do quadrado

$$A_q = 4 \cdot \frac{1}{4} \text{ da área do círculo} + A_1 = \text{área do círculo} + A_1 = \pi r^2 + A_1$$

Como o raio do círculo é igual a 10 cm, então, $A_q = (100\pi + A_1)\ \text{cm}^2$

Área do jarro

$$A_J = 4 \cdot \frac{1}{4} \text{ da área do círculo} + A_1 = \text{área do círculo} + A_1 = \pi r^2 + A_1$$

Então $A_J = (100\pi + A_1)\ \text{cm}^2$

Portanto $A_J = A_q$

Como cada lado ℓ do quadrado mede 20 cm, então

$$A_q = \ell \cdot \ell = 20cm \cdot 20cm = 400cm^2$$

Consequentemente $A_J = 400\ cm^2$

Observação: Pode-se ver que é irrelevante o raio valer 10 cm. Qualquer que fosse outro valor do raio, a fórmula generalizada para encontrar área seria

$$A_J = 2r \cdot 2r = 4r^2$$

Observamos que foi possível quadrar o jarro, pois este também não depende do número π .

5.4.3.7 – Atividade 7 – resolução

Atividade 7

Você é capaz de resolver e responder às questões propostas?

01) O que é para você uma função?

Uma função f é uma lei tal que, para cada elemento x em um conjunto A , faz corresponder um único elemento $y = f(x)$ em um conjunto B ,

onde A é o campo de definição da função (Domínio),

onde B é o campo de variação da função (Contra-Domínio)

02) O que é variável dependente e variável independente em uma função? Como você poderia representar uma função ou funções?

A variável Independente representa um número arbitrário no campo de definição da função f , isto é, no domínio da função.

A variável dependente representa um número qualquer no campo de variação da função f , que é a imagem de x pela função f .

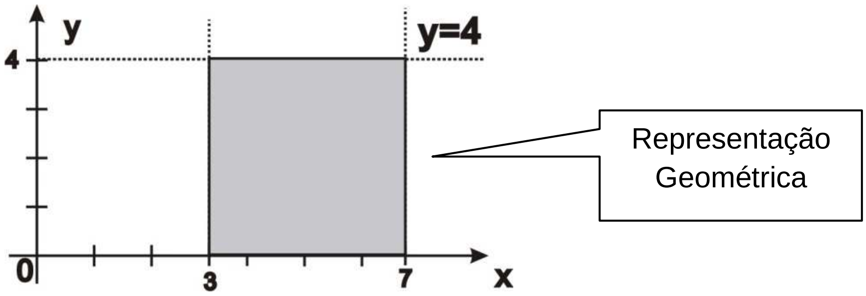
Relações funcionais, isto é, funções, podem ser expressas em contextos reais, gráficos, equações algébricas, tabelas, e palavras. Cada representação para uma dada função é simplesmente um modo diferente de expressar a mesma ideia. Cada representação dá uma diferente visão da função. O valor de uma particular representação depende de seu propósito.

Pode-se representar a função por $y = f(x)$, que se lê y é dado em função de x ou, ainda, a variável y depende da variável x .

Exemplos:

$y = f(x) = x^4$; $y = f(x) = senx$; $y = f(x) = e^x$; $y = f(x) = 7 - 5x + x^3$.

03) Determine a área da região do plano cartesiano, limitada pelo *eixo* ***x***, com ***x*** variando de 3 a 7 inclusive e pela função constante *f(x) = 4.* A área dessa região assemelha-se a quê? Isto é, que representação geométrica você tem para ela?

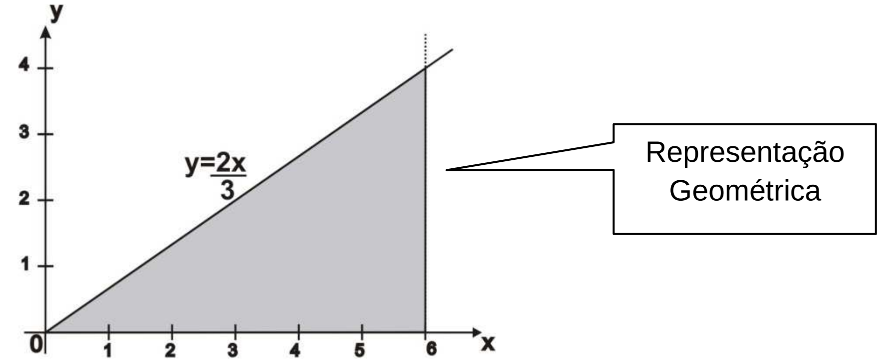


Algebricamente
$y = f(x) = 4 \quad \text{com} \quad 3 \le \text{x} \le 7$ Área de um quadrado $\text{A} = (\text{lado})^2 = (4u)^2 = 16u^2$

Como esses alunos estavam frequentando a disciplina de Cálculo 2 e, como já foi dito, já haviam tido contato com as técnicas operatórias envolvendo integrais simples, resolvemos, no projeto, perguntar-lhes se conheciam alguma outra forma de resolver este problema. Caso positivo, eles buscariam encontrar essa área por esse meio. Então, alguns deles resolveram por meio de integrais, assim

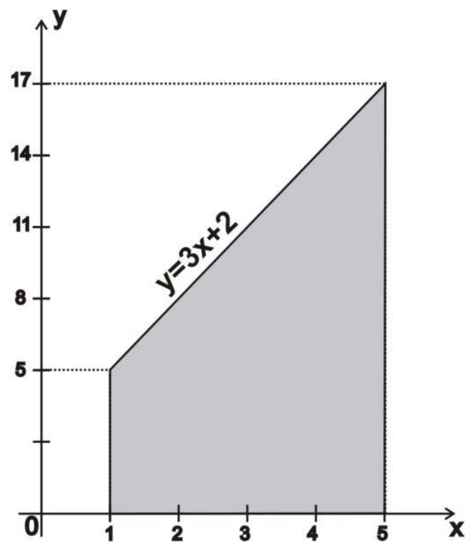
Através da Integral
$Área = \int_a^b f(x)dx$ $A = \int_3^7 4dx = [4x]_3^7 = (4.7 - 4.3)u^2 =$ $= (28 - 12)u^2 = 16u^2$

04) Determine a área da região do plano cartesiano, limitada pelo *eixo* ***x***, com ***x*** variando de 0 a 6 inclusive e pela função linear $f(x) = \frac{2x}{3}$. A área dessa região assemelha–se a quê? Isto é, que representação geométrica você teria para ela?



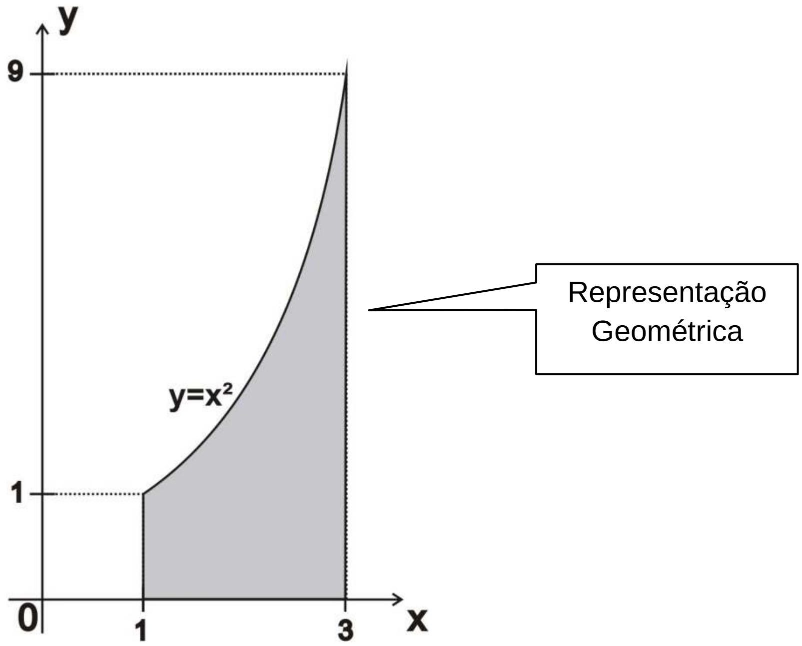
Algebricamente	Através da Integral
$y = f(x) = \frac{2x}{3}$ com $0 \le x \le 6$ Área de um triângulo $A = \frac{b.h}{2} = \frac{6u.4u}{2} = 12u^2$	$\text{Área} = \int_a^b f(x)dx$ $A = \int_0^6 \frac{2x}{3} dx = \frac{2}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^6 = \frac{2}{3}\left[\frac{6^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right]u^2 =$ $= \frac{2}{3}\left[\frac{36}{2}\right]u^2 = 12u^2$

05) Determine a área da região do plano cartesiano, limitada pelo *eixo* ***x***, com ***x*** variando de 1 a 5 inclusive e pela função afim $f(x) = 3x + 2$. A área dessa região assemelha–se a quê? Isto é, que representação geométrica você tem para ela?



Algebricamente	Através da Integral
$y = f(x) = 3x + 2 \quad \text{com} \quad 1 \leq x \leq 5$ Área de um trapézio $\text{A} = \frac{(B+b).h}{2} = \frac{(17\text{u} + 5\text{u}).4\text{u}}{2} = 44u^2$	$\text{Área} = \int_a^b f(x)dx$ $A = \int_1^5 (3x+2)dx = \left[\frac{3x^2}{2} + 2x\right]_1^5 =$ $= \left[\frac{3.25}{2} + 2.5 - \left(\frac{3.1}{2} + 2.1\right)\right]u^2 =$ $= \left[\frac{75}{2} + 10 - \frac{3}{2} - 2\right]u^2 = 44u^2$

06) Determine a área da região do plano cartesiano, limitada pelo *eixo* ***x***, com ***x*** variando de 1 a 3 inclusive e pela função quadrática $f(x) = x^2$. A área dessa região assemelha–se a quê? Isto é, que representação geométrica você tem para ela?



Algebricamente	Através da Integral
$y = f(x) = x^2 \quad \text{com} \quad 1 \leq x \leq 3$ Essa parte curva é que faz a diferença entre este problema e os anteriores, cujas representações eram dadas por polígonos.	$\text{Área} = \int_a^b f(x)dx$ $A = \int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \left[\frac{3^3}{2} - \frac{1^3}{2}\right]u^2 =$ $= \left[\frac{27}{3} - \frac{1}{3}\right]u^2 = \frac{26}{3}u^2$

07) Os ***valores*** encontrados para as áreas das questões 3, 4, 5 e 6 ***são exatos?***
Sim. Todos os valores são exatos.

Atividade 7

(COMPLEMENTO)

Com esta atividade, o professor-pesquisador, que lhes havia pedido para achar a área de diferentes figuras do plano, só havia se preocupado com a técnica operatória, quis fazer referência ao conceito de integral. Será que eles sabiam o que estavam fazendo?

Os alunos já sabiam que, como operações, a derivação e a integração são inversas. Também, trabalhando com essas duas operações sabiam que a derivada e a antiderivada (integral indefinida) tinham regras próprias para operar. Nesta atividade já nos propusemos a trabalhar com integrais definidas, visto que os alunos já haviam sido introduzidos nesse tópico, pelo menos em suas técnicas operatórias.

Você é capaz de resolver e responder às seguintes questões?

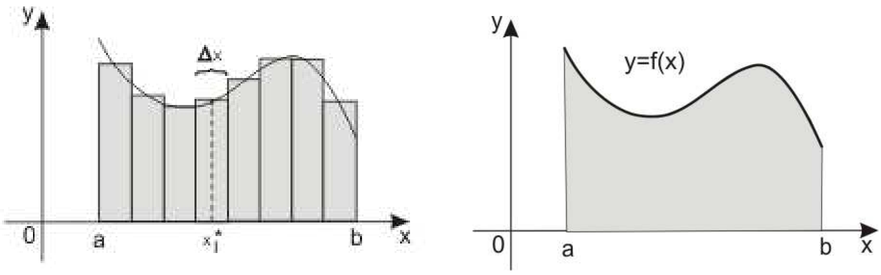
08) Como se define uma integral? Como podemos definir a área de uma região através de uma integral simples? Qual é a expressão que envolve a integral analiticamente?

<u>Definição</u> Se f é uma função contínua definida para $a \le x \le b$, dividimos o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais a $\Delta x = (b-a)/n$. Seja $x_0(=a), x_1, x_2, ..., x_n(=b)$ os extremos desses subintervalos e vamos escolher os pontos amostrais $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$ nesses subintervalos de tal forma que x_i^* está no *i*–ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Então a integral definida de f é

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

A soma $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$ que ocorre na definição acima é chamada **soma de Riemann**, em homenagem ao matemático Bernhard Riemann. Sabe-se que se f for positiva, então a soma de Riemann pode ser interpretada como uma soma de áreas de retângulos aproximantes (ver figura abaixo). Comparando a definição anterior com a definição de área, vemos que a integral definida $\int_a^b f(x)dx$ pode ser interpretada como a área sob a curva $y = f(x)$, com $a \le x \le b$.

Assim $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$



Fonte: STEWART, 2001, p.379

09) Qual a diferença entre uma integral ***definida*** e uma integral ***indefinida?***

Integral Indefinida é a **antiderivada** de uma função, trata-se de determinar a primitiva da derivada de uma função.

O $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x$ é tão importante que a ele estão associadas uma terminologia e uma notação próprias. Esse limite pode ser denotado com o símbolo $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x$ que é chamada de **integral definida** de f de a até b. Geometricamente, a integral definida representa a área, com sinal, entre $y = f(x)$ e $[a,b]$ e, no caso de $f(x)$ não negativa no intervalo $[a,b]$, a área entre a curva e o intervalo $[a,b]$. Os números a e b são chamados **limites de integração inferior e superior** respectivamente, e $f(x)$ é o **integrando.** A razão do sinal de integração ficará clara quando se estabelecer uma ligação entre a integral indefinida ou antiderivada e a integral definida.

10) Então, existe apenas uma maneira para resolver os problemas dados?
Não. Podemos resolver geometricamente e com a utilização da integral definida da função dada. O resultado obtido em ambas é sempre o mesmo

A solução é única?
Existe somente um valor para cada área explorada.

Por que na questão 6 você não resolveu só por geometria?
Por que vocês lançaram mão da Integral para fazer isso?
Devido à presença de uma curva.

11) O que significa para você a palavra ***Integrar?***
Integrar é um ato, uma ação. Ação de reunir, agrupar, unir-se, completar-se.
Entende-se, também, por determinar a integral de uma função.

12) O que significa para você a palavra ***Integração?***
Integração é a ação feita no processo de integrar.

13) O que significa para você a palavra ***Integral?***
É o resultado numérico da integração feita, isto é, um número que mede a área.

14) O que representa a expressão ***dx*** no cálculo de uma Integral?
Diz que a integração deve ser feita em relação a variável x.

5.4.3.8 – Atividade 8 – resolução

A t i v i d a d e 8 – parte 1

Você se lembra como resolver as seguintes expressões numéricas? Calcule, pelo menos a primeira delas.

i)

$$\left\{\left[\left(1+\frac{1}{2}\right):\left(1-\frac{1}{2}\right)\right]:\left[\left(2+\frac{2}{3}\right):\left(2-\frac{1}{3}\right)\right]\right\}:\frac{9}{4}=$$

$$=\left\{\left[\frac{3}{2}:\frac{1}{2}\right]:\left[\frac{8}{3}:\frac{5}{3}\right]\right\}:\frac{9}{4}=\left(3:\frac{8}{5}\right)\cdot\frac{4}{9}=\frac{5}{6}$$

ii)

$$\left\{[(-7-2)^2:(-3)^3+4.(-2)]-32^1\right\}-(5+2)=$$

$$\left\{\left[81:(-27)-8\right]-32\right\}-7=-3-8-32-7=-50$$

iii)

$$\left\{(\text{-}1)^{40}-(-2-1)^2-\left[(4+0)^2\cdot(6-4)^3\right]\right\}:(-8+6)^3=$$

$$=\left\{1-9-\left[16\cdot8\right]\right\}:(-8)=\left\{-8-128\right\}:(-8)=+17$$

A t i v i d a d e 8 – parte 2

Você é capaz de resolver e responder às seguintes questões?

01) Se $y = f(x)$ dizemos que $y' = \frac{dy}{dx}$. Se $y' = 3x$ qual é o valor de ***y*** ?

$$\text{Se } y' = 3x \quad \text{temos} \quad y = \int 3x\,dx = \frac{3x^2}{2} + C$$

A pedido da disciplina Física, foi preciso, no primeiro bimestre desse ano, 2008, antecipar o conceito de função de duas variáveis e as técnicas operatórias utilizadas em derivadas parciais.

02) Seja $z = f(x, y)$

a) Se $f_{xx} = 4 - 3x + 2y$ então $f(x, y) = z =$ _____

Integrando-se em relação a x obtemos a derivada primeira em relação a x

$$f_x = 4x - 3\frac{x^2}{2} + 2xy + C_1$$

Integrando-se novamente em relação a x, obtemos a função original

$$f(x, y) = 4\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2}y + C_1.x + C_2$$

$$f(x, y) = 2x^2 - \frac{x^3}{2} + x^2 y + C_1 x + C_2$$

onde C_1 e C_2 são constantes.

b) Se $f_{yy} = 4 - 3x + 2y$ então $f(x, y) = z =$ _____

Integrando-se em relação a y obtemos a derivada primeira em relação a y

$$f_y = 4y - 3xy + 2\frac{y^2}{2} + C_3$$

Integrando-se novamente em relação a y, obtemos a função original

$$f(x, y) = 4\frac{y^2}{2} - 3x\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + C_3 y + C_4$$

$$f(x, y) = 2y^2 - 3x\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + C_3 y + C_4$$

onde C_3 e C_4 são constantes.

c) Se $f_{xy} = 4 - 3x + 2y$ então $f(x, y) = z =$ _____

Integrando-se em relação a y obtemos a derivada primeira em relação a x

$f_x = 4y - 3.xy + y^2 + C_5$

Integrando-se agora em relação a x, obtemos a função original

$f(x, y) = 4yx - 3y\dfrac{x^2}{2} + xy^2 + C_5 x + C_6$

onde C_5 e C_6 são constantes.

d) Se $f_{yx} = 4 - 3x + 2y$ então $f(x, y) = z =$ _____

Integrando-se em relação a x obtemos a derivada primeira em relação a y

$f_y = 4x - 3\dfrac{x^2}{2} + 2yx + C_7$

Integrando-se agora em relação a y, obtemos a função original

$f(x, y) = 4xy - 3y\dfrac{x^2}{2} + xy^2 + C_7 y + C_8$

onde C_7 e C_8 são constantes.

<u>A t i v i d a d e 8 – parte 3</u>

Você é capaz de resolver e responder às seguintes questões?

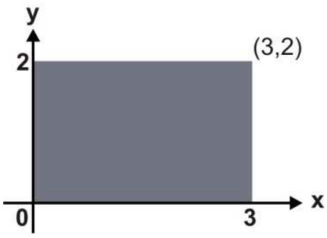
Como, no programa de nossa disciplina, era preciso chegar a integrais duplas, antecipamos nosso trabalho, apresentando nesta atividade o cálculo de algumas integrais duplas, visando à busca do conceito de integrais múltiplas, durante o desenvolvimento do cálculo dessas integrais.

03) No exercício seguinte esboce a região de integração e calcule a integral.

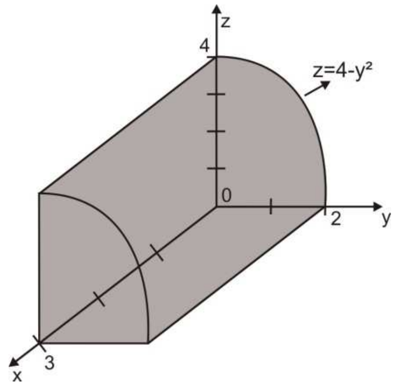
a) $\int_0^3 \int_0^2 (4 - y^2)\,dydx$ b) $\int_0^2 \int_0^3 (4 - y^2)\,dxdy$

c) $\int_0^3 \int_{-2}^0 (x^2 y - 2xy)\,dydx$ d) $\int_{-2}^0 \int_0^3 (x^2 y - 2xy)\,dxdy$

a) $0 \le x \le 3$ e $0 \le y \le 2$

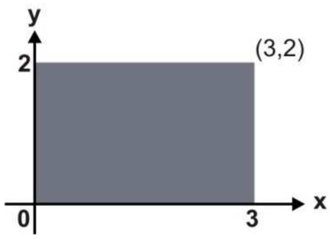


A Região de Integração é a base da superfície



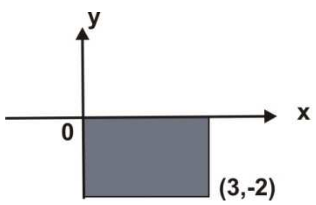
$$\int_0^3\int_0^2 (4-y^2)dy.dx = \int_0^3 \left[4.y - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 dx = \int_0^3\left[8-\frac{8}{3}\right]dx = \frac{16}{3}\int_0^3 dx = \frac{16}{3}[x]_0^3 = 16$$

b) $0 \le x \le 3$ e $0 \le y \le 2$



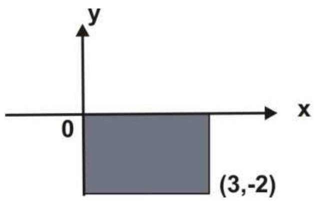
$$\int_0^2\int_0^3 (4-y^2)dx.dy = \int_0^2 \left[4x - x.y^2\right]_0^3 dy = \int_0^2 (12-3y^2)dy = \left[12y - 3.\frac{y^3}{3}\right]_0^2 = [12y-y^3]_0^2 = 16$$

c) $0 \le x \le 3$ e $-2 \le y \le 0$



$$\int_0^3\int_{-2}^0 (x^2y-2xy)dydx = \int_0^3 \left[x^2\frac{y^2}{2} - xy^2\right]_{-2}^0 dx = \int_0^3(-2x^2+4x)dx = \left[-2.\frac{x^3}{3}+2.x^2\right]_0^3 = 0$$

d) $0 \le x \le 3$ e $-2 \le y \le 0$



$$\int_{-2}^{0}\int_{0}^{3}\left(x^2 y - 2xy\right)dxdy = \int_{-2}^{0}\left[y\frac{x^3}{3} - x^2 y\right]_0^3 dy = \int_{-2}^{0}\left(9y - 9y\right)dy = 0$$

PERGUNTAS:

04) O que você observou nos exercícios *a* e *b*? *c* e *d*?

Observou-se a inversão nas variáveis de integração, uma inversão na ordem de integração de $dydx$ para $dxdy$, o que implica uma mudança nos limites de integração.

05) O que difere quando apresentamos numa integral dupla $dxdy$ ou $dydx$?

Quando se apresenta $dxdy$, integra-se primeiro em relação x e depois em relação a y sem que, com isso se altere o resultado da integração.

Quando apresenta-se $dydx$, integramos primeiro em relação y e depois integramos em relação a x sem que, com isso, se altere o resultado da integração.

06) Essa técnica operatória mudou muito a forma de resolver uma integral dupla daquela que usávamos para resolver uma integral simples?

Sim. A técnica operatória na integral dupla, exigiu um trabalho com função de duas variáveis, onde seu campo de definição é o plano e $dxdy$ é uma unidade infinitésima de área.

07) Qual é a expressão que envolve a integral dupla analiticamente? Existe apenas uma forma? Como você pode representá-las?

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx \quad \text{ou} \quad \int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy \quad \text{com} \quad a \le x \le b \quad \text{e} \quad c \le y \le d$$

A t i v i d a d e 8 – parte 4

Você é capaz de resolver os seguintes exercícios?

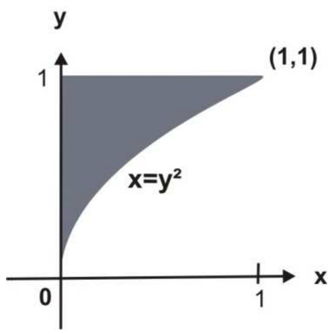
09) Nos exercícios seguintes esboce a região de integração e calcule a integral.

a) $\int_0^1 \int_0^{y^2} 3y^3 e^{xy}\,dxdy$ b) $\int_0^{\pi} \int_0^{x} x\,sen y\,dydx$

9a)

$0 \le y \le 1$ y : variável independente

$0 \le x \le y^2$ x : variável dependente



$$\int_0^1 \int_0^{y^2} 3y^3 e^{xy}\,dxdy = \int_o^1 \left[3y^3 \frac{e^{xy}}{y}\right]_0^{y^2} dy = \int_0^1 \left[3y^2 e^{xy}\right]_0^{y^2} dy = \int_0^1 \left[3y^2 e^{y^2.y} - 3y^2 e^{0.y}\right] dy =$$

$$= \int_0^1 3y^2 e^{y^3}\,dy - \int_0^1 3y^2\,dy$$

$\text{Fazendo: } \mathrm{u = y^3 \rightarrow du = 3y^2 dy}$

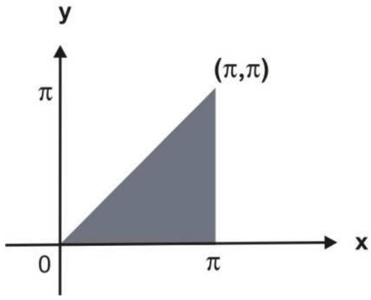
$\mathrm{Se: y = 0 \rightarrow u = 0}$

$\mathrm{Se: y = 1 \rightarrow u = 1}$

$$\text{Portanto: } \int_0^1 e^u\,du - \int_0^1 du = \left[e^u\right]_0^1 - [1-0] = e - 2$$

9b)

$0 \le y \le x$
$0 \le x \le \pi$



$$\int_0^{\pi}\int_0^{x} x\,seny\,dy\,dx = \int_0^{\pi}\left[-x\cos y\right]_0^{x} dx = \int_0^{\pi}\left[-x\cos x-(-x\cos 0)\right]dx = \int_0^{\pi}-x\cos x\,dx + \int_0^{\pi}dx =$$
$$= -\left[x\,senx+\cos x\right]_0^{\pi} + \left[x\right]_0^{\pi} = -\left[\pi sen\pi + \cos\pi - (0sen0+\cos 0)\right] + \pi = 2+\pi$$

5.4.3.9 – Atividade 9 – resolução

Atividade 9 – parte 1

Você é capaz de resolver e responder às seguintes questões?

INVERTENDO A ORDEM DE INTEGRAÇÃO

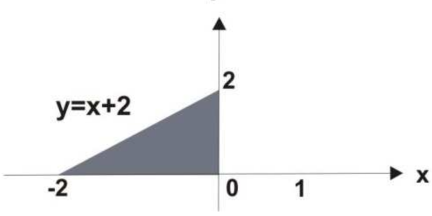
Nos exercícios abaixo esboce a região de integração e escreva uma integral dupla equivalente a ela com a ordem de integração invertida

01) $\int_0^2 \int_{y-2}^{0} dxdy$	***02)*** $\int_0^1 \int_2^{4-2x} dydx$	***03)*** $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} dxdy$
(22 do 12.1 THOMAS (2002))	(21 do 12.1 THOMAS (2002))	(23 do 12.1 THOMAS (2002))

01)

$$\int_0^2 \int_{y-2}^{0} dxdy$$

$0 \le y \le 2$
$y-2 \le x \le 0$



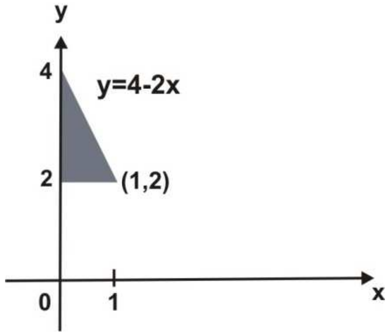
Assim

$$\begin{cases} -2 \le x \le 0 \\ 0 \le y \le x+2 \end{cases}$$

$$\int_{-2}^{0} \int_0^{x+2} dydx$$

02)

$$\int_0^1 \int_2^{(4-2x)} dydx \qquad \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 2 \le y \le 4-2x \end{cases}$$



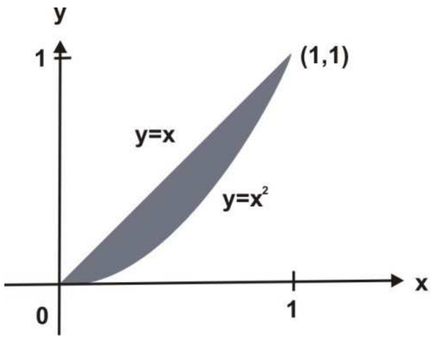
Assim

$$\begin{cases} 2 \le y \le 4 \\ 0 \le y \le \dfrac{4-y}{2} \end{cases}$$

$$\int_2^4 \int_0^{\frac{4-y}{2}} dxdy$$

03)

$$\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} dxdy \qquad \begin{cases} y \le x \le \sqrt{y} \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$$



Assim

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le x \end{cases}$$

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{x} dydx$$

Atividade 9 – parte 2

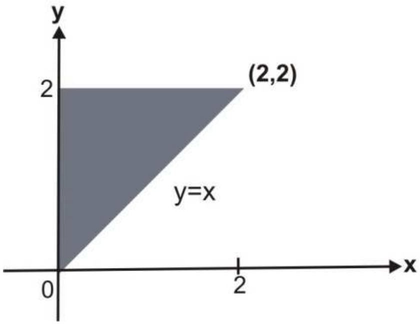
Você é capaz de resolver e responder às seguintes questões?

<table>
<tr><td colspan="2">Nos exercícios 4 e 5 esboce a região de integração, inverta a ordem de integração e calcule a integral.</td></tr>
<tr><td>04) $\int_0^2 \int_x^2 2y^2 sen(xy) dydx$
(32 do 12.1 THOMAS (2002)
<u>1º OBA!!!</u> Adicionais: 33) 34) 36) e 38 do 12.1 THOMAS (2002)</td><td>05) Se R é uma Região triangular limitada pelas retas $\begin{cases} y = x \\ y = 2x \\ x + y = 2 \end{cases}$
Calcule a integral $\iint_R xydA$
[40 do 12.1 THOMAS (2002)]</td></tr>
</table>

04)

$$\int_0^2\int_x^2 2y^2 sen(xy)dydx$$

$$\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ x \le y \le 2 \end{cases}$$



Assim

$$\begin{cases} 0 \le y \le 2 \\ 0 \le x \le y \end{cases}$$

$$\int_0^2\int_0^y 2y^2 sen(xy)dxdy$$

$$\int_0^2\int_0^y 2y^2 sen(xy)dxdy = \int_0^2\left[\frac{-2y^2\cos(xy)}{y}\right]_0^y dy = \int_0^2\left[-2y\cos(xy)\right]_0^y dy =$$

$$= \int_0^2\left[-2y\cos(y^2) - (-2y\cos(0))\right]dy = \int_0^2 2ydy - \int_0^2 2y\cos(y^2)dy$$

$\text{Fazendo: } u = y^2 \rightarrow du = 2ydy$

$\text{Se}: y = 0 \rightarrow u = 0$

$\text{Se}: y = 2 \rightarrow u = 4$

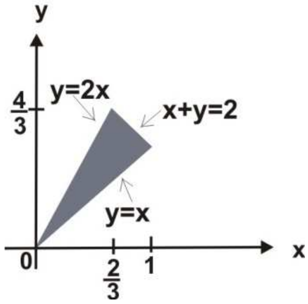
$$\text{Portanto}: \int_0^4 du - \int_0^4 \cos u du = 4 - [senu]_0^4 = 4 - sen4$$

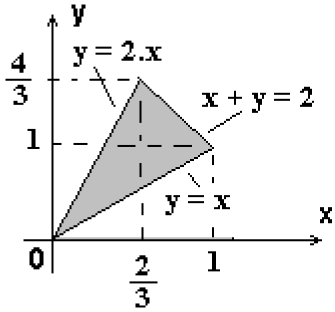
O5)

$$\begin{cases} 0 \le x \le \frac{2}{3} \\ x \le y \le 2x \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \frac{2}{3} \le x \le 1 \\ x \le y \le 2 - x \end{cases} \qquad \int_0^{2/3}\int_x^{2x} xydydx + \int_{2/3}^{1}\int_x^{2-x} xydydx$$

OU

$$\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ \frac{y}{2} \le x \le y \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 1 \le x \le \frac{4}{3} \\ \frac{y}{2} \le x \le 2 - y \end{cases} \qquad \int_0^{1}\int_{y/2}^{y} xydxdy + \int_{1}^{4/3}\int_{y/2}^{2-y} xydxdy$$





$$\int_0^{2/3}\int_x^{2x} xydydx + \int_{2/3}^{1}\int_x^{2-x} xydydx = \int_0^{2/3}\left[x\frac{y^2}{2}\right]_x^{2x} dx + \int_{2/3}^{1}\left[x\frac{y^2}{2}\right]_x^{2-x} dx =$$

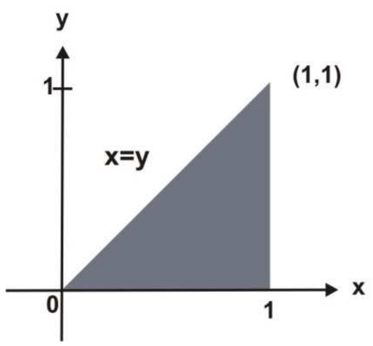
$$= \int_0^{2/3}\left[x\frac{4x^2}{2} - x\frac{x^2}{2}\right]dx + \int_{2/3}^{1}\left[x\frac{(2-x)^2}{2} - x\frac{x^2}{2}\right]dx = \int_0^{2/3}\left[2x^3 - \frac{x^3}{2}\right]dx + \int_{2/3}^{1}\left[\frac{4x-4x^2-x^3}{2} - \frac{x^3}{2}\right]dx =$$

$$= \int_0^{2/3}\frac{3x^2}{2}dx + \int_{2/3}^{1}(2x-2x^2)dx = \left[\frac{3}{2}.\frac{x^4}{4}\right]_0^{2/3} + \left[x^2 - 2.\frac{x^3}{3}\right]_{2/3}^{1} = \frac{2}{27} + \frac{1}{3} - \frac{4}{9} + \frac{16}{81} = \frac{13}{81}$$

<u>1º OBA!!!</u> Adicionais: 33) 34) 36) e 38 do 12.1 THOMAS (2002)

Esboçar a região de integração, inverter a ordem de integração e calcular a integral:

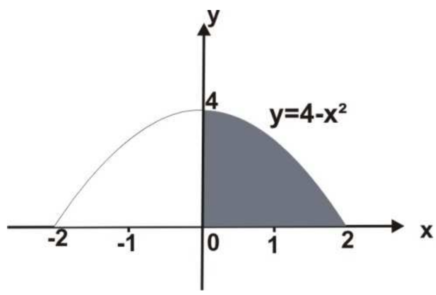
33)



$$\int_0^1\int_y^1 x^2 e^{xy} dxdy = \int_0^1\int_0^x x^2 e^{xy} dydx = \int_0^1 \left[xe^{xy}\right]_0^x dx =$$

$$= \int_0^1 \left[xe^{x^2} - x\right]dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{e-2}{2}$$

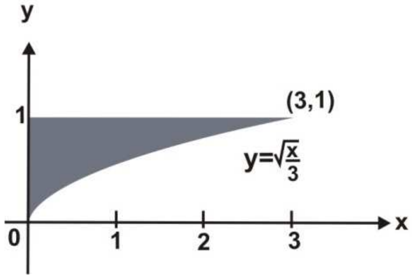
34)



$$\int_0^2\int_0^{4-x^2} \frac{x\cdot e^{2\cdot y}}{4-y} dydx = \int_0^4\int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{xe^{2y}}{4-y} dxdy =$$

$$= \int_0^4 \left[\frac{x^2e^{2y}}{2(4-y)}\right]_0^{\sqrt{4-y}} dy = \int_0^4 \frac{e^{2y}}{2} dy = \left[\frac{e^{2y}}{4}\right]_0^4 = \frac{e^8-1}{4}$$

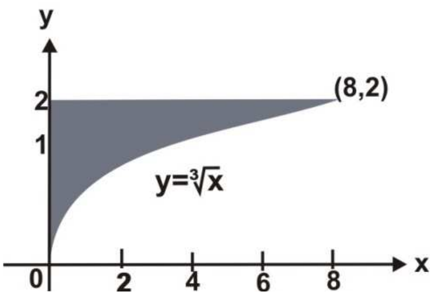
36)



$$\int_0^3\int_{\sqrt{x/3}}^1 e^{y^3}\,dydx = \int_0^1\int_0^{3y^2} e^{y^3}\,dxdy =$$

$$= \int_0^1 3y^2e^{y^3}\,dy = \left[e^{y^3}\right]_0^1 = e-1$$

38)



$$\int_0^8\int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4+1}\,dydx = \int_0^2\int_0^{y^3}\frac{1}{y^4+1}\,dxdy =$$

$$= \int_0^2\frac{y^3}{y^4+1}\,dy = \frac{1}{4}\left[\ell n(y^4+1)\right]_0^2 = \frac{\ell n(17)}{4}$$

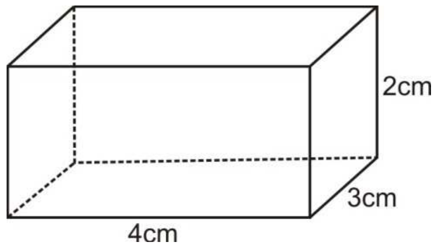
Atividade 9 – parte 3

Você é capaz de resolver e responder às seguintes questões?

CURTAS E FÁCEIS	**VOLUME sob uma Superfície z = f(x,y)**
06) Qual é o volume de um paralelepípedo de base retangular com arestas iguais a 3 cm e 4 cm e altura 2 cm? ***07)*** Qual é o volume de um paralelepípedo de base retangular com arestas iguais x cm e y cm e altura z cm? ***08)*** Como podemos expressar analiticamente o volume de uma superfície através de uma integral dupla?	***09)*** Encontre o volume do sólido que é limitado superiormente pelo cilindro $z = x^2$ e inferiormente pela região delimitada pela parábola $y = 2 - x^2$ e pela reta y = x no plano xy. [42 do 12.1 THOMAS (2002)] **2º OBA!!!** *Adicionais: 43) 46) 47) 44) do 12.1 THOMAS (2002)*

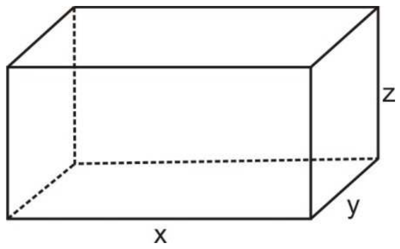
CURTAS E FÁCEIS

06) Qual é o volume de um paralelepípedo de base retangular com arestas iguais a 3 cm e 4 cm e altura 2 cm?



Volume = 4cm.3cm.2cm = 24 cm^3

07) Qual é o volume de um paralelepípedo de base retangular com arestas iguais *x* cm e *y* cm e altura *z* cm?



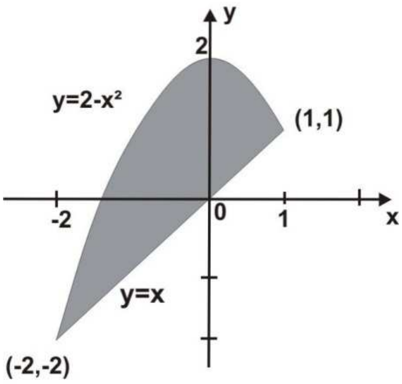
Volume = x.y.z

08) Como podemos expressar analiticamente o volume de uma superfície através de uma integral dupla?

$$V = \iint_R f(x,y)dA \quad \text{onde}\,\mathrm{dA} = \mathrm{dxdy} \ \ \text{ou}\ \ \mathrm{dA} = \mathrm{dydx}$$

Onde chamamos dA de elemento infinitésimo de área.

09) Encontre o volume do sólido que é limitado superiormente pelo cilindro $z = x^2$ e inferiormente pela região delimitada pela parábola $y = 2 - x^2$ e pela reta y = x no plano xy.



$$z = f(x,y) = x^2 \rightarrow \text{topo} \quad \text{e} \quad \text{Base}: \begin{cases} y = 2 - x^2 \\ y = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 \le x \le 1 \\ x \le y \le 2 - x^2 \end{cases}$$

$$\text{Volume} = \iint_R f(x,y)dA = \int_{-2}^{1}\int_{x}^{2-x^2} x^2 dydx = \int_{-2}^{1}\left[x^2 y\right]_{x}^{2-x^2} dx = \int_{-2}^{1}\left[x^2(2-x^2) - x^2.x\right]dx =$$

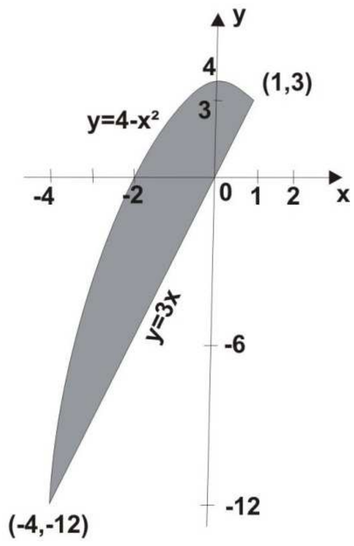
$$= \int_{-2}^{1}\left[2x^2 - x^4 - x^3\right]dx = \left[2\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{1} = \left\{\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{16}{3} + \frac{32}{5} - \frac{16}{4}\right)\right\}u^3 =$$

$$= \left\{\left(\frac{40}{60} - \frac{12}{60} - \frac{15}{60}\right) - \left(-\frac{320}{60} + \frac{384}{60} - \frac{240}{60}\right)\right\}u^3 = \frac{189}{60}u^3 = \frac{63}{20}u^3$$

<u>2º OBA!!!</u> Adicionais: 43) 46) 47) 44) do 12.1 THOMAS (2002)

43) Encontre o volume do sólido cuja base é a região no plano xy que é limitda pela parábola $y = 4 - x^2$ e pela reta $y = 3x$, enquanto o topo do sólido é limitado pelo plano $z = x + 4$

BASE



$$V = \int_{-4}^{3}\int_{3x}^{4-x^2}[x+4]dydx = \int_{-4}^{1}[xy+4y]_{3\cdot x}^{4-x^2}\, dx =$$

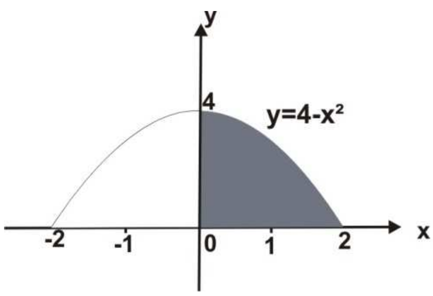
$$= \int_{-4}^{1}[x(4-x^2)+4(4-x^2)-3x^2-12x]dx =$$

$$= \int_{-4}^{1}[-x^3-7x^2-8x+16]dx = \left[-\frac{x^4}{4}-\frac{7x^3}{3}-4x^2+16x\right]_{-4}^{1} =$$

$$= \left\{\left[-\frac{1}{4}-\frac{7}{3}+12\right]-\left[\frac{64}{3}-64\right]\right\}u^3 = \left\{\frac{157}{3}-\frac{1}{4}\right\}u^3 = \frac{625}{12}u^3$$

46) Encontre o volume do sólido cortado do primeiro octante pela superfície $z = 4 - x^2 - y$

BASE



$$V = \int_{0}^{2}\int_{0}^{4-x^2}[4-x^2-y]dydx = \int_{0}^{2}\left[(4-x^2)y-\frac{y^2}{2}\right]_{0}^{4-x^2} dx =$$

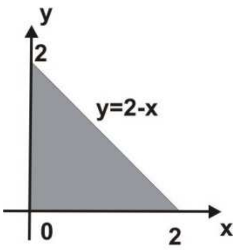
$$= \int_{0}^{2}\frac{1}{2}(4-x^2)^2\, dx == \int_{0}^{2}[8-4x^2+\frac{x^4}{2}]dx =$$

$$= \left[8x-\frac{4x^3}{3}+\frac{x^5}{10}\right]_{0}^{2} = \left[16-\frac{32}{3}+\frac{32}{10}\right]u^3 =$$

$$= \left[\frac{480-320+96}{30}\right]u^3 = \frac{128}{15}u^3$$

47) Encontre o volume da cunha cortada do primeiro octante pelo cilindro $z = 12 - 3y^2$ e pelo plano $x + y = 2$

BASE

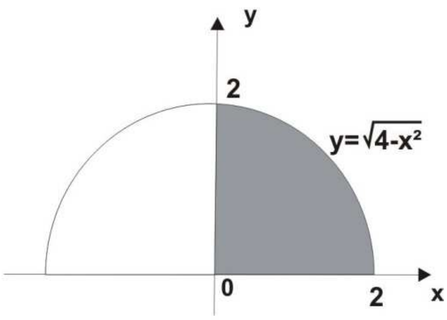


$$V = \int_0^2 \int_0^{2-x} [12 - 3y^2]dydx = \int_0^2 \left[12y - y^3\right]_0^{2-x} dx =$$

$$= \int_0^2 [24 - 12x - (2-x)^3]dx == \left[24x - 6x^2 + \frac{(2-x)^4}{4}\right]_0^2 = 20u^3$$

44) Encontre o volume do sólido no primeiro octante limitado pelos planos coordenados, pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e pelo plano $z + y = 3$

BASE



$$V = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} [3 - y]dydx = \int_0^2 \left[3y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{4-x^2}} dx = \int_0^2 \left[3\sqrt{4-x^2} - \left(\frac{4-x^2}{2}\right)\right]dx =$$

$$= \left[\frac{3x\sqrt{4-x^2}}{2} + 6sen^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - 2 \cdot x + \frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \left[6\left(\frac{\pi}{2}\right) - 4 + \frac{8}{6}\right]u^3 = \left[3\pi - \frac{16}{6}\right]u^3 = \frac{9\pi - 8}{3}u^3$$

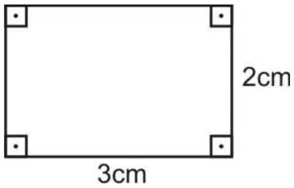
Atividade 9 – parte 4

Você é capaz de resolver e responder às seguintes questões?

CURTAS E FÁCEIS	**ÁREA por Integração Dupla**
10) Qual é o valor numérico da área de um retângulo de lados 2 cm e 3 cm? ***11)*** Qual é a expressão algébrica para a área de um retângulo de lados ***x*** cm e ***y*** cm? ***12)*** Qual é o valor numérico do volume de um paralelepípedo de base retangular de arestas 2 cm e 3 cm e **1** cm de altura? ***13)*** Qual é a expressão algébrica para o volume de paralelepípedo de base retangular de arestas ***x*** cm e ***y*** cm e **1** cm de altura? ***14)*** Como podemos expressar analiticamente a área de uma região plana através de uma integral dupla?	Esboce a região limitada pelas retas e curvas dadas. Depois expresse a área da região como uma integral dupla iterada e calcule a integral ***15)*** A parábola $x = -y^2$ e a reta y = x + 2 (3 do 12.2 THOMAS (2002) ***3º OBA!!!*** *Adicionais: 7) 8) 6) do 12.2 THOMAS (2002)*

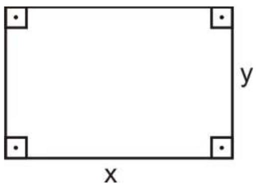
CURTAS E FÁCEIS

10) Qual é o valor numérico da área de um retângulo de lados 2 cm e 3 cm?



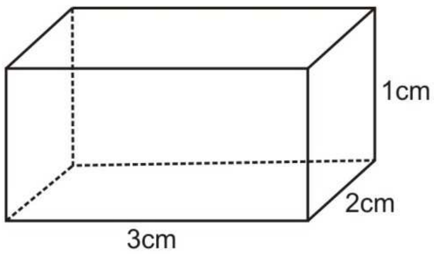
Área = 2cm.3cm = 6 cm^2

11) Qual é a expressão algébrica para a área de um retângulo de lados *x* cm e *y* cm?



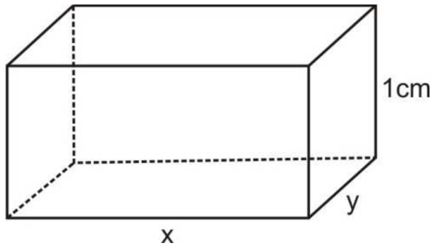
Área = x.y

12) Qual é o valor numérico do volume de um paralelepípedo de base retangular de arestas 2 cm e 3 cm e 1 cm de altura?



Volume = 2cm.3cm.1cm = 6 cm^3

13) Qual é a expressão algébrica para o volume de paralelepípedo de base retangular de arestas *x* cm e *y* cm e 1 cm de altura?

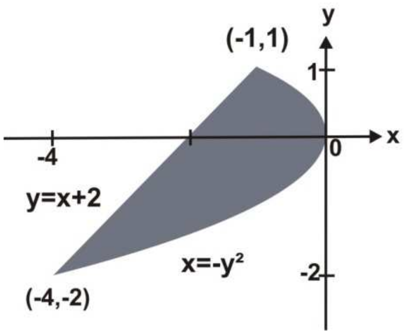


V = x.y

14) Como podemos expressar analiticamente a área de uma região plana através de uma integral dupla?

$\text{Área} = \iint_R f(x,y)dA \quad \text{com } f(x,y) = 1 \quad \text{logo Área} = \iint_R dA$ (Caso particular do volume)

15) A parábola $x = -y^2$ e a reta y = x + 2



$$\begin{cases} -2 \le y \le 1 \\ y - 2 \le x \le -y^2 \end{cases}$$

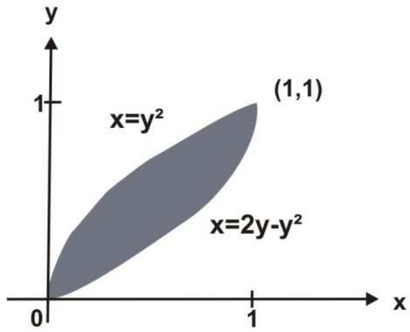
$$Área = \iint_R dA = \int_{-2}^{1}\int_{y-2}^{-y^2} dxdy = \int_{-2}^{1}\int_{y-2}^{-y^2} dxdy = \int_{-2}^{1}[x]_{y-2}^{-y^2}dy = \int_{-2}^{1}\left[-y^2 - y + 2\right]dy =$$

$$= \left[\frac{-y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 2y\right]_{-2}^{1} = \left[-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \left(\frac{8}{3} - 2 - 4\right)\right]u^2 = \frac{9}{2}u^2$$

3º OBA!!! *Adicionais: 7) 8) 6) do 12.2 THOMAS (2002)*

Esboce a região limitada pelas retas e curvas dadas. Depois expresse a área da região como uma integral dupla iterada e calcule a integral

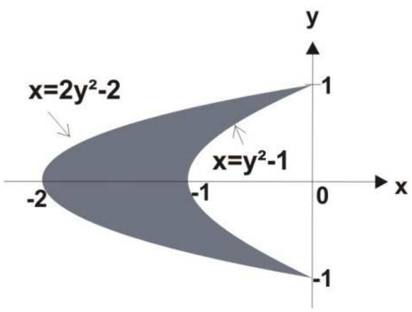
7) As parábolas $x = y^2$ e $x = 2y - y^2$



$$Área = \int_0^1 \int_{y^2}^{2y-y^2} dxdy = \int_0^1 [2y - 2y^2]dy =$$

$$= \left[y^2 - \frac{2y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}u^2$$

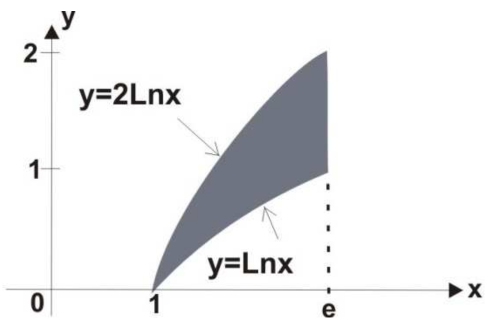
8) As parábolas $x = y^2 - 1$ e $x = 2y^2 - 2$



$$Área = \int_{-1}^{1} \int_{2y^2-2}^{y^2-1} dxdy = \int_{-1}^{1} [y^2 - 1 - 2y^2 + 2]dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} [1 - y^2]dy = \left[y - \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}u^2$$

6) As curvas $y = \ell nx$ e $y = 2\ell nx$ e a reta $x = e$, no primeiro quadrante



$$Área = \int_1^e \int_{\ell n(x)}^{2\ell n(x)} dydx = \int_1^e \ell n(x)dx =$$

$$= [x\ell n(x) - x]_1^e =$$

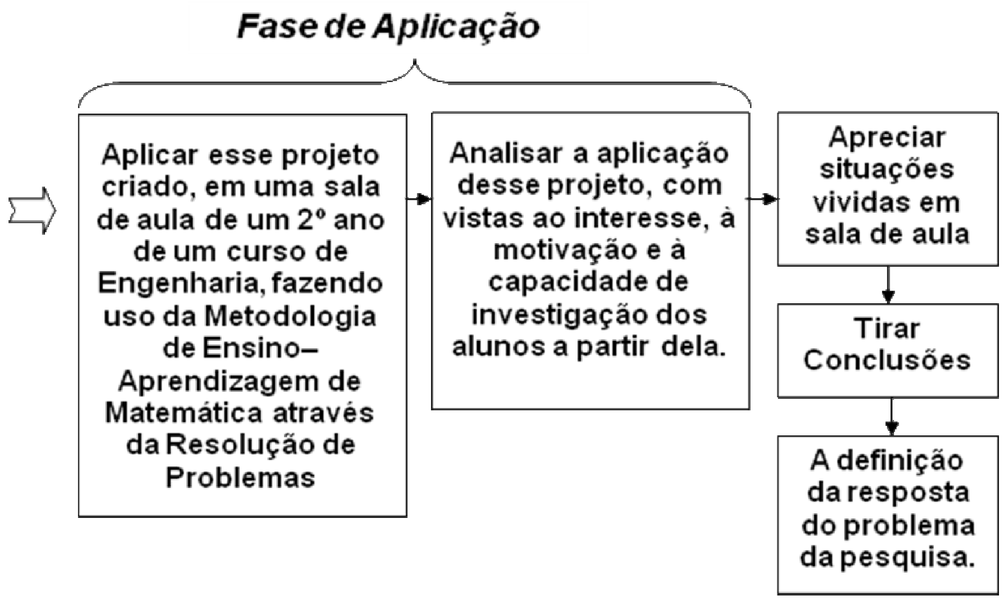
$$= [(e - e) - (0 - 1)]u^2 = 1u^2$$

5.4.4 – A Aplicação do Projeto em Sala de Aula e sua Análise

> O que se é obrigado a descobrir por si próprio deixa um caminho na mente que se pode percorrer novamente sempre que se tiver necessidade. (LICHTENBERG, IN POLYA, 1964, p.99)

> Escrevo para que o aprendiz possa sempre aperceber-se do fundamento interno das coisas que aprende, de tal forma que a origem da invenção possa aparecer e, portanto, de tal forma que o aprendiz possa aprender tudo como se o tivesse inventado por si próprio. (LEIBNIZ, IN POLYA, 1964, p.99)

Seguindo a sequência de atividades de Romberg, a partir de nosso Modelo Modificado, passamos para a



Introdução

A aplicação de um projeto é uma ação bastante diferente da sua criação. Muitas novidades e surpresas, dificuldades e conflitos surgem quando a aplicação se estabelece. O pesquisador, nesse momento, sabe que coisas inesperadas pedem por atitudes não previstas e causadoras de certo constrangimento tanto da parte do professor quanto do próprio aluno.

Como dissemos anteriormente, o Projeto foi pensado inicialmente para ser aplicado em uma de nossas quatro turmas de Cálculo 2, a turma de Computação. Mas, ingenuamente, decidimos que seria interessante aplicá-lo simultaneamente nas outras três turmas, já que a disciplina era a mesma e o ministrante o mesmo professor. Porém, pensando na aplicação do Projeto, pudemos notar que seria bastante difícil para o professor-pesquisador efetuar esse trabalho com qualidade, visto que, dentro de seus planos, além de trabalhar com uma metodologia alternativa de ensino-aprendizagem e pedir auxílio à História da Matemática. Ele deveria acompanhar os grupos, trabalhando cooperativamente, sendo fotografados e filmados ao longo do desenrolar do projeto criado, embora o professor-pesquisador acreditasse que, se conseguisse motivar os alunos e se eles se interessassem pela dinâmica que seria empregada na sala de aula, um trabalho razoável poderia ser conseguido.

Assim, o professor-pesquisador percebeu que seria interessante se houvesse algum educador matemático, que conhecesse a metodologia adotada para o trabalho em sala de aula, que pudesse acompanhar suas aulas e lhe dar o suporte necessário no acompanhamento dos grupos. Logo, solicitamos a uma pesquisadora, Maria Lúcia Galvão Leite Travassos, a Malu, que também pertence ao GTERP – Grupo de Trabalho e Estudo em Resolução de Problemas, da UNESP, Rio Claro, SP, do qual juntos fazemos parte, que nos acompanhasse e auxiliasse no trabalho das salas de aula. Essa pesquisadora esteve presente na maior parte dos encontros, acompanhando nosso projeto, fazendo anotações, auxiliando os alunos em grupos, recebendo e organizando atividades, tirando dúvidas e avaliando o desempenho de cada um dos grupos de três de nossas turmas, sempre que possível.

Como o professor-pesquisador não queria grupos muito grandes, aceitou sua formação com até cinco alunos. Então, as turmas foram organizadas em grupos assim:

Turma	Número de alunos	Quantidade de grupos
2º Computação - Turma 132	60	14
2º Civil - Turma 128	40	11
2º Elétrica 1 - Turma 131	35	12
2º Elétrica 2 - Turma 130	51	14
Total	186	51

Em nossa pesquisa, na História da Integral contida na História da Matemática, percebemos que os gregos fizeram da matemática uma disciplina, transformando uma variada coleção de regras empíricas de cálculo numa unidade sistemática e ordenada. Os hábitos de pensamento abstrato dos gregos os distinguiam dos pensadores anteriores. Na Babilônia e no antigo Egito, a matemática tinha sido cultivada principalmente como uma ferramenta, ou para aplicação prática imediata, ou como parte de um conhecimento adequado a uma classe privilegiada de escribas.

Lecionando Cálculo Diferencial e Integral em uma Faculdade de Engenharia, pudemos perceber que essa disciplina é bastante importante para a formação do engenheiro. Todavia, o que, também, reparamos é que a maioria dos alunos ou é nela reprovada ou é nela aprovada com notas baixas, sendo que, em geral, o método usado no processo de ensino-aprendizagem leva os alunos a repetir o que o professor faz. Os alunos estão habituados com a ideia de que aprender é ouvir o professor, tomar nota do que diz e escreve, memorizar esse conhecimento recebido e procurar repeti-lo nas formas de avaliação.

As universidades foram criadas para preparar profissionais condizentes com as necessidades do homem: segurança, bem estar, competência profissional, empreendedorismo, enfim, tudo que diz respeito a todo cidadão.

A sociedade está pedindo, urgentemente, profissionais capacitados para exercer sua profissão e, com isso, preencher todos os requisitos necessários para esse exercício e consequente sucesso da empresa. Não são aqueles alunos que se contentam em repetir aquilo que os professores desenvolvem na lousa, ou lhes mostram no Power Point, que podem, com mais ou menos facilidade, criar coisas novas ou métodos novos para a resolução de processos utilitários que demandam conhecimento científico.

Será que podemos ajudar a mudar esse cenário?

Quando começamos a nos interessar por Educação Matemática pudemos ver que conhecer bem o conteúdo é importante mas, também, que uma forma de bem trabalhar o conteúdo está no método adequado a esse trabalho. Mudar o conteúdo não nos parece tão fácil, mas mudar o método de ensino, bem como influenciar positivamente na motivação e no interesse do aluno por essa disciplina, é. A preocupação de como motivá-los a entender que o fazer, é importante? Com quais recursos? Onde buscar recursos para essa ação?

O caminho escolhido para nosso Projeto foi o de recorrer à História da Matemática, mostrando a luta que a humanidade travou até chegar ao conhecimento do Cálculo Diferencial e Integral e, em particular, às integrais.

A força da matemática de Pitágoras era a de dar uma ordenação matemática ao Cosmos. Para ele, o que era importante era o número, só racionais positivos. Os gregos queriam exaurir as áreas, eles queriam a resposta plena e só tinham aproximações. Houve tentativas, como as de Hipócrates, em quadrar regiões curvas. Há mais de 20 séculos, o homem pensava nesses problemas. O que faltava aos gregos? Após dois mil anos de geometria estática e veio o “Primeiro Acordar”, isto é, havia o movimento e precisavam explicá-lo. Faltava-lhes o conceito de limite.

Durante nossa pesquisa em História da Matemática pudemos identificar as dificuldades e sua superação pela humanidade no decurso da construção do conhecimento. Pode se observar que esses mesmos problemas, quando se trabalha Cálculo Diferencial e Integral numa sala de aula, também se constituem em dificuldades para os ‘’aprendizes’’.

A História é uma ferramenta importante para o Engenheiro, pois lhe permite mostrar que sempre houve interesse humano em ampliar seu conhecimento. Por exemplo, o uso da tecnologia de hoje para conseguir resolver novos problemas e novos anseios da humanidade, ao criar máquinas e diferentes instrumentos que podem levar o homem a obter as tantas coisas novas que surgem.

Novamente vem a pergunta: – O que fazer para mudar o ensino e preparar profissionais qualificados para produzir e saber usar essas novidades?

Procuramos mudar, mostrando aos alunos o que é importante: o que se deve fazer; como fazer. Essas duas questões devem permitir o pensar de cada profissional dentro de sua própria área e a resposta a elas exige ‘’o pensar’’ e o ‘’saber tomar decisões‘’ em muitas situações da vida e, em especial, em seus locais de trabalho.

Utilizar uma metodologia de ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas, que envolve os alunos como co-construtores de novos conhecimentos, orientados pelo professor pode se mostrar como um caminho de mudança.

Em nosso Projeto usamos essa metodologia como uma forma de desafiar os alunos diante de uma situação problema, uma forma de levá-los a pensar matematicamente e de serem capazes de chegar à resolução com recursos próprios, sob a direção do professor. Essa metodologia permite modificar o ambiente da sala de aula, onde o professor deixa de ser o “transmissor do conhecimento” e transforma o aluno em co-construtor do novo conhecimento.

Com esse foco foi elaborado nosso Projeto, cujo objetivo era levar os alunos a mudarem de postura em sala de aula, ou seja, que houvesse participação, interesse, confiança e entusiasmo. Queríamos que cada aluno descobrisse ser capaz de pensar, de saber tomar decisões. Enfim, uma mudança de forte impacto.

O importante para o engenheiro é saber aplicar a matemática a problemas específicos de sua área. Mas, como aplicar o que conhecem sobre derivadas e integrais no aspecto conceitual? Como apelar para aquela técnica operatória, desenvolvida em sala de aula e avaliada nas provas, a problemas que devem requerer os conceitos dessas entidades?

Então, a razão de aplicar nosso projeto, começando com áreas de figuras planas, de uma forma elementar, tem por objetivo chegar ao conceito de integral que permite resolver problemas que, como diz Stewart (2001, p.366),

> As integrais estão envolvidas em diversas situações: usando a taxa segundo a qual o óleo vaza de um tanque encontramos a quantidade que vazou durante um certo período; usando a leitura do velocímetro do ônibus espacial *Endeavour* podemos calcular a altura atingida por ele em um dado intervalo de tempo; usando o conhecimento da potência consumida encontrar a energia usada durante um dado dia em São Francisco. (STEWART, 2001, p.366)

Escolhemos a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas, pois é um caminho extremamente útil para fazer do professor um pesquisador em sala de aula, exigindo um processo reflexivo capaz de torná-lo um guia condutor dos alunos na construção dos novos conceitos e conteúdos pretendidos.

A exigência da participação dos alunos durante a construção do novo conhecimento; a motivação dos alunos ao perceberem que são capazes de ‘’pensar’’; o interesse dos alunos ao perceberem que as “coisas” novas construídas são de importância para eles, futuros profissionais; a conscientização de que eles, os alunos, devem saber fazer uso do “saber construído”, a partir da construção de um conhecimento necessário para seu desenvolvimento profissional, são características importantes, nessa metodologia, que nos davam a sequência de passos orientando a caminhada da pesquisa e a confiança necessária para o trabalho.

Desde que preparamos as atividades que seriam apresentadas a partir de situações-problema, aos alunos não seria revelada nenhuma forma de resolução do problema dado. Enquanto eles buscavam por estratégias para a resolução do problema, seriam levantados, pelo professor, questionamentos como respostas às suas perguntas, de maneira que, com essas perguntas e respostas, pudessem perceber um potencial caminho para chegar à solução.

Os alunos seriam avaliados por sua participação em todas as atividades; por tarefas extraclasse entregues pelos grupos; pelo comportamento cooperativo e colaborativo no trabalho em grupo; pela frequência aos encontros; e, finalmente, pelas provas exigidas por lei.

Os trabalhos dos grupos entregues pelos alunos de cada turma seriam armazenados, em pastas próprias, avaliados e registrados num quadro que será apresentado no final da pesquisa, em anexo.

5.4.4.1 – 1º Encontro – O trabalho dos alunos e sua análise

Para esse encontro foram programadas as atividades 1 e 2 encontradas nas páginas 180 e 181 desta dissertação.

Como, para nós, “problema é tudo aquilo que não se sabe fazer mas que se está interessado em resolver”, as duas atividades propostas mostraram-se como problemas aos alunos que não sabiam, de imediato, resolvê-las. A bem da verdade, as primeiras questões são muito simples, mas foram oferecidas visando a mostrar aos alunos que eles poderiam trabalhá-las com recursos próprios. Assim, para a primeira atividade desse encontro, consideramos apenas o cálculo das áreas de polígonos conhecidos, com o objetivo primeiro de relembrar, reconstruir ou, até mesmo, o de construir o conceito de área e calcular as áreas solicitadas.

Aos alunos, nas atividades 1 e 2, foram oferecidos problemas para encontrar a área de polígonos (figuras planas fechadas formadas por três ou mais lados). Inicialmente pedia-se para identificar essas diferentes figuras e, a seguir, o professor-pesquisador queria que eles calculassem suas áreas.

As atividades foram entregues para cada um dos alunos, com o objetivo de que as lessem e, depois, as discutissem quando organizados em grupos.

Para trabalhar Cálculo Diferencial e Integral em sala de aula, é importante que os alunos saibam geometria, pois foi, a partir da geometria dos gregos clássicos, que se desenrolou a história da integral. É frequente ouvir-se que os inventores do Cálculo foram sir Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. Mas sabemos que as ideias básicas por trás da integração já haviam sido investigadas há 2500 anos pelos antigos gregos e, em especial, por Eudoxo e Arquimedes.

Inicialmente, seria feito um trabalho de revisão, utilizando o conhecimento prévio dos alunos. Depois, passou-se ao cálculo de áreas que requisitavam um conhecimento um pouco maior.

A história nos diz que a primeira ideia de área surgiu quando o homem se deparou com um retângulo. Da área do retângulo decorreu a área do triângulo. Como o único polígono rígido é o triângulo, portanto um polígono especial, ao se pedir aos alunos para encontrarem as áreas dos demais polígonos, notou-se que essas áreas podiam ser calculadas decompondo os polígonos em partes triangulares.

Apesar de nossa intenção de apenas “relembrar” as áreas dos polígonos, no desenvolver da atividade 1, o professor-pesquisador se deparou com vários problemas secundários que exigiram um tempo maior do encontro: o trabalho com a multiplicação com números decimais, o reconhecimento imediato de vários polígonos, e as técnicas operatórias com números irracionais.

Alguns alunos não conseguiam se lembrar das fórmulas criadas para calcular as áreas do losango e do trapézio, mas com a ajuda dos companheiros de grupo efetuaram a decomposição dos polígonos em triângulos e aplicando a fórmula conhecida da área do triângulo adicionaram todas essas áreas encontrando a área do polígono proposto. Houve alguns alunos que não tinham até então o conceito de paralelogramo.

Ao perguntar aos alunos o que entendiam por área de uma figura plana, alguns responderam: área é a limitação do espaço do plano; área é toda região delimitada dentro de um plano; é o espaço que ela ocupa no plano; área é a somatória dos infinitos pontos que constituem uma figura num plano; é o espaço finito de uma figura geométrica plana, delimitada pelos seus limites; área é um espaço plano limitado; e área é todo o espaço entre os lados internos de polígonos. Pode-se ver que a ideia eles tinham, mas não o rigor matemático para definir área.

Passou-se para atividade dois, cujo objetivo também era o de fazer o cálculo de áreas de polígonos, como na atividade 1. Mas, nesses problemas, com situações que envolvem diferentes condições, pedia-se atenção principalmente aos casos que envolvem triângulos e consequentemente polígonos com mais lados. O tempo do primeiro encontro acabou e a continuação dessa atividade foi deixada como tarefa para o segundo encontro.

5.4.4.2 – 2º Encontro – O trabalho dos alunos e sua análise

Como nem todos os alunos haviam terminado a tarefa extraclasse, pediu-se à classe que, então, completasse a atividade 2 naquele momento. Enquanto os grupos trabalhavam, o professor pesquisador observava esse trabalho dos alunos, acompanhando os grupos e atendendo a seus questionamentos.

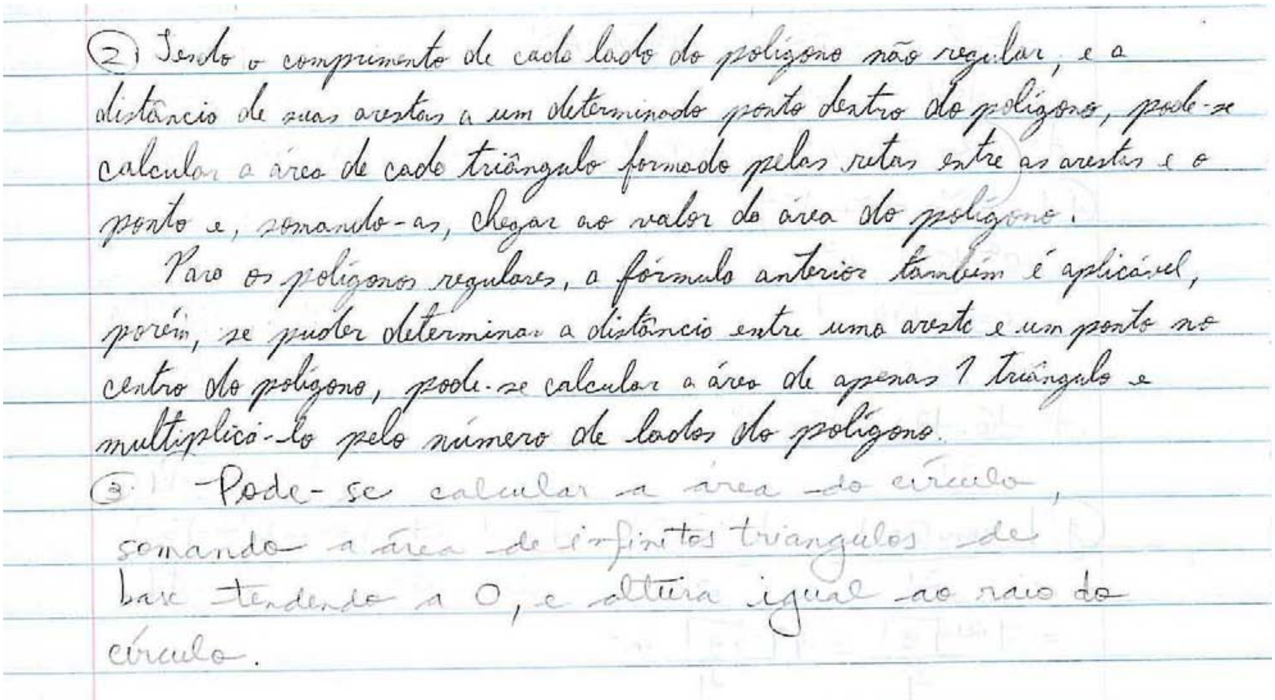
Com essa tarefa terminada, passou-se à Plenária com a condução dos trabalhos feita pelo professor e com a participação de todos os alunos. Nessa Plenária ficou claro que os alunos, se depararam com questões consideradas mais difíceis. Justificavam essa dificuldade alegando que esses exercícios pediam o conhecimento de “coisas que nunca tinham visto” ou “coisas de que não se lembravam”, como a fórmula de Heron, relações trigonométricas para definir a área de um triângulo, a classificação de triângulos, etc.

Na execução dessa sequência de tarefas tivemos várias surpresas. Entre os alunos, as dificuldades mais frequentes foram: trabalhar com números irracionais; usar o teorema de Pitágoras; a classificação dos triângulos quanto aos lados e quanto aos ângulos; encontrar a área de um triângulo equilátero; o uso de relações trigonométricas; a fórmula de Heron; o cálculo das áreas de diferentes polígonos; e a busca da área de um círculo.

A partir de situações-problema, alguns alunos foram desafiados por algumas delas onde, participando, com interesse e entusiasmo, buscavam resolvê-las e, mais ainda, justificar os passos que davam. O professor precisou lançar mão da História da Matemática para falar aos alunos sobre Heron e sua fórmula. Isso motivou os alunos para enfrentar a resolução dos problemas da atividade 2.

Na questão 3 da atividade 2, mais uma vez o recurso da História foi interessante. Os alunos, ao descreverem o modo de calcular a área do círculo, usaram a fórmula $A_{Círculo} = \pi \cdot r^2$, pensando nessa área como resultado do limite de polígonos de n lados quando n tende ao infinito. Houve grupos que conseguiram se expressar assim: “a tentativa seria a de inscrever polígonos, quanto maior o número de polígonos maior será a precisão desse polígono; colocaríamos triângulos a partir do centro do círculo, quanto mais finos os triângulos mais próximos da área exata vão chegar; pode-se calcular a área do círculo somando a área de infinitos triângulos de base tendendo a 0, e altura tendendo ao raio do círculo; a área do círculo é o limite dos polígonos com n tendendo ao infinito; quanto maior a área dos polígonos mais se está próximo da precisão da área de um círculo. Método conhecido como "Método da Exaustão".

Recolhidas as atividades, escolhemos algumas para aqui expor


(2) Sendo o comprimento de cada lado do polígono não regular, e a distância de suas arestas a um determinado ponto dentro do polígono, pode-se calcular a área de cada triângulo formado pelas retas entre as arestas e o ponto e, somando-as, chegar ao valor da área do polígono.

Para os polígonos regulares, a fórmula anterior também é aplicável, porém, se puder determinar a distância entre uma aresta e um ponto no centro do polígono, pode-se calcular a área de apenas 1 triângulo e multiplicá-lo pelo número de lados do polígono.

(3) Pode-se calcular a área do círculo, somando a área de infinitos triangulos de base tendendo a 0, e altura igual ao raio do círculo.

3) Através de dados experimentais (circunferências feitas com barbante), verificou-se que o comprimento de toda circunferência é sempre 3 vezes o valor do respectivo diâmetro mais um pedaço que, dividido pelo diâmetro, resulta em aproximadamente 0,14. Então conclui-se que qualquer que seja a circunferência, seu complimento será sempre igual a 3 vezes o valor do seu diâmetro mais 0,14 desse diâmetro aproximadamente.

Assim: $C \cong 3\text{diâmetro} + 0{,}14\ \text{diametro}$

$C \cong 3{,}14 . \text{diâmetro}$

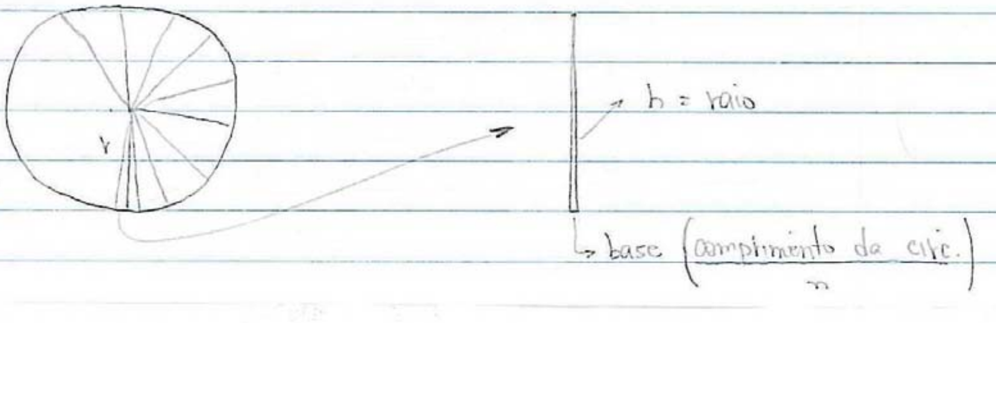
$C \cong 3{,}14 . 2 . \text{raio}$

Portanto, em qualquer circunferência sempre haverá uma constante que multiplica o diâmetro. Isolando essa constante temos:

$3{,}14 = x$

$C \cong x . 2r \quad \therefore \quad x \cong \dfrac{C}{2r} \cong 3{,}14 = \pi$

Dividindo-se uma circunferência em n partes, com $n \to \infty$ obteremos n triângulos iguais. Assim a area dessa circunferência poderá ser calculada pela area desse triângulo vezes o número de vezes (n) em que existir dentro da circunferência. Por $n \to \infty$, chegará um ponto em que a proximidade entre os lados isóceles (raio) será tão pequeno que a altura do triângulo será igual ao raio:



Então temos:

nº de triângulos

$$A_{circ.} = \lim_{n \to \infty} n \cdot A_{triângulo}$$

$$A_{circ.} = \lim_{n \to \infty} n \, \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A_{circ.} = \lim_{n \to \infty} n \cdot \frac{\frac{2\pi r}{n} \cdot r}{2}$$

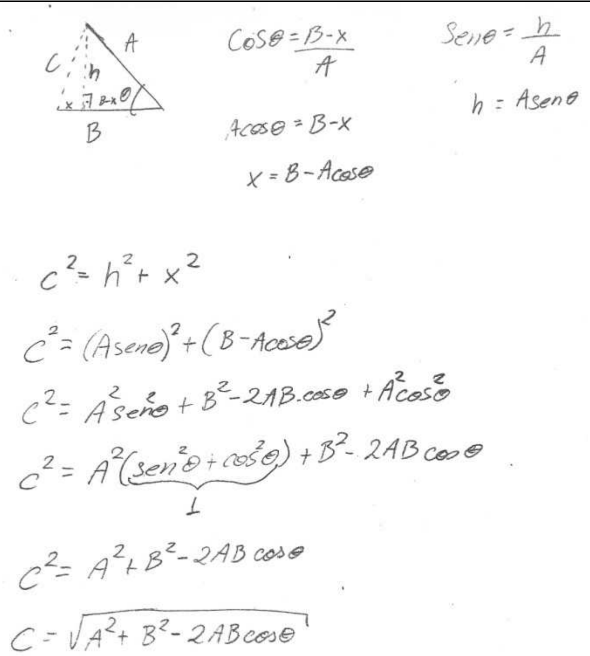
$$A_{circ.} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{n \, 2\pi r^2}{n}}{2}$$

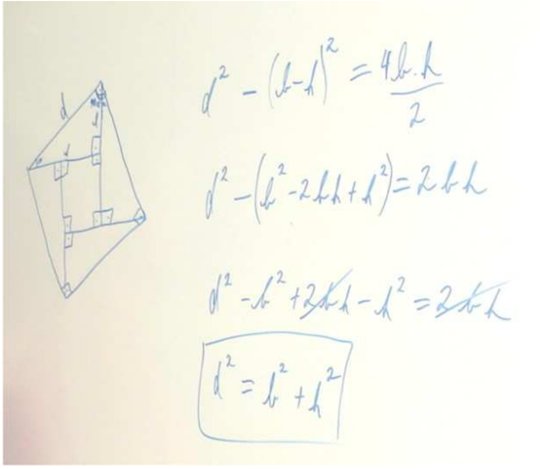
$$A_{circ.} = \lim_{n \to \infty} \frac{n \, 2\pi r^2}{n} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\therefore$$

$$\boxed{A_{circ.} = \pi \cdot r^2}$$

Essas ideias foram levadas à Plenária e foram responsáveis por muitas reflexões. Alguns alunos foram chamados à lousa, durante a Plenária, para defender suas ideias e suas descobertas: a área do triângulo eqüilátero, a área de um triângulo com dois lados adjacentes a um ângulo, a lei dos cossenos, e o Teorema de Pitágoras. Escolhemos expor nesse momento a demonstração que um aluno fez da Lei dos Cossenos e outro trabalhando com o Teorema de Pitágoras.





Foi deixada como tarefa extraclasse a atividade 3.

5.4.4.3 – 3º Encontro – O trabalho dos alunos e sua análise

Para esse encontro foi programada a atividade 3 encontrada na página 182 desta dissertação.

Era nosso interesse mostrar aos alunos que eles eram capazes de pensar e que, em consequência, ganhariam confiança. Entusiasmados, se agrupariam para confrontar suas próprias ideias em busca da solução. Com o professor-pesquisador como guia, essas ideias seriam discutidas em Plenária com a participação de todos. Por fim, chegado ao consenso, o professor formalizaria aquela matemática construída responsável pela resolução do problema dado.

O fato de termos começado pela Geometria, como um ramo importante da Matemática para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral, trabalhar sobre ela, que exige o pensar, o raciocinar e o entender, fez com que todo o trabalho geométrico feito com e pelos alunos fosse relevante.

A atividade 3, apresentada na página 182 de nossa dissertação, teve por objetivo calcular, com recursos próprios da matemática de hoje, as áreas de determinadas figuras formadas por linhas curvas, bem como de áreas de outras figuras obtidas pela composição e decomposição de figuras conhecidas. Observa-se que, na maioria das tarefas apresentadas nessa atividade, há necessidade da presença do número π. Essa atividade, deixada como extraclasse, foi resolvida, discutida e analisada nesse terceiro encontro.

Na formulação dos problemas apresentados nessa atividade, foram apresentadas situações que haviam sido trabalhadas pelo professor pesquisador quando professor de Ensino Médio em escola particular de Sorocaba. Querendo desafiar seus alunos, mesmo tendo certeza de que a maioria deles não saberia resolvê-los, decidiu colocá-los nessa atividade pretendendo identificar alunos que, interessados pelos problemas e confiantes na possibilidade de resolvê-los, quisessem chegar à solução.

A primeira questão da atividade 3 se apresentou à maioria dos alunos como fácil, pois sabiam que a área do círculo era $\pi \cdot r^2$. Nessa atividade, as questões apresentaram-se à maioria dos alunos como fáceis, com exceção das questões 1d, 2d, 4a e 4b, onde foi exigido deles um pensar mais elaborado. Especificamente, a questão 2d foi realizada com sucesso somente por dois grupos. Os alunos ao deduzirem a fórmula da área de um setor circular, entraram em contato com os termos inscrição e circunscrição de um polígono em substituição ao que diziam "por dentro" e "por fora". Na questão 3 dessa atividade, a maioria dos alunos calculou apenas a letra a, e escreveu justificando que as outras figuras possuíam a mesma área. O professor precisou falar aos alunos o que entendemos por área de um segmento circular, dizendo que a área de um segmento circular é a área de um setor circular menos a área do triângulo inscrito nesse setor circular. Foi deixada como tarefa extraclasse a atividade 4.

5.4.4.4 – 4º Encontro – O trabalho dos alunos e sua análise

Para esse encontro foram programadas as atividades 4 e 5 encontradas nas páginas 183 e 184 desta dissertação.

O objetivo primeiro desse encontro foi o de achar o lado de um quadrado de área equivalente à área de cada figura dada e, posteriormente, nomear essa operação. A justificativa para a criação dessa atividade é que desde os gregos, quando se propunham a calcular a área do círculo, uma de suas primeiras propostas era a de quadrar essa área. Isso lhes havia sido motivado pela possibilidade de quadrar a área de diferentes polígonos convexos e de algumas figuras circulares.

Para conduzir o problema 1 da atividade 4, em seus itens *a, b, c* e *d* , os alunos, em sua maioria, com facilidade associaram a eles problemas conhecidos da álgebra que com frequência são assim representados.

Já as questões 2 e 3 dessa mesma atividade exigiam imaginar a figura descrita, representá-la e depois responder às questões propostas. A questão 4 pedia uma análise e uma reflexão dos alunos, baseadas nas respostas dadas às questões anteriores. Algumas dessas respostas, sem o devido rigor, foram: lei dos quadrados, enquadramento, equivalência de áreas em quadrados, a quadratura de figuras, quadratizar, como se pode ver na escrita de um grupo.

4) Transformamos as figuras geométricas em quadrados de lado x, nesse processidemento foi encontrado também algo em comum em todos os exercícios: para se encontrar o valor x basta somente fazer a raiz quadrada da área da figura apresentada. Se pudessemos nomear esse procedimento, o chamaríamos de "Quadratizar".

Na atividade 5, o enunciado do problema dizia o que se entende por "quadrar um círculo". Mas falava em fazer isto, como os gregos faziam, usando somente uma regra não graduada e um compasso. Dada essa definição, a atividade 5 prosseguiu pedindo para pensar e responder: para o item 1 – quando se perguntava se era possível quadrar o círculo, vários grupos se manifestaram dizendo que sim. Alguns, se adiantando, diziam não ser possível por causa do π, e um deles, com clareza, com régua e compasso conseguiu verificar que o lado do quadrado esperado dependia do número $\sqrt{3}$, um número irracional. Os alunos desse mesmo grupo disseram que se de alguma forma conseguissem expressar o número $\sqrt{\pi}$, o problema estaria solucionado.

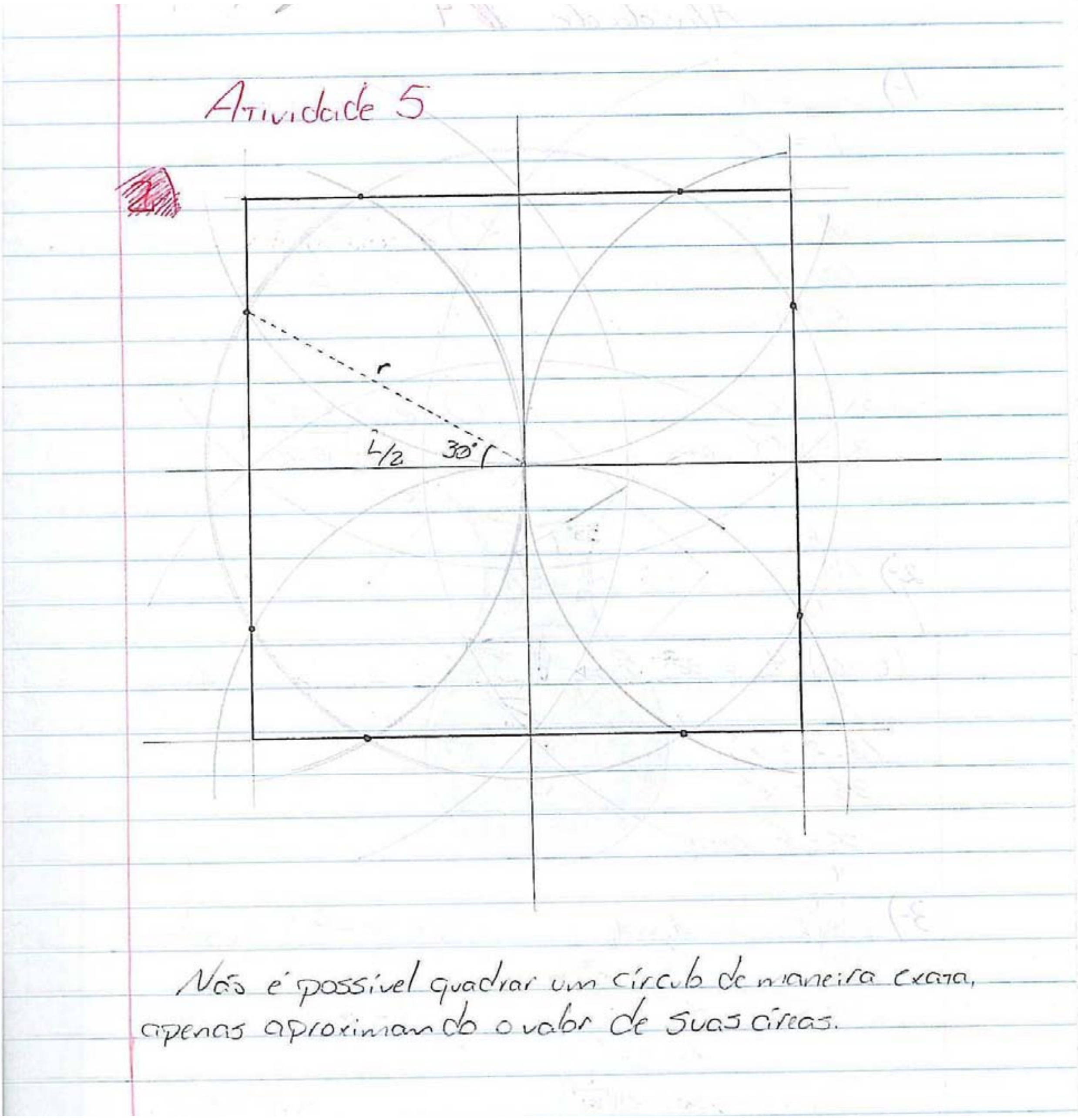
O professor pesquisador, intervindo nesse momento, perguntou: – Por quê? Esses dois números $\sqrt{3}$ e $\sqrt{\pi}$ não são ambos irracionais?

Como resposta a essa pergunta, alguém desse grupo disse:

> O número π
>
> π é um número irracional obtido através da divisão de um número racional por um número irracional ou vice-versa. O número π pertence a um tipo de "grupo" diferente dos números obtidos por raiz já que
>
> $(\sqrt{2})^2 = 2$, $(\sqrt[3]{3})^3 = 3$, $(\sqrt[4]{28})^4 = 28$
>
> e com o número π acontece:
>
> $\pi^2 \cong 9,8696...$ $\pi^3 \cong 31,00628...$ $\pi^4 \cong 97,4090...$
>
> e assim sucessivamente
>
> O π pertence a um "grupo" de irracionais que não pode ser originado através de uma raiz, e sim de uma divisão, sendo que a parte irracional da divisão também não pode ser expressa por uma raiz.

O trabalho desse grupo foi exposto na lousa, durante a Plenária,discutido com a participação de toda classe e em alguns momentos, fotografado.

Nesse momento, os três alunos de um mesmo grupo, na lousa, discutiam, geometricamente sobre a construção da quadratura de um círculo, comparando a área do círculo com a área do quadrado construído. Chegaram a constatar a criação de um quadrado de lado $\ell = r\sqrt{\pi}$. Um desses alunos, fazendo uso de régua, compasso e usando seu conhecimento trigonométrico, mostrou que havia conseguido construir um quadrado de lado $\ell = r\sqrt{3}$,



O professor decidiu mostrar como esse cálculo fora feito pelo aluno em seu caderno e o reproduziu na lousa, nos passos dados por ele e apresentados na sequência de fotos apresentadas a seguir,

1) Desenhou uma circunferência no quadrado.

2) Explicou o porquê de 30°.

3) No desenho feito, ele mostrou que o lado do quadrado L seria dado por $L = r\sqrt{\pi}$ e que o $\cos(30^{\circ}) = \dfrac{L/2}{r}$

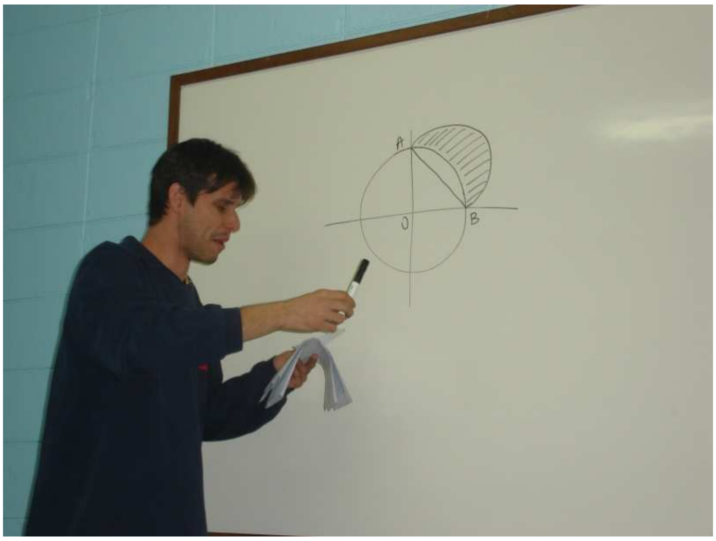
4) Concluiu, afirmando que o que conseguiu mostrar é $L = r\sqrt{3}$

Alguns alunos, que estavam fazendo Cálculo 2 pela segunda ou terceira vez, ficaram muito empolgados com esse trabalho feito em classe, dizendo que se o desenho fosse feito com a ponta muito mais fina de outra lapiseira e se a régua fosse super precisa, arriscariam dizer que o erro cometido diminuiria muito, mas achavam que ainda assim seria um valor aproximado e não exato.

Ainda, dessa atividade faziam parte os dois problemas das lunas de Hipócrates. O objetivo de apresentar tentativas de Hipócrates de quadrar certas figuras compostas por trechos circulares faz parte da História da Matemática. Assim, esses problemas foram apresentados como atividade de sala de aula para que os alunos pudessem reconhecer a dificuldade que o antigos geômetras encontravam para resolver os problemas a que se propunham. Ainda, nosso objetivo era estimular nossos alunos a fazer o cálculo dessas áreas com os recursos atuais, a partir do conhecimento do número π.

A atividade 5 pedia aos alunos que tentassem resolver o primeiro problema de Hipócrates em aula e o segundo problema ficaria como tarefa extraclasse. Durante a aula poucos grupos conseguiram resolver o primeiro problema pois, em sua maioria, quase todos os grupos tiveram dificuldade em entender seu enunciado.

Numa das turmas de Elétrica depois de se dar tempo a todos os grupos para trabalhar o problema, um deles levou o problema a lousa, numa Plenária, e fez sua resolução completa com a participação da maioria dos colegas que, atentos acompanhavam seu trabalho.



A atividade 6, que havia sido deixada como tarefa extraclasse, foi entregue ao professor pela maioria dos alunos, alguns com resoluções corretas, outros incorretas, mas essa atividade não foi discutida em sala. Na análise do material entregue, o professor-pesquisador percebeu que muitos alunos, fazendo como a maioria dos alunos faz ao resolver problemas, somente haviam usado os dados numéricos do problema, tentando chegar à resposta e erraram.

A interpretação dos dados do problema exigia ver as três vezes um quarto de círculo compondo o jarro exteriormente, o que não haviam conseguido perceber. Também não perceberam que o número encontrado para medir a área do jarro era superior à verdadeira área do jarro, pois o número encontrado não cabia na área do jarro. Entre os alunos que conseguiram observar que as três vezes um quarto de círculo compunham a figura do jarro exteriormente, puderam perceber que a área do jarro podia ser quadrada num quadrado de área equivalente à do jarro, tendo o quadrado 20 cm de lado. Houve alunos que trabalharam esse problema como composição de formas geométricas conhecidas.

5.4.4.5 – 5º Encontro – O trabalho dos alunos e sua análise

Para esse encontro foi programada a atividade 7 encontrada na página 186 desta dissertação.

O objetivo da atividade 7 é deixar bem claras as definições de função, variável dependente e variável independente.

No trabalho com Cálculo Diferencial e Integral, dentre as grandes ideias nele contidas, o conceito de função é primordial. Funções são relações ou regras que, de maneira única, associam membros de um conjunto com membros de outro conjunto. Numa relação funcional, uma variável (a variável dependente) é definida em termos de outra variável (a variável independente)

No item 1 da atividade 7, foi feita a seguinte pergunta para os alunos:

– O que é para vocês uma função?

Os alunos se manifestaram e puderam ser ouvidas várias vozes querendo dizer o que eles acreditavam ser uma função. Uns falavam coisas sem sentido, outros queriam chegar à definição de função, mas havia pouco rigor matemático. Alguns chegaram a se aproximar da definição correta.

Entre essas respostas pudemos registrar as seguintes:

- Função é um dispositivo onde existe o processamento de um número *x*, tal que este resulte num valor *f(x).*

- Função é uma expressão matemática, equação, onde a variável dependente depende da variável independente.
- Uma função é uma maneira de associar a cada valor de x um único valor de *y, f(x).*
- Função é qualquer relação de *A* em *B* que associa a cada elemento de *A* um único elemento de *B*.

A História da Matemática nos mostra como, só depois de muitos séculos de domínio da Geometria Euclidiana, é que os cientistas, dessa nova época, puderam reconhecer que, além da existência do movimento no mundo era preciso que ele fosse explicado. Para isso, era necessário que se criasse um conceito novo para essa explicação. Esse novo conceito era o conceito de função que, como dissemos antes, no Cálculo Diferencial e Integral, dentre as grandes ideias nele contidas, o conceito de função é primordial.

Nossos alunos, durante sua vida escolar, começaram a ouvir sobre e trabalhar com esse conceito a partir da 8ª série do Ensino Fundamental, hoje chamado 9º ano do Ensino Fundamental. Depois, no 1º ano do Ensino Médio, foi intensificado o trabalho com funções. Mas, por mais estranho que possa parecer, nossos alunos universitários ainda apresentam uma fraca compreensão desse conceito tão importante que é a função.

Segundo Van de Walle (2006, p.284), um estudo de funções é um estudo no modo como a mudança numa variável afeta a mudança em outra, isto é, um estudo de variação conjunta de variáveis. Uma função é uma regra que, de maneira única, define como a primeira, ou a variável independente, afeta a segunda, ou variável dependente. Assim, uma função f é uma lei tal que, para cada elemento x em um conjunto A , faz corresponder um único elemento $y = f(x)$, em um conjunto B, onde A é o campo de definição da função (Domínio) e B é o campo de variação da função (Contra-Domínio).

Com a dificuldade que os alunos mostraram a respeito do conceito de função e dos demais conceitos dele derivados, é natural perceber a dificuldade de se trabalhar em sala de aula Cálculo Diferencial e Integral.

No item 2 da atividade 7, foi colocada a pergunta: - O que é variável dependente e variável independente em uma função? Como você poderia representar uma função ou funções?

No que se refere à variável dependente e à variável independente de uma função, alguns alunos universitários ainda conseguem fazer confusão entre esses dois conceitos. Com grande parte dos nossos alunos esses conceitos também se apresentaram confusos. Nas quatro turmas analisadas foi comum encontrar alunos que tivessem os conceitos de função e de seus derivados não muito claros. Quando o professor, em seu trabalho de resolução das atividades do projeto proposto, apresentou sua expectativa em relação ao trabalho dos alunos, depois desse projeto aplicado, ele viu que essa expectativa estava longe de ser alcançada e pôde perceber que deveria gastar um certo tempo falando com eles sobre função, variável dependente e variável independente. Foi preciso uma ação do professor-pesquisador para que o significado de função e de variáveis dependente e independente tomassem sentido. Mas, a bem da verdade, podemos dizer que, em cada uma das nossas quatro turmas, houve alguns poucos alunos que possuíam esses conceitos satisfatoriamente.

Como parte desse item 2 da atividade 7, perguntava-se como se poderia representar uma função. A maioria de nossos alunos, nas quatro turmas, parece estar unicamente determinada a representar a função por meio da relação $y = f(x)$.

Entretanto, segundo Van de Walle (2006,p.285), há cinco diferentes maneiras de interpretar ou representar uma função: através de um contexto, de uma tabela de valores, da linguagem com palavras, de gráficos e, finalmente, da forma familiar da equação. Cada representação para uma dada função é simplesmente um modo diferente de expressar a mesma idéia. Cada representação dá uma diferente visão da função. O valor de uma particular representação depende de seu propósito, e de seu contexto.

O que dizer então de se fazer uso desses conceitos para determinar áreas de regiões do plano?

Conhecer todos os elementos que constituem o nobre conceito de função é importante e fazer uso deles, na construção de outros conceitos derivados, é necessário. É fundamental fazer com que os alunos, em seus grupos, possam fazer matemática discutindo e construindo esses conceitos, visando às suas aplicações.

Sobre os problemas 3 a 7, da atividade 7, podemos dizer que a maioria dos alunos, revelando ter sido útil e importante aquela revisão da geometria feita nos primeiros encontros, conseguiu resolver essas questões. Nos problemas 3 a 5 as áreas foram representadas geometricamente e calculadas com o auxílio da álgebra. Entretanto, para o problema 6, fizeram uso da integral como já haviam trabalhado no Cálculo 1. Ao final do encontro a atividade 7 complemento foi entregue para os alunos.

5.4.4.6 – 6º Encontro – O trabalho dos alunos e sua análise

Para esse encontro foi programada a atividade 7 complemento, encontrada na página 187 desta dissertação.

Como os alunos, em geral, sabem calcular áreas de figuras planas geometricamente, acreditamos que, se lhes apresentássemos outras figuras cujas áreas não podem ser calculadas geometricamente, os estimularíamos a buscar novos caminhos que seriam trabalhados através do cálculo de integrais.

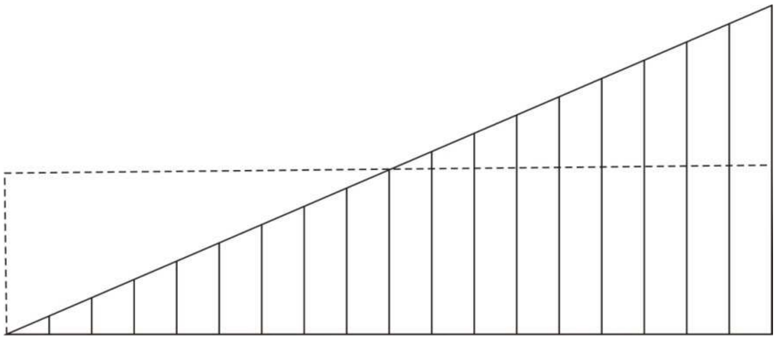
A Atividade 7 pedia por um trabalho importantíssimo do conceito de função. Representações gráficas de várias funções determinando suas áreas, fazendo correspondências com figuras geométricas, utilizando fórmulas para determinar as áreas com geometria. Tínhamos por objetivo que o aluno pudesse perceber que fazer esse trabalho, só com o uso da geometria, seria possível até que esbarrasse em uma outra função que envolvesse curvas no plano para a qual a geometria já não funcionava. Foi importante, para os alunos, saber de que outra maneira seria possível conseguir chegar a essa área. Como eles já haviam trabalhado nesse tipo de áreas, alguns não titubearam e prontamente falaram que seria possível achar essas áreas fazendo uso de integrais, mas não sabendo o porquê, até que o pesquisador fez uma intervenção dizendo que a integral é o produto de um procedimento que pretende exaurir aquela área pedida num processo limite.

Assim a ação feita sobre a função seria a de integrar a área pedida, ou seja, preencher completamente essa área. A operação feita nessa ação é chamada integração e o produto final dessa ação é a integral, um número que a quantifica.

No momento em que o professor-pesquisador notou que os alunos tinham conhecimento de que deveriam usar integrais, apesar de desconhecerem os motivos, tomou a iniciativa de abordar os temas **limite, continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade.**

Vimos, pela História já apresentada, que a geometria dos gregos imperou por muito tempo sobre a matemática da humanidade, até o ponto em que a longa e gloriosa matemática grega chegava ao fim. Depois, como num primeiro acordar o homem percebeu a necessidade de um novo conceito, o de *função* que surgiu a partir do estudo do *problema do movimento*. Este conceito tão importante somente veio depois de muito tempo.

Foi através de Nicole Oresme que surgiu uma representação velocidade-tempo para um corpo que se move com uma aceleração constante. Então ocorreu a Oresme, em algum momento antes de 1361, um pensamento brilhante – por que não traçar uma figura ou um gráfico da maneira pela qual variam as coisas? Vê-se aqui, é claro, uma sugestão antiga daquilo que agora chamamos representação gráfica de funções. Tudo o que é mensurável, escreveu Oresme, é imaginável na forma de quantidade contínua. Por isso, ele traçou um gráfico velocidade-tempo para um corpo que se move com aceleração constante. Ao longo de uma reta horizontal, ele marcou pontos representando instantes de tempo (ou longitudes) e, para cada instante, ele traçou, perpendicularmente à reta de longitudes, um segmento de reta (latitude) cujo comprimento representava a velocidade. As extremidades desses segmentos, ele percebeu, jazem ao longo de uma reta e, se o movimento uniformemente acelerado parte do repouso, a totalidade dos segmentos velocidade (que chamamos de ordenadas) preencherá um triângulo retângulo.



Esse diagrama leva à lei do movimento usualmente atribuída a Galileu no século dezessete. A representação gráfica de funções, conhecida então como latitude de formas, continuou a ser um tópico popular, desde o tempo de Oresme até o de Galileu.

Foi da necessidade de expressar o que há entre dois pontos que o homem percebeu que poderia dividir essa distância indefinidamente, tanto quanto quisesse. Uma vez entendendo que o que há entre dois pontos tão próximos quanto se queira não é um número e sim uma variável, que pode ter um valor em módulo tão pequeno quanto se queira, é que levou à definição de infinitésimo e ao conceito de limite.

A ideia de limite teve início no famoso método da Exaustão de Eudoxo e Arquimedes, mas estes nunca explicitaram o conceito de limite. Até mesmo matemáticos como Cavalieri em seu *Geometria Indivisível*, Fermat com o traçado das tangentes, Barrow por sua óptica e por ser o professor de Newton, todos nunca explicitaram o conceito de limite. Coube a Newton ser o primeiro a falar explicitamente sobre limites, explicando que *quantidades podem ficar mais próximas do que qualquer diferença dada.*

Não há dúvida em se dizer que os conceitos mais importantes do Cálculo são: função, limite, continuidade, derivação e integração e que são abstratos e complexos. Porque continuidade, derivada e integral são dados por limites, esse conceito é fundamental.

Não são poucos os alunos que possuem uma concepção errônea de limite de uma função, vendo-o como um processo de “aproximar-se” de um valor, em vez de identificar o valor numérico do qual a função está sendo aproximada. O aluno, erroneamente, por vezes imagina que o limite nunca é alcançado. As implicações desses erros são sérias pois comprometem também os conceitos de continuidade, de diferenciabilidade e de integrabilidade, que são dados por limites.

Conhecedores de várias concepções errôneas que os alunos têm a respeito do conceito de limite, fizemos uma rápida revisão, trabalhando novamente o conceito de limite que apresentamos abaixo.

Limite de uma função

Consideremos a função $y = f(x)$ e seja α um ponto pertencente a seu campo de definição. Ao escrever $\lim_{x \to \alpha} f(x) = L$,

e dizer "o limite de $f(x)$, quando x tende a α, é igual a *L*",

entende–se que se pode tornar os valores de $f(x)$ cada vez mais próximos de *L* , fazendo x suficientemente próximo de α, pela esquerda e pela direita, mas com $x \neq \alpha$.

Reforçando no trabalho de sala de aula que se o conceito de função estiver bem claro e se, a partir dele, pudermos fazer uma tabela e/ou um gráfico, a notação usual para expressar o limite *L* dessa função $f(x)$, quando o ponto x se aproxima de um determinado valor α, quer-se expressar que os valores de $f(x)$ ficam cada vez mais próximos de *L,* ou seja, esse conceito é dado pela definição

dado $\varepsilon > 0$ e arbitrário, existe $\delta > 0$, $\delta = \delta(\varepsilon)$,

tal que $0 < |x - \alpha| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$.

Pudemos vivenciar a dificuldade dos alunos em entender esse importante conceito de Limite, quando em uma aula, um bom aluno nos disse que não acreditava que 0,999**...** fosse igual a 1. Explicamos a ele de duas maneiras diferentes: através da fração geratriz e através da soma dos termos de uma progressão geométrica infinita.

Fração geratriz

Seja $x = 0{,}999...$

Multiplicando-se por 10 ambos os membros dessa equação tem-se $10x = 9{,}999...$

$$\begin{aligned} &\text{e que} \quad 10x = 9 + 0{,}999... \\ &\text{mas como} \quad x = 0{,}999... \\ &\text{então,} \quad 10x = 9 + x \\ &\quad 10x - x = 9 \\ &\quad 9x = 9 \\ &\quad x = 1 \end{aligned}$$

mas, um dos questionadores continuava a não aceitar que 0,999**...** = 1.

O professor-pesquisador buscou lhe mostrar de outra maneira, uma vez que esse aluno havia feito um bom Ensino Médio e sempre se saira bem em matemática.

Soma dos termos de uma progressão geométrica infinita

Sabe-se que a Soma dos termos de uma Progressão Geométrica finita é dada por $S_n = a(r^n - 1)/(r-1)$, onde S_n é a soma dos n primeiros termos da P.G. finita, a é seu primeiro termo, r é a razão da P.G. e n é o número de termos.

Pode-se determinar a soma dos termos de uma P.G. decrescente infinita com razão $|r| < 1$, aplicando o limite à Soma dos termos da P.G. finita quando o número de termos tende ao infinito. Assim,

$\lim_{n\to\infty} S_n = S = \lim_{n\to\infty} a(r^n - 1)/(r-1)$ onde se conjecturou que $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$.

Isso foi aceito após a verificação de alguns casos particulares de *r*, com $|r| < 1$.

Então $S = a(0-1)/(r-1) = -a/(r-1) = a/(1-r)$

Se $x = 0{,}999... = 0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + 0{,}0009 + 0{,}00009 + ...$ tem-se

uma progressão geométrica infinita com $a = 0{,}9$ e $r = 0{,}1$.

Logo $S = a/(1-r) = 0{,}9/(1-0{,}1) = 0{,}9/0{,}9 = 1$.

Concluindo, o professor disse ao aluno que

0,9 é diferente de 1 , há uma diferença de 0,1;
0,99 é diferente de 1 , há uma diferença de 0,01;
0,999 é diferente de 1 , há uma diferença de 0,001.
. .
. .
. .

Mas, 0,999**...** = 1 pois se trata de um processo limite e que tanto 0,999**...** quanto 1 são duas representações para um mesmo lugar na reta dos números reais.

Ainda assim esse aluno dizia não concordar com esse resultado. Possivelmente ele continuava a ver o limite como um procedimento e não como um número. Os alunos com esta concepção errônea costumam identificar o limite de uma função como "o processo da função se aproximando de um valor" ao invés de ver o limite como o "valor numérico do qual ele está sendo aproximado".

A Continuidade de uma função

Como nosso projeto pretendia chegar às atividades que envolviam integrais, passamos rapidamente à revisão do conceito continuidade.

Para uma função f ser *contínua no ponto* α é necessário que ocorram três condições:

- A função deve ser definida no ponto α, ou seja, que α pertence ao domínio de f. Logo existe $f(\alpha)$.
- A função deve ter limite L no ponto α, ou seja, que $\lim_{x\to\alpha} f(x) = L$
- $L = f(\alpha)$

Uma função é dita *contínua no conjunto* *A* quando f for contínua em todos os pontos do conjunto *A*.

Derivada de uma função

Mostramos aos alunos que a continuidade é expressa através de um limite e que se a função for contínua podemos definir derivada.

Para que uma função seja diferenciável no ponto α é preciso que a função seja contínua nesse ponto. Além disso, a derivada de uma função f em um número fixo α é dada por

$$f\,'(\alpha) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{h}, \qquad \text{ou seja,}$$

a derivada da função no ponto α é igual ao valor da função no ponto final $(\alpha+h)$ menos o valor da função no ponto inicial α dividido pelo acréscimo dado ao ponto $(\alpha+h)-\alpha = h$.

Também, olhando-se sob outro ângulo, pode–se dizer que $f\,'(\alpha)$ é a taxa de variação instantânea da função $y = f(x)$ em relação a x, quando $x = \alpha$.

Se, para qualquer x pertencente ao campo de definição da função f,

$$f\,'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \qquad \text{ou seja,}$$

dado um número x qualquer, para o qual esse limite existe, faz–se corresponder a ele o número $f\,'(x)$, o valor da derivada da função f no ponto x. Assim, pode-se considerar $f\,'$ como uma nova função, chamada *função derivada de* f e definida pela equação acima. Sabe–se que o valor de $f\,'$ em x, $f\,'(x)$, pode ser interpretado geometricamente como a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$.

Observamos que, entre os matemáticos do século XVIII, era corrente ver-se a operação integração simplesmente como um processo inverso da operação diferenciação.

Nossos alunos já haviam trabalhado com as técnicas operatórias relativas às derivadas e antiderivadas. Recordando, com eles, como é definida a antiderivada de uma função, lhes dissemos que

Uma função F é chamada uma **antiderivada** de f sobre um intervalo I se $F'(x) = f(x)$ para todo x em I.

Teorema Se F for uma antiderivada de f, em um intervalo I, então, a antiderivada mais geral de f em I é $F(x)+C$ onde C é uma constante arbitrária.

A antiderivada é conhecida como integral indefinida da função f .Assim pode-se escrever que $\int f(x)dx = F(x)+C$

A Integral de uma função

Tendo o conhecimento do resultado dessa operação chamada antiderivada como operação inversa da derivada, levamos os alunos a perceber a necessidade desse cálculo ao trabalhar a integral definida, a integral de Riemann.

Seja f uma função contínua para $a \le x \le b$. Seja o intervalo $[a,b]$ dividido em n subintervalos de comprimentos iguais a $\Delta x = (b-a)/n$. Sejam $x_0(=a), x_1, x_2, ..., x_n(=b)$ os extremos desses subintervalos e consideremos os pontos amostrais $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$ nesses subintervalos, de tal forma que x_i^* está no *i*-ésimo subintervalo $[x_{i-1},\ x_i]$. Então a integral definida de f é dada por

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

Segundo Stewart (2001), o símbolo $\int$ foi introduzido por Leibniz e é chamado sinal de integral. Na notação do símbolo $\int_a^b f(x)dx$ como um todo, $f(x)$ é chamado integrando, a e b são chamados limites de integração onde

a o limite inferior, b o limite superior. O símbolo dx é o diferencial e indica em relação a que variável a função f está sendo integrada. O processo de calcular uma integral é chamado integração.

Ao falar sobre a razão da integral definida ser chamada integral de Riemann, o professor-pesquisador, de início, se sentiu na obrigação de falar quem era Riemann.

Bernard Riemann recebeu seu doutorado sob a orientação do legendário Gauss na Universidade de Göttingen e lá permaneceu para lecionar. Gauss, que não tinha o hábito de elogiar outros matemáticos, referiu–se a Riemann como *uma mente criativa, ativa e verdadeiramente matemática e de uma originalidade gloriosamente fértil.*

A integral de Riemann é dada por um limite, e o valor dessa integral é que mede quantitativamente a área sob o gráfico de uma função $f(x)$, num intervalo $[a,b]$.

Os alunos, após essa Plenária, puderam justificar o uso da matemática para calcular as áreas pedidas na atividade 7, por geometria e pelo uso do limite no processo chamado Integral Definida de uma Função.

Para essa atividade 7 complemento, estavam programadas as atividades 8 a 14, que se referiam aos problemas da atividade 7.

Resolvendo os problemas 10 a 14, registramos algumas respostas.

10) Não, podemos resolver geometricamente ou pelo método de integração. Na questão 6 temos uma figura que apresenta curvas. Calculando-se geometricamente chegaríamos a um valor aproximado da área. Como a integral definida nós dá a area entre o eixo x e a curva da função, entre os limites pré-estabelecidos, usando o método da integração teremos o valor exato da área da figura.

11) Integrar, nada mais é o ato de somar infinitos elementos que estarão relacionados a uma taxa de variação istantânte. Se estabelecer-mos o início e o fim da integração pode-se encontrar a área, é como se fosse a soma dos infinitos retângulos de base dx e altura $f(x)$.

12) Integração é o nome dado ao procedimento de Integrar, ou seja, é o conceito necessário para se integrar qualquer função conhecida.

13) É o resultado da Integração onde ela poderá ser um valor (se for definida) ou uma nova função (se for indefinida) e a integral é simbolizada pela letra latina summa $\int$

14a) dx representa que a integral será realizada em referência a variável x.

Nessa atividade foi, também apresentados aos alunos alguns quebra-cabeças com o objetivo de associarem sua montagem à palavra integrar. Foi um período de descontração, quando todos se envolveram em grupos e puderam perceber que os quebra-cabeças ficavam completos quando todas as peças completavam inteiramente as áreas das figuras.

A reconstrução dos conceitos recordados foi feita ao longo da resolução dos problemas propostos.

5.4.4.7 – 7º Encontro – O trabalho dos alunos e sua análise

Para esse encontro foi programada a atividade 8 em suas partes 1, 2 e 3, encontradas nas páginas 188, 189 e 190 desta dissertação.

O objetivo dessa atividade 8 parte 1 foi fixar o comportamento das operações e dos sinais de reunião na linguagem matemática de expressões numéricas. Justifica-se essa revisão pela necessidade de se reconhecer a hierarquia da ordem das operações e da obediência aos sinais de reunião, uma vez que essas ordens determinam o respeito a uma linguagem matemática do comportamento das ações a serem desenvolvidas.

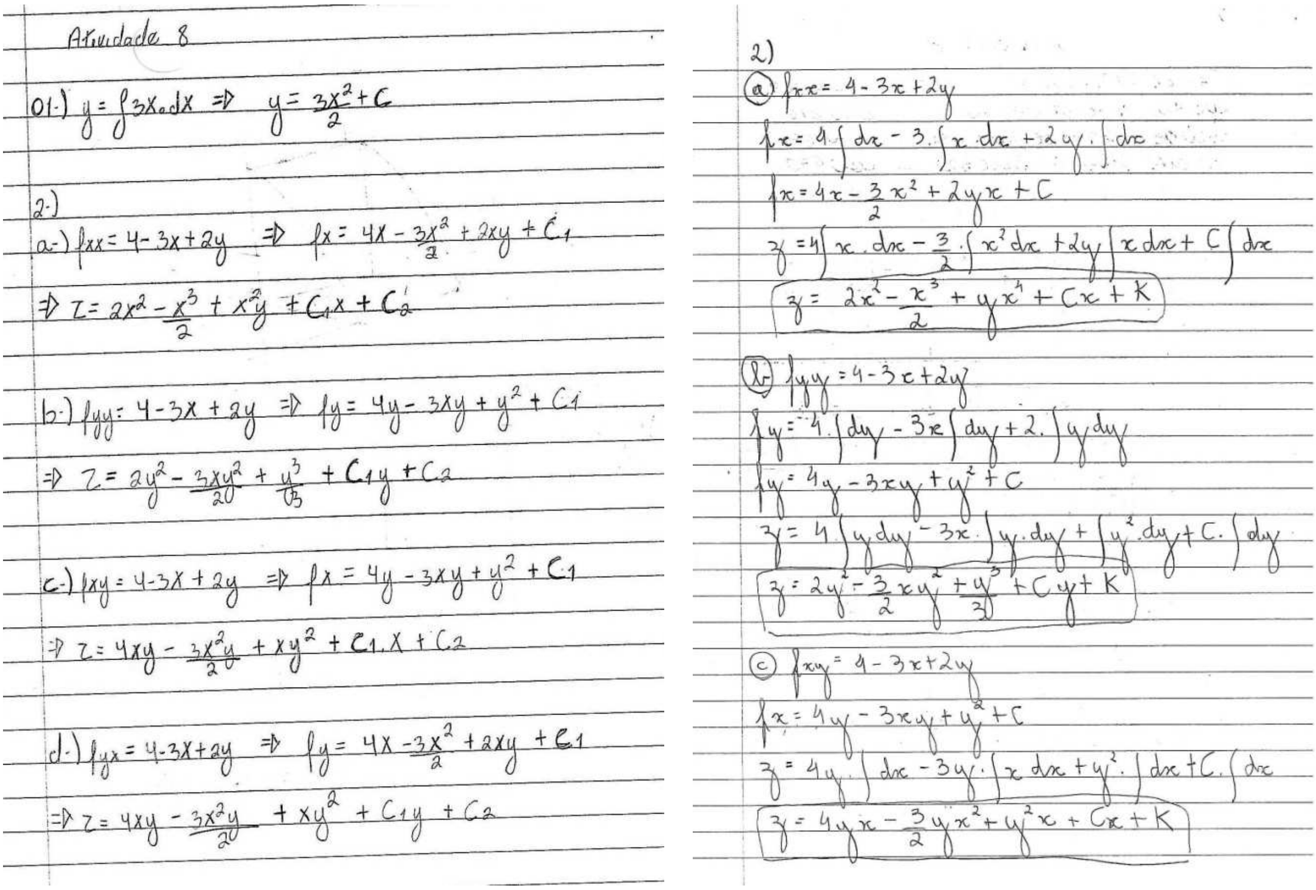
Boa parte dos alunos realizou a tarefa sem problemas. Houve alguns que, sim, cometeram erros de cálculo e desrespeito a essa linguagem. Contudo o trabalho em grupos foi positivo uma vez que houve oportunidade de todos conferirem seus cálculos e descobrirem suas falhas. Desejava-se, com essa tarefa, que o aluno notasse que, mesmo nos exercícios mais simples, a matemática é uma ciência de padrão e ordem.

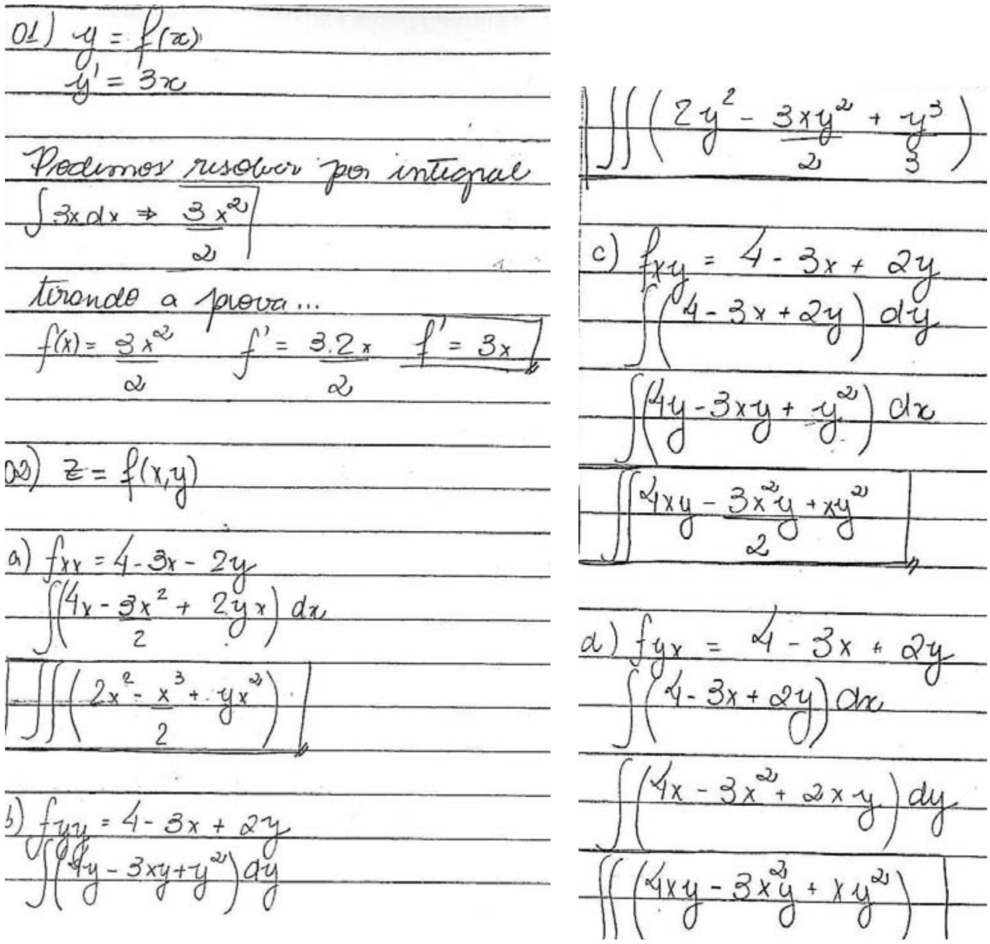
Essa tarefa pretendeu fazer com que os alunos pudessem ter uma “ideia” sobre o procedimento a ser adotado quando fossem resolver integrais duplas, onde, em relação a suas variáveis, se efetuasse uma analogia com o que se faz em expressões numéricas, dentro de uma linguagem matemática.

Na atividade 8 parte 2, o objetivo foi recordar o conceito da operação antiderivada para uma função de uma variável e, como os alunos já haviam tido contato com funções de duas variáveis, no primeiro bimestre de Cálculo 2, estender essa operação para as derivadas parciais. Sente-se a necessidade de reconhecer, nas integrais duplas, a ordem de integração no que se refere ao domínio das variáveis de integração e que os alunos compreendam o processo de iteração dos procedimentos. Mas, para um bom desempenho em integrais definidas, é necessário que os alunos tenham conhecimento do conceito de antiderivada sendo que os problemas dados, nessa tarefa, requisitaram um treinamento com antiderivadas.

Nos itens 2a e 2b houve uma certa facilidade no processo de antiderivação. Já no item 2c foi nítido notar a conversa, dentro de cada um dos grupos, quando se pedia f_{xy}, ao efetuar primeiro a antiderivada em relação à variável y e, depois, em relação à variável x, chegando-se à função primitiva como uma função de duas variáveis. Ainda, quando efetuaram f_{xy}, foram feitos comentários sobre o fato de que, quando se integra em relação a y, assume-se x como constante.

Num dos grupos pôde-se notar uma “descoberta” que lhes pareceu importante: que a função primitiva, como uma função de duas variáveis, tanto para f_{xy} quanto para f_{yx}, era a mesma. Alguns grupos não chegaram a perceber a necessidade de se colocar constantes na primeira e na segunda antiderivadas. Quando alguns alunos vieram perguntar ao professor-pesquisador sobre a necessidade de se colocar as constantes, este optou por questioná-los sobre o modo que eles pensavam ser correto escrever e os deixou livres para expor suas próprias maneiras de colocar essas constantes. Registramos aqui algumas respostas.





01) $y = f(x)$

$y' = 3x$

Podemos resolver por integral

$\int 3x\,dx \Rightarrow \frac{3x^2}{2}$

tirando a prova...

$f(x) = \frac{3x^2}{2}$ $f' = \frac{3.2x}{2}$ $f' = 3x$

02) $z = f(x,y)$

a) $f_{xx} = 4 - 3x - 2y$

$\int\left(4x - \frac{3x^2}{2} + 2yx\right) dx$

$\int\int\left(2x^2 - \frac{x^3}{2} + yx^2\right)$

b) $f_{yy} = 4 - 3x + 2y$

$\int\left(4y - 3xy + y^2\right) dy$

$\int\int\left(2y^2 - \frac{3xy^2}{2} + \frac{y^3}{3}\right)$

c) $f_{xy} = 4 - 3x + 2y$

$\int\left(4 - 3x + 2y\right) dy$

$\int\left(4y - 3xy + y^2\right) dx$

$\int\int\left(4xy - \frac{3x^2y}{2} + xy^2\right)$

d) $f_{yx} = 4 - 3x + 2y$

$\int\left(4 - 3x + 2y\right) dx$

$\int\left(4x - 3x^2 + 2xy\right) dy$

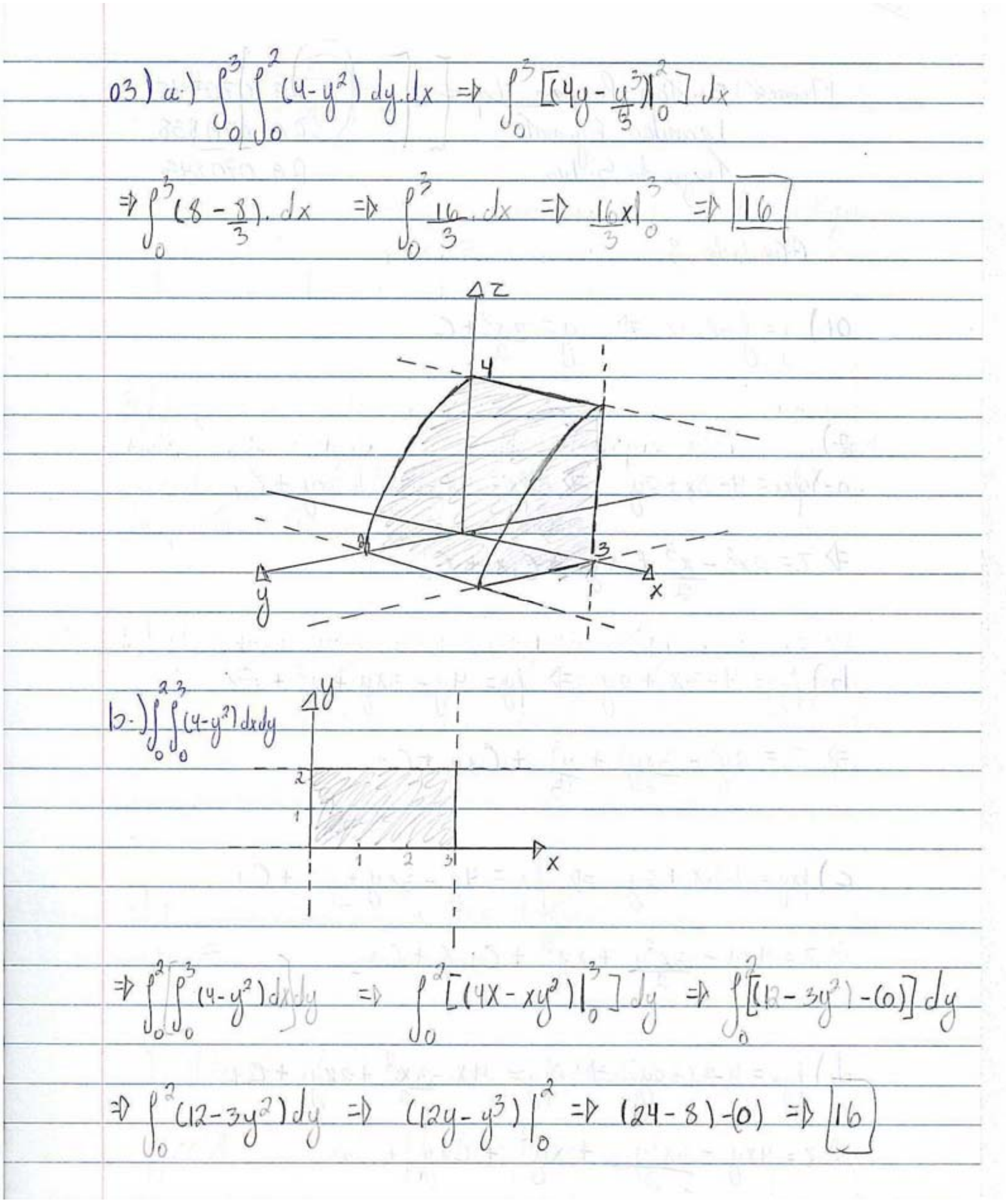
$\int\int\left(4xy - 3x^2y + xy^2\right)$

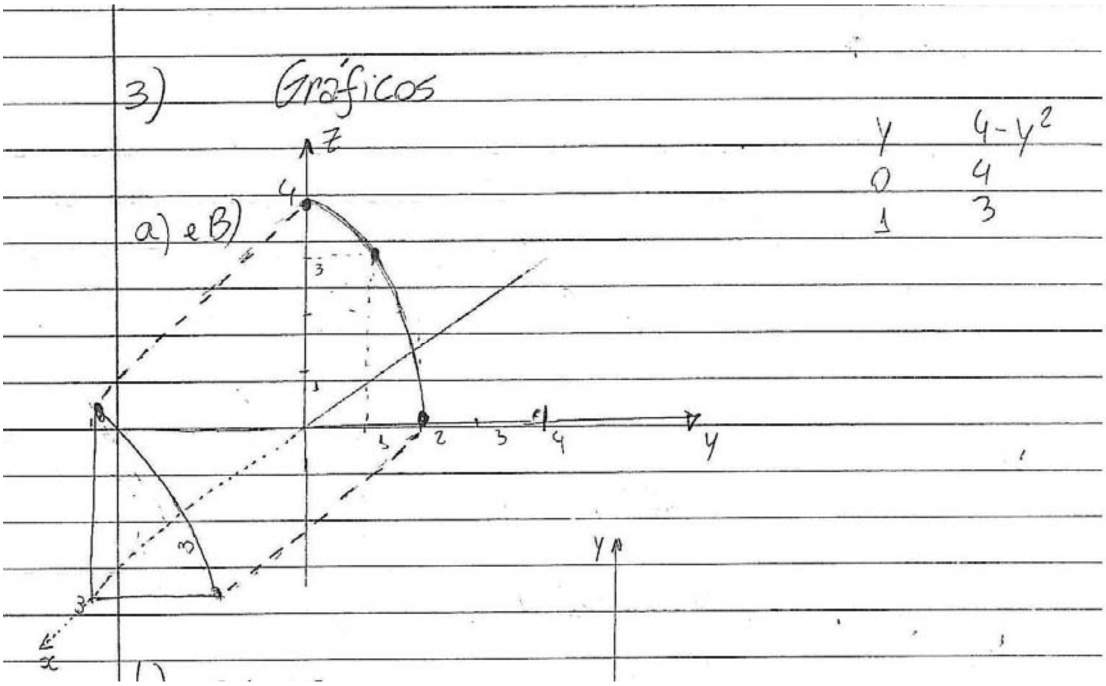
A atividade 8 parte 3 foi iniciada por poucos grupos e, assim, deixada como tarefa extraclasse.

5.4.4.8 – 8º Encontro – O trabalho dos alunos e sua análise

Para esse encontro demos continuação à atividade 8 parte 3, página 190 desta dissertação. Programou-se uma Plenária para a segunda metade do encontro.

A atividade 8 parte 3 teve por objetivos relacionar a técnica operatória de uma integral dupla como uma integral repetida, relacionar os limites de integração às suas variáveis, e reconhecer que a ordem de integração é irrelevante, chegando-se ao mesmo valor desde que se respeitem os respectivos limites de integração. Como essa atividade fora deixada como tarefa extraclasse, houve oportunidade de os alunos terem contato com ela. Apesar disso, poucos realmente a executaram. Assim, esse trabalho foi realizado em sala de aula, nesse novo encontro. Dada a partida, o professor-pesquisador manteve-se como um observador, visando a acompanhar o que os alunos pensavam e faziam. Os alunos chegaram a questionar o professor sobre o que era região de integração, forçando-o a lhes responder se era "fazer o gráfico" . O professor não lhes respondeu e os alunos tentaram, então, resolver a questão. Assim, aqueles que, pensando, conseguiram entender o que significava uma região de integração, montaram essa região de integração no plano. Houve dois grupos que, a partir dessa identificação, puderam expressá-la em três dimensões, apresentando os esboços e as resoluções abaixo.





Efetuamos a Plenária, convidando os alunos para a lousa, onde mostraram que poderiam utilizar um colchete separando o cálculo das integrais em relação a uma variável e, depois, em relação à outra. Esses alunos mostraram à classe que uma integral dupla deve ser resolvida de “dentro para fora”. A classe esteve bem atenta à resolução dos colegas, participando, questionando e procurando entender a sequência de operações feitas. Resolveram os itens *a* e *b*, mostrando que chegavam ao mesmo valor, concluindo que se deve chegar ao mesmo valor quando se muda a ordem de integração. Ainda, sobre a região de integração, alguns alunos inferiram que, por tratar-se de função de duas variáveis, esperava-se, como campo de definição, uma região no plano. Houve muita participação dos alunos, que ficaram bastante envolvidos e empolgados com a resolução do problema. Quando um dos grupos fez seu desenho em três dimensões, surgiu uma pergunta do pesquisador ao grupo: - Que problema resolve essa integral dupla? Esse grupo, ainda na lousa, disse que era o cálculo do volume de um sólido. O professor-pesquisador não esperava, para esse momento, que os alunos pudessem inferir que era o volume.

No final desse encontro foi distribuída aos alunos a atividade 8 parte 4.

5.4.4.9 – 9º Encontro – O trabalho dos alunos e sua análise

Para esse encontro estava programada a atividade 8 parte 4, encontrada na página 191 desta dissertação.

O objetivo dessa atividade foi verificar se os alunos eram capazes de reconhecer uma região de integração não retangular, reconhecendo que, nesse caso, uma variável dependeria da outra, isto é, seria função da outra, e que, ao calcular essas integrais, pudessem se deparar, numa, com a necessidade de relembrar a técnica de integração por substituição e, em outra, a técnica de integração por partes. Muitos alunos não se lembravam como calcular essas integrais dizendo que elas eram integrais diferentes das outras calculadas.

Nesse momento o professor perguntou aos grupos: – como vocês calculavam as derivadas das funções $y = e^x sen(3x)$ e $y = (7 - 3x^4)^5$?

Os alunos pararam, pensaram por alguns instantes e tentaram responder.

Vendo o professor-pesquisador que essa era uma dúvida quase geral, resolveu estender a pergunta a toda classe, agora em uma Plenária, onde alguns alunos responderam que a maneira de se chegar à primeira derivada era usar a regra do produto, enquanto a segunda era usar a regra da cadeia.

Então, o professor-pesquisador perguntou novamente à classe: – Será que não existem técnicas correspondentes às da derivação para a integração?

Dois alunos, de dois diferentes grupos, mencionaram as técnicas operatórias da integração por partes e da integração por substituição, mas ainda restava a pergunta como saber qual dessas técnicas se aplicaria a cada questão. Os alunos sentiram necessidade de revisar essas técnicas para dar prosseguimento à atividade, sendo que a maioria dos achou essa atividade difícil.

O encontro acabou, deixando os alunos incumbidos de trazer para o encontro seguinte a resolução das duas integrais duplas propostas. Foi distribuída também, ao final deste encontro, a atividade 9 parte 1.

5.4.4.10 – 10º Encontro – O trabalho dos alunos e sua análise

Para esse encontro foi programada a atividade 9 parte 1 e atividade 9 parte 2, encontradas nas páginas 192 e 193 desta dissertação.

O objetivo dessa atividade é fazer com que os alunos, ao analisarem os limites de integração de uma integral dupla, possam inverter sua ordem sem mudar seu valor final, escrevendo uma integral dupla equivalente a ela. A justificativa para esse objetivo vem da conveniência de, ao se assumir ora uma, ora outra variável, ser mais fácil resolver a integral dada simplesmente calculando essa integral primeiro em relação a uma variável do que em relação à outra, isto é, invertendo-se a ordem de integração.

A maioria dos alunos percebeu já no item 1 da atividade 9 parte 1, que a região de integração não era retangular e que uma variável estava dada em função da outra. Em outra fala foi dito que somente nas regiões retangulares é que as duas variáveis variavam numericamente. Alguns alunos tentaram resolver essa atividade mas tiveram alguma dificuldade em inverter.

Um questionamento interessante foi o de um aluno, em querer, simplesmente, inverter a ordem de integração. Tomou a integral $\int_0^2 \int_{y-2}^0 dxdy$ e passou para $\int_{y-2}^0 \int_0^2 dydx$, momento em que o professor-pesquisador indagou à classe: – O que resultaria com a inversão de integração dos limites quando isso ocorresse?

O professor-pesquisador pediu aos alunos para resolverem as duas integrais e, após poucos minutos, três alunos perceberam e disseram que uma integral daria um resultado numérico e outra um não numérico.

Mesmo assim, a classe, como um todo, precisou ver para crer. O professor-pesquisador foi até a lousa e pediu que os alunos fossem ditando, passo a passo, a forma de resolução das duas integrais. Depois disso, é que alguns alunos, na linguagem deles, disseram que, na integração da função segundo a última variável, precisava haver obrigatoriamente uma variação numérica para que o resultado final da integral dada fosse um número.

Apesar do item 1 da atividade 9 parte 1 ter sido completada, nos três problemas da atividade não havia sido pedido para se calcular a integral. Pedia-se simplesmente para esboçar a região de integração e encontrar uma integral dupla equivalente com a ordem de integração invertida. Foi entregue aos alunos a atividade 9 parte 2, onde era pedido para esboçar a região, inverter a ordem de integração, e calcular a integral dada. Os alunos começaram a fazer essa atividade, mas não a terminaram. Somente dois grupos da turma puderam dar atenção à questão 5 da atividade 9 parte 2, onde, por se tratar de uma região limitada por 3 retas, seria necessário efetuar sua montagem por meio da soma de duas integrais duplas. O tempo do encontro terminou e aos alunos foi pedido para concluírem a atividade 2 como tarefa extraclasse. Ao mesmo tempo que a atividade 9 parte 3 foi entregue, solicitou-se aos alunos que a lessem para o próximo encontro.

5.4.4.11 – 11º Encontro – O trabalho dos alunos e sua análise

Para esse encontro foi programada a atividade 9 parte 3, encontrada na página 194 desta dissertação.

O objetivo dessa atividade, através das questões denominadas "Curtas e Fáceis", foi preparar os alunos para chegar à formalização do cálculo do volume de um sólido através de integrais duplas.

Utilizando o recurso da História da Matemática, pudemos entender que o homem sempre procurou chegar à solução de problemas novos que surgiam, fazendo ampliações de ideias conhecidas que pudessem ampliar conceitos já construídos. Assim aconteceu quando a geometria, não dando conta de calcular áreas de superfícies limitadas por curvas, criaram a integral simples. Da mesma forma, quando a integral simples não dava mais conta de calcular volumes, ocorreu também a necessidade da criação de integrais duplas, e o mesmo aconteceria quando a integral dupla, não atendendo a determinados casos de cálculos de volume, precisou ser criada a integral tripla.

Apesar do objetivo dessa atividade estar claro no parágrafo anterior, convém lembrar que, na atividade 8 parte 3, do 8º encontro, para surpresa do professor parecia que todos os alunos já haviam sido conduzidos por outros de dois grupos, na plenária, à construção do gráfico em três dimensões, sendo que os dois alunos, quando indagados sobre o que realizava uma integral dupla, responderam que acreditavam que ela calculava o volume de um sólido. Essa surpresa revelou que nem todos os alunos da turma haviam entendido o que seus colegas, na lousa, diziam naquele momento.

No início desse encontro, o professor perguntou aos alunos se eles haviam feito o problema 5 da atividade 9, aquele cuja função era definida nos pontos de uma região triangular. A resposta dos alunos foi que não o haviam feito, pois não tinham conseguido encontrar os extremos de integração. De fato, eles não haviam percebido que deviam, para achar esses extremos, fazer a intersecção das retas dadas e, então, achar as limitações para cada variável.

Entende-se por “montagem da integral”, expressão usada pelo professor, para a apresentação da expressão da integral, com a identificação de seus limites de integração e a indicação da ordem de integração. No problema em que estamos trabalhando, com integral dupla, seria escrever a integral dupla para uma função de duas variáveis, identificando seus limites de integração e indicando sua ordem. A integral dupla assim apresentada, quando resolvida, daria o volume do sólido construído.

O professor-pesquisador, diante das dúvidas dos alunos, optou por ser ele mesmo o resolutor do problema e com essa resolução feita em todos seus detalhes. Para isso, o professor-pesquisador buscou chegar à solução da integral, levando os alunos a entender o que deveria ser feito ao longo da resolução. Para interpretar tudo o que o problema pedia, passamos para a montagem da integral. Depois de identificada a função de duas variáveis, $f(x,y)=xy$, esboçamos a região de integração identificando as limitações das variáveis da função e fizemos a representação da integral por meio de duas integrais duplas, correspondentes às duas áreas que compunham a região de integração, representada pelo triângulo, obedecendo uma determinada ordem de integração.

Visando à resolução desse problema, o professor-pesquisador adotou a seguinte ordem de integração $dydx$, isto é, integrando primeiro em relação a y e depois a x.

Inicialmente, o professor-pesquisador preocupou-se com a interpretação da leitura feita desse problema. Pedindo a participação ativa de todos os alunos, lhes disse que a região do plano onde a função (xy) foi definida, seria obtida e, possivelmente desenhada, percebendo que ela havia sido dada por três retas. Foi difícil à maioria dos alunos perceber que, o primeiro passo, seria o de encontrar os vértices dessa região triangular. Assim foi preciso que se lhes recordasse que esse problema seria resolvido ao fazer a interseção das três retas tomadas duas a duas, de modo a determinar seus três vértices. Isso foi feito com muitos questionamentos aos alunos e registrada na lousa sua formalização.

Se

$$\begin{aligned} &y_1 = x \quad \text{e} \quad y_2 = 2x \\ &\text{na intersecção temos} \\ &y_1 = y_2 \\ &x = 2x \\ &0 = 2x - x \\ &0 = x \\ &\text{como } y_2 = 2x \text{ temos } y = 0 \\ &\text{e um dos vértices será } (0,0) \end{aligned}$$

Se

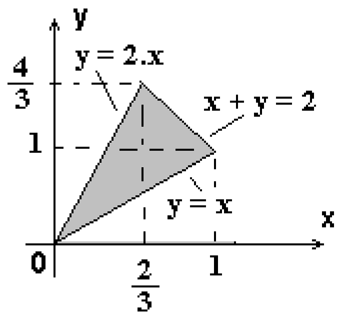
$$\begin{aligned} &y_1 = x \quad \text{e} \quad y_3 = 2 - x \\ &\text{na intersecção temos} \\ &y_1 = y_3 \\ &x = 2 - x \\ &2x = 2 \\ &x = 1 \\ &\text{como } y_1 = x \text{ temos } y = 1 \\ &\text{e o segundo vértice será } (1,1) \end{aligned}$$

Se

$$\begin{aligned} &y_2 = 2x \quad \text{e} \quad y_3 = 2 - x \\ &\text{na intersecção temos} \\ &y_2 = y_3 \\ &2x = 2 - x \\ &3x = 2 \\ &x = \frac{2}{3} \\ &\text{como } y_2 = 2x \text{ temos } y = \frac{4}{3} \\ &\text{e o terceiro vértice será } \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) \end{aligned}$$

De posse dos três vértices da região triangular, o professor juntamente com os alunos puderam esboçar a região de integração.

Chamando a atenção dos alunos para que, observando o esboço feito, pudessem determinar as variações de x e de y,



$$\begin{cases} 0 \le x \le \dfrac{2}{3} \\ x \le y \le 2x \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dfrac{2}{3} \le x \le 1 \\ x \le y \le 2-x \end{cases}$$

e definiram os dois pares de extremos de integração. Assim, puderam montar a composição das duas integrais duplas que, adicionadas, responderiam ao cálculo da integral $\iint_R xydA = \int_0^{2/3}\int_x^{2x} xydydx + \int_{2/3}^{1}\int_x^{2-x} xydydx$

A última solicitação do problema era a de se calcular a integral $\iint_R xydA$.

$$\iint_R xydA = \int_0^{2/3}\int_x^{2x} xydydx + \int_{2/3}^{1}\int_x^{2-x} xydydx = \int_0^{2/3}\left[x\frac{y^2}{2}\right]_x^{2x} dx + \int_{2/3}^{1}\left[x\frac{y^2}{2}\right]_x^{2-x} dx =$$

$$= \int_0^{2/3}\left[x\frac{4x^2}{2} - x\frac{x^2}{2}\right]dx + \int_{2/3}^{1}\left[x\frac{(2-x)^2}{2} - x\frac{x^2}{2}\right]dx = \int_0^{2/3}\left[2x^3 - \frac{x^3}{2}\right]dx + \int_{2/3}^{1}\left[\frac{4x-4x^2-x^3}{2} - \frac{x^3}{2}\right]dx =$$

$$= \int_0^{2/3}\frac{3x^2}{2}dx + \int_{2/3}^{1}(2x-2x^2)dx = \left[\frac{3}{2}\cdot\frac{x^4}{4}\right]_0^{2/3} + \left[x^2 - 2\cdot\frac{x^3}{3}\right]_{2/3}^{1} = \frac{2}{27} + \frac{1}{3} - \frac{4}{9} + \frac{16}{81} = \frac{13}{81}$$

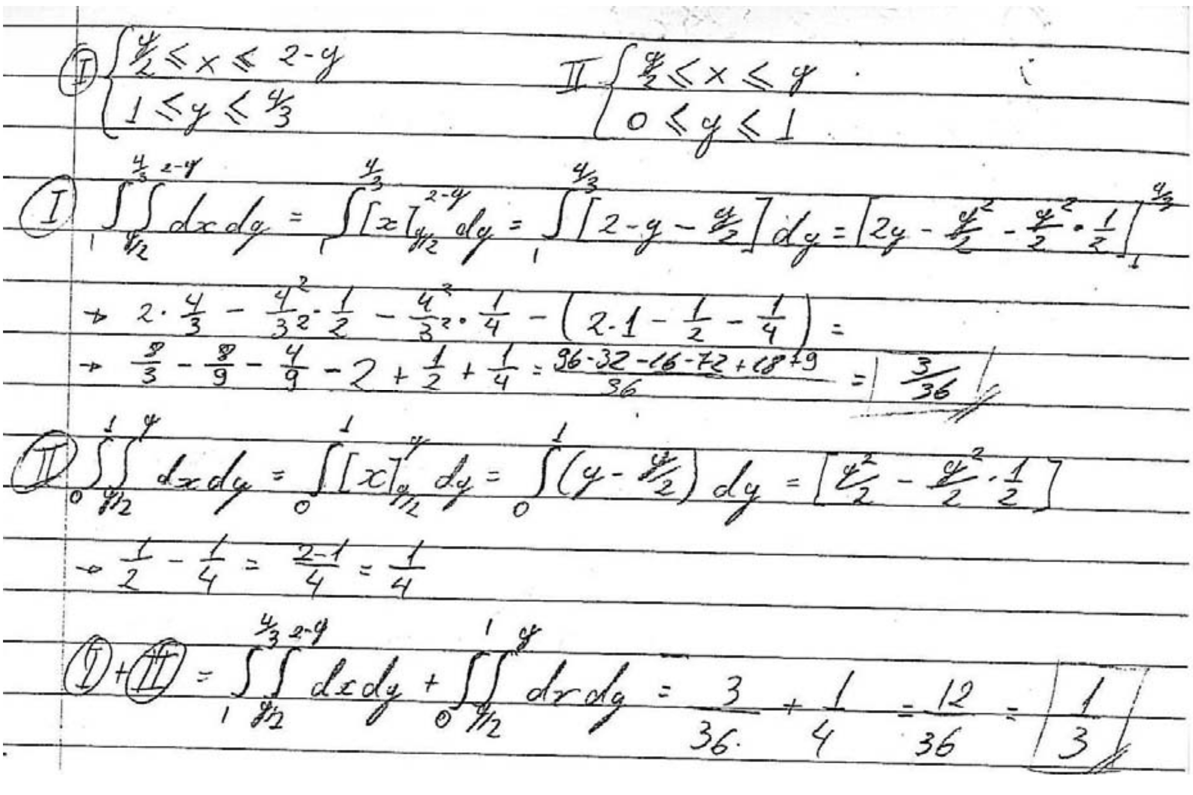
Durante essa resolução, a maioria dos alunos acompanhou, copiando o que o professor escrevia na lousa. O cálculo dessa integral levou a um número que media quantitativamente o volume do sólido.

Tendo o professor-pesquisador adotado uma determinada ordem de integração e como esse problema foi resolvido por ele, em detalhes, com a intenção de fixação de tudo o que foi trabalhado na Plenária, com a participação de todos os alunos da classe, o professor decidiu pedir à classe que resolvesse esse mesmo problema, como tarefa extraclasse, invertendo a ordem de integração.

Passando à atividade 9 parte 3, boa parte dos grupos não encontrou dificuldade em responder as “Curtas e Fáceis”. Assim os alunos foram para a última questão dessa atividade, a questão 9. Como essa questão apresentava enunciado, os alunos precisaram ler, interpretar e decidir o que fazer. Assim chegaram a esboçar a região de integração e alguns conseguiram efetuar a montagem do volume como uma integral dupla. A resolução completa desse problema ficou como tarefa extraclasse para o encontro seguinte. Além disso, o professor-pesquisador falou sobre os exercícios adicionais propostos na parte 3, com a recomendação de que eles seriam considerados para a avaliação. Ao final desse encontro, o professor-pesquisador entregou a atividade 9 parte 4 para que os alunos pensassem sobre o que seria abordado no encontro seguinte.

5.4.4.12 – 12º Encontro – O trabalho dos alunos e sua análise

Para esse encontro havia sido programada a atividade 9 parte 4, encontrada na página 195 desta dissertação. Entretanto, como havia sido deixada para tarefa extraclasse, essa questão foi trabalhada logo no início desse encontro. Vários grupos entregaram a parte da tarefa relativa à atividade 9 parte 2. As atividades completas foram recolhidas pelo professor e uma delas foi escolhida para ser apresentada em nosso trabalho de pesquisa.



$$\text{I}\begin{cases} \frac{y}{2} \leq x \leq 2-y \\ 1 \leq y \leq \frac{4}{3} \end{cases} \qquad \text{II}\begin{cases} \frac{y}{2} \leq x \leq y \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{I} \int_1^{4/3}\int_{y/2}^{2-y} dx\,dy = \int_1^{4/3} [x]_{y/2}^{2-y}\,dy = \int_1^{4/3} \left[2-y-\frac{y}{2}\right] dy = \left[2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\right]_1^{4/3}$$

$$\to 2\cdot\frac{4}{3} - \frac{4^2}{3^2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{4^2}{3^2}\cdot\frac{1}{4} - \left(2\cdot 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) =$$

$$\to \frac{8}{3} - \frac{8}{9} - \frac{4}{9} - 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{96-32-16-72+18+9}{36} = \boxed{\frac{3}{36}}$$

$$\text{II} \int_0^{1}\int_{y/2}^{y} dx\,dy = \int_0^1 [x]_{y/2}^{y}\,dy = \int_0^1 \left(y - \frac{y}{2}\right) dy = \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\right]$$

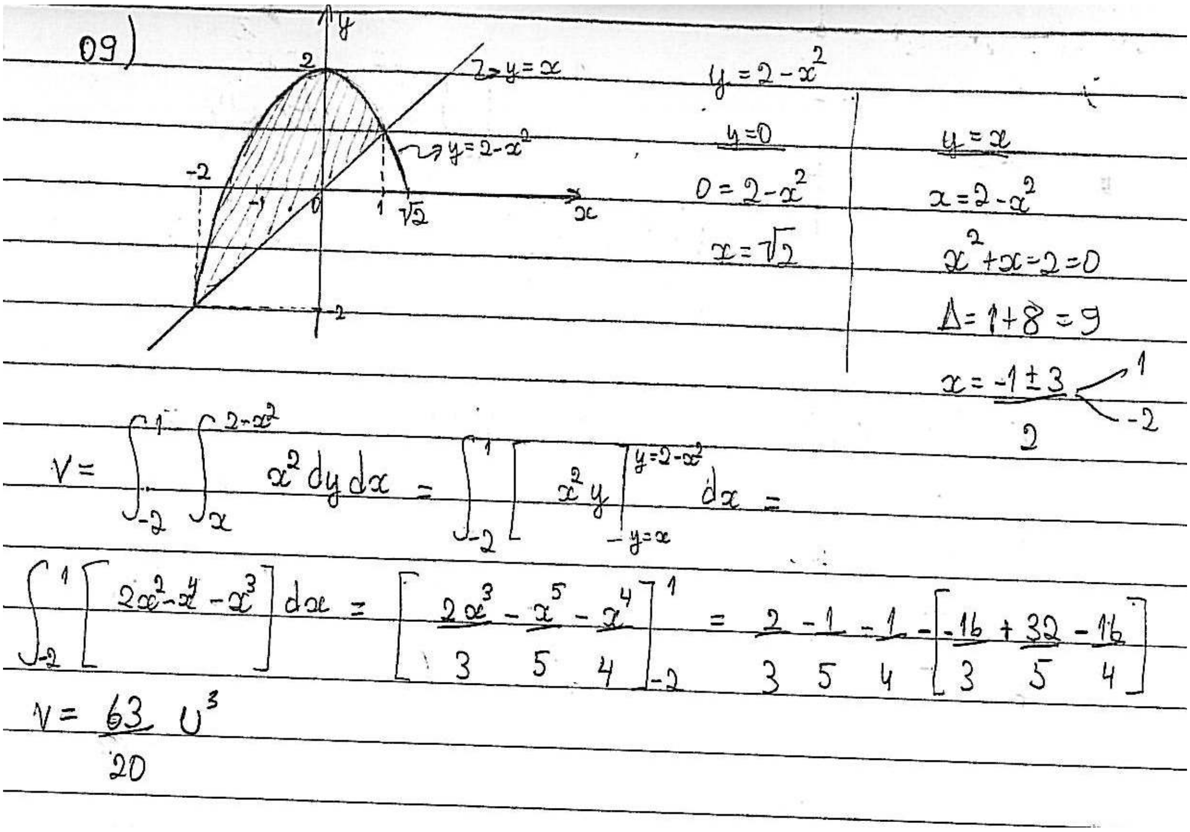
$$\to \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\text{I} + \text{II} = \int_1^{4/3}\int_{y/2}^{2-y} dx\,dy + \int_0^1\int_{y/2}^{y} dx\,dy = \frac{3}{36} + \frac{1}{4} = \frac{12}{36} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

Pode-se observar que o aluno se esqueceu de que $f(x,y) = xy$.

Outras atividades também haviam sido deixadas como tarefa extraclasse, a atividade 9 parte 3, problema 9, visando calcular o volume sobre uma superfície de duas variáveis, $z = f(x, y)$.

Poucos grupos apresentaram a resolução dessa tarefa nesse encontro. Foi escolhida a resolução de um dos grupos apresentada abaixo.



O objetivo da atividade 9 parte 4 foi que os grupos chegassem ao cálculo de áreas no plano expressos por uma integral dupla. Os alunos já tinham visto o conceito de área de uma região plana dado por uma integral simples e, nesse momento, seriam estimulados a pensar em como efetuar o cálculo dessa área a partir de uma integral dupla.

Nessa atividade também foram apresentadas questões denominadas “Curtas e Fáceis” que visavam colocar o aluno para raciocinar e sentir como poderia expressar analiticamente a área de uma região plana através de uma integral dupla.

Os alunos já sabiam calcular áreas de figuras planas a partir da geometria. Ao se depararem com figuras planas limitadas por curvas, a geometria já não era suficiente e precisaram trabalhar com integrais simples. Como fazer agora para calcular áreas de figuras planas fazendo o uso de integrais duplas?

Trabalhando nas questões “Curtas e Fáceis”, intencionalmente o professor-pesquisador colocou as quatro primeiras questões: 10 a 13, podendo ser resolvidas geometricamente, indo de um problema mais fácil para outro com alguma nova exigência. Também os alunos já sabiam que, além da forma geométrica, poderiam resolvê-las por meio de integrais simples.

A maioria dos grupos não teve dificuldade em responder às questões “Curtas e Fáceis” exceto a questão 14. Através das questões 10, 11, 12 e 13 os alunos foram levados a pensar como expressar a área por uma integral dupla.

Como os alunos já haviam desenvolvido o cálculo do volume através de uma integral dupla na atividade anterior, disseram ao professor-pesquisador que se a função de duas variáveis fosse 1, obter-se-ía a área. Mas isso não é verdade, pois o volume é medido em unidades cúbicas e a área em unidades quadradas, embora numericamente eles sejam iguais. Então, o professor-pesquisador perguntou aos alunos: – Volume é igual a área?

Os alunos responderam que não.

O professor outra vez perguntou: – Como então o que vocês disseram seria possível?

Os alunos pensaram por algum tempo, até que alguém de um dos grupos disse que, ao fazer a função $z = f(x, y) = 1$ se conseguiria o mesmo número, mas que o volume seria dado em m^3 e a área em m^2.

O professor perguntou: – Como vocês responderiam, então, à questão 14? Isto é, como se pode expressar analiticamente a área de uma região plana por meio de uma integral dupla?

$$Volume = \iint_R f(x, y)dA$$ com a unidade de medida u^3

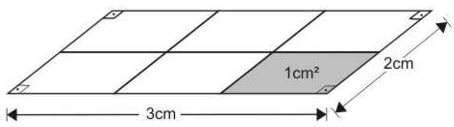
$$Área = \iint_R 1dA$$ com unidade de medida u^2.

Então, o que aconteceu é que $Volume = \iint_R \cancelto{1}{f(x,y)}\,dA$ se reduz à área numericamente pois o cuidado que se deve ter é que,

para Área em u^2 e, no caso de

u = 1cm, como por exemplo,

no desenho abaixo

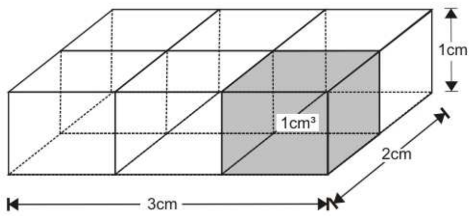


A = 6 cm^2

para o Volume em u^3 e, no caso de

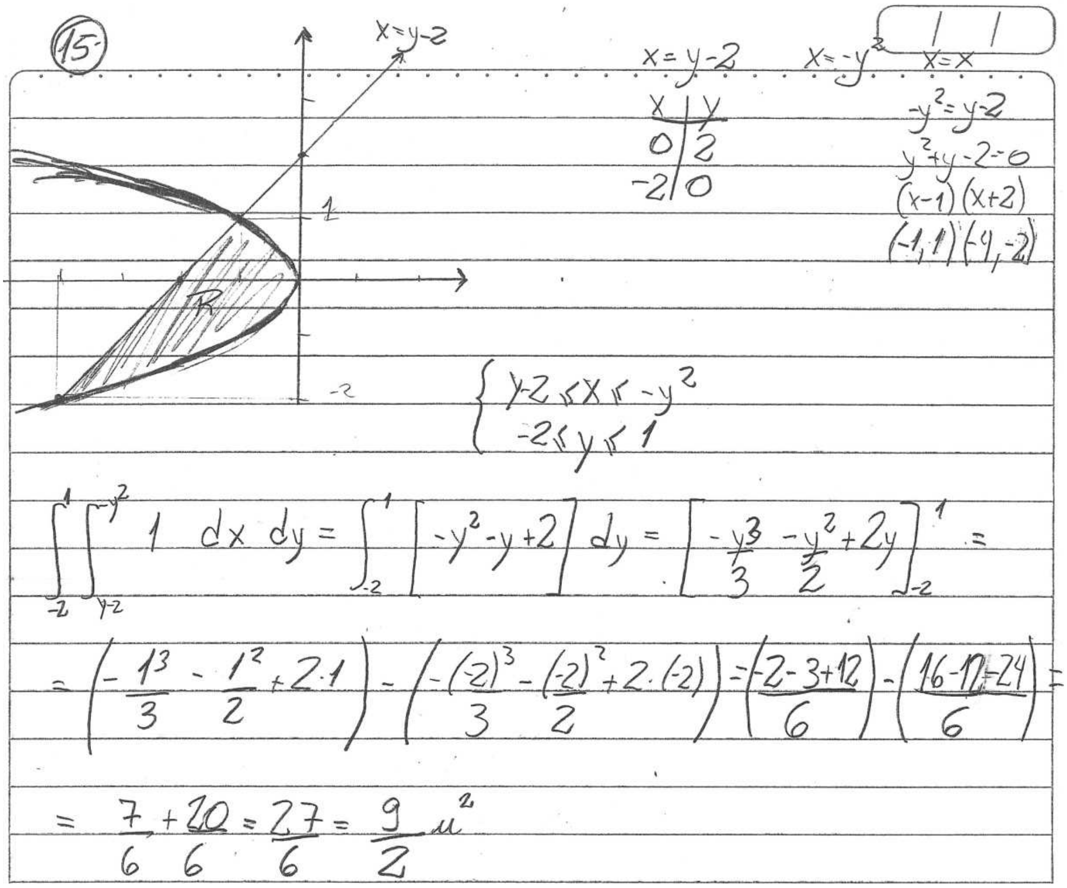
u = 1cm, como por exemplo,

no desenho abaixo



V = 6 cm^3

Como aplicação da ideia contida no problema 14, foi oferecido à classe um problema que pede que se calcule a área por meio de integração dupla. A maior parte dos grupos conseguiu desenvolver a questão 15. Escolhemos uma resolução que apresentamos em seguida.



15

$x = y - 2$ $\quad$ $x = -y^2$ $\quad$ $x = x$

x	y
0	2
-2	0

$-y^2 = y - 2$

$y^2 + y - 2 = 0$

$(x-1)(x+2)$

$(-1,1)(-4,-2)$

$$\begin{cases} y-2 \leq x \leq -y^2 \\ -2 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

$$\int_{-2}^{1}\int_{y-2}^{-y^2} 1 \, dx\, dy = \int_{-2}^{1} \left[-y^2 - y + 2\right] dy = \left[-\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 2y\right]_{-2}^{1} =$$

$$= \left(-\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + 2\cdot 1\right) - \left(-\frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} + 2\cdot(-2)\right) = \left(\frac{-2-3+12}{6}\right) - \left(\frac{16-12-24}{6}\right) =$$

$$= \frac{7}{6} + \frac{20}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}\, u^2$$

O professor-pesquisador solicitou que os grupos entregassem o exercício dessa atividade no mesmo dia. Foram deixados aos alunos problemas adicionais para a aula seguinte. Terminada a atividade, o professor-pesquisador informou que, após a avaliação, o conteúdo de integrais em coordenadas polares e as integrais triplas seriam temas dos próximos encontros, embora não fizessem parte do nosso Projeto.

Visto o trabalho que foi feito na atividade 9 parte 3, onde os alunos trabalharam o cálculo de volume por meio de uma integral dupla, considerando, no problema 9, $z = f(x, y) = x^2$, passando para a atividade 9 parte 4 na questão 15, os alunos perceberam que, ao tomar $f(x, y) = 1$, com a região de integração, a integral dupla foi de certa forma simplificada ao ser comparada com o exercício 9, quando seguidos os seguintes passos:

Passos: 1 – Função unitária de duas variáveis

2 – Região de Integração

3 – Para determinar os extremos de integração precisavam efetuar a intersecção das curvas dadas

4 – Montagem da integral

5 – Cálculo da Integral

Gostaríamos de expor em seguida dois depoimentos e um painel.

O primeiro depoimento é de um de nossos alunos que veio tecer comentários sobre as aulas. Solicitamos que ele fizesse um registro escrito de suas impressões.

O segundo depoimento é da pesquisadora, Maria Lúcia Galvão Leite Travassos, a Malu, que acompanhou nosso projeto.

Em seguida apresentamos um painel de fotos que elaboramos, contendo fotos dos encontros, em cada uma das turmas de engenharia: Computação, Civil, Elétrica 1 e Elétrica 2, onde será possível ver os alunos reunidos em grupos, alunos à lousa conduzindo a Plenária, a presença da pesquisadora Malu junto aos alunos e a nossa presença.

Depoimento do aluno

/ /

Eu chamaria essa abordagem de ensino, de uma abordagem de aprendizado. Estimular o aluno a caminhar com os próprios pés torna a aula muito mais interessante, fazendo com que aos poucos eu me desligue do piloto automático e aprenda realmente como resolver um problema, não apenas limitado aos que já foram vistos e me torno flexível para resolver qualquer problema do assunto, já que entendo desde as bases como tudo funciona.

A aula torna-se divertida, minha visão se torna mais ampla e os desafios alcançáveis. Finalmente aprendi o funcionamento da integral. O professor me apontou o caminho e eu caminhei com meus próprios pés. Agora sei chegar a diversos destinos usando diferentes estradas, o professor não me ensinou, fui eu quem aprendi.

O melhor de tudo é a sensação de recompensa ao conseguir, através de pequenos passos, reinventar o cálculo, conseguir chegar quase que sozinho onde grandes pensadores chegaram no passado. Da até vontade de gritar: "EureKa!".

O fato é que a aula deixou de ser chata e monótona, para se tornar divertida. Não mais fico apenas escutando, agora atuo. É uma pena que isso não é mais amplamente utilizado, ainda estamos muito presos aos padrões conservadores de ensino.

Eu agradeço,

Fábio dos Santos Franco
— Aluno de Cálculo II do
professor Marcos Vinicius

Depoimento da pesquisadora Maria Lúcia Galvão Leite Travassos

Como participante do GTERP fui convidada pelo pesquisador Marcos Vinícius Ribeiro a participar de sua pesquisa, auxiliando-o na aplicação do projeto de pesquisa na Faculdade de Engenharia em que trabalha. Aceitei o convite e acompanhei o professor nas suas aulas.

Com a preocupação de não criar uma situação de inibição, após a apresentação do professor-pesquisador, expliquei para os alunos que estava ali para auxiliar o professor e aproveitaria para, como uma observadora dos trabalhos, registrar os diferentes raciocínios que pudessem aparecer no decorrer das realizações das atividades. O professor-pesquisador solicitou que os alunos formassem grupos, apresentou a primeira atividade e deu início à aplicação do projeto. Nesse momento percebi que alunos não tinham o hábito de trabalhar em grupos. Tiveram certa dificuldade em se organizar. Iniciaram os trabalhos sentados em grupo, mas resolvendo quase que individualmente. Tal postura foi se dissipando no decorrer das atividades

No primeiro encontro observei que um ou outro aluno iniciou o trabalho individualmente, mas, depois de um estímulo do professor, se acomodou em algum grupo. Os grupos se formaram de maneira espontânea com número de alunos variando de três a cinco. Esse fato foi respeitado pelo professor apesar de ter solicitado que o grupo mantivesse o número de quatro participantes.

Nas atividades apresentadas nos dois primeiros encontros, como versavam sobre conteúdo básico de geometria, percebi por parte dos alunos certa pressa em registrar as respostas sem ter o cuidado com a linguagem e os conceitos matemáticos. A importância desse cuidado ficou clara durante a plenária. A linguagem e as definições matemáticas devem ser precisas.

Uma reação apresentada pelos alunos, em diferentes momentos da pesquisa, foi a de recorrer à calculadora mesmo quando a atividade proposta não necessitava de cálculos, como no caso das atividades do 1º e 2º encontros onde muitas respostas eram conceituais e os cálculos envolvidos podiam ser feitos mentalmente. Pareceu-me ser uma atitude mecânica proveniente do conceito de que “resolver problemas é calcular”.

Mesmo nestas atividades mais simples de recordação de conceitos, senti que os alunos se esforçaram para “pensar” nas respostas até por estarem surpresos com questões tão básicas propostas no Ensino Superior. Talvez ali a questão fosse: qual “pegadinha” o professor colocou aqui? ou seja: enfrentaram a situação como um problema.

As atividades desses dois encontros foram preciosas para uma revisão de conceitos, um polimento na linguagem e até como oportunidade de correção ou complementação de conceitos mal formados.

Na atividade 5, foi interessante observar a reação dos alunos que responderam que era possível quadrar o círculo, quando perceberam o erro ao analisar suas respostas durante a plenária.

Foi visível o ótimo relacionamento professor – aluno, o carinho que os alunos lhe dedicavam. Esse bom relacionamento garantiu a participação da classe em todas as propostas. Houve facilidade na exposição de dúvidas, discussão de outras possíveis situações, mas os alunos demonstravam certa inibição para apresentar suas respostas diferenciadas na lousa. Estavam sempre dispostos a relatar oralmente o caminho escolhido. Quando percebiam que essa forma de explicação nem sempre era compreensível para os colegas, então aceitavam o convite e o estímulo do professor para irem à lousa. Essa inibição foi diminuindo no decorrer dos encontros.

Mesmo sendo alunos de curso noturno, que trabalham durante o horário comercial, vários grupos trouxeram demonstrações que pesquisaram fora de aula como exemplo o grupo do aluno Jefferson que demonstrou a rigidez do triângulo; ou o grupo do Gabriel Genari que pesquisou a Fórmula de Heron. Quando o conteúdo abordou Integrais duplas e triplas, espontaneamente alguns alunos trouxeram gráficos feitos no computador que apresentavam, de forma mais nítida, as áreas procuradas nos exercícios. Tal atitude demonstra dedicação, atenção e valorização do trabalho do professor, pois houve comentários de que mesmo na lousa, sem grandes precisões de medidas, o gráfico feito com o capricho do professor estava muito próximo daquele feito no computador.

Um fato que me chamou a atenção ocorreu no encontro em que o professor-pesquisador apresentou para a classe cinco diferentes jogos de quebra-cabeça. Houve um especial interesse e participação apesar de ser um jogo com material manipulativo e frequentemente categorizado como "infantil". Gostaria que as pessoas que erroneamente não fazem uso desse tipo de material em cursos mais avançados vivenciassem um momento desse para perceber o interesse e a necessidade dessa atividade para a formação do conceito envolvido mesmo quando o participante é adulto.

Os alunos aceitaram a proposta, participaram resolvendo as atividades, questionando, sugerindo, mostraram-se envolvidos com a metodologia. Houve a manifestação de dois alunos da turma de Elétrica que, após a aula, vieram conversar com o professor manifestando a opinião que estavam gostando das aulas, mas achavam que elas estavam muito vagarosas. Diziam que se o professor explicasse (penso que de modo mais convencional, dando a solução) o conteúdo andaria mais rápido. Participei da conversa e junto com o professor tentamos explicar que para a devida formação de conceitos e aprendizagem, o aluno tem de passar do papel de mero receptor para o papel de construtor do seu conhecimento. Para que houvesse qualquer construção, seria necessário tempo. Citei como exemplo os encontros iniciais que tratavam de conceitos quase primitivos e que estavam mal formulados. Lembrei então que esses conceitos, se tivessem sido construídos, talvez estivessem mais bem gravados em suas memórias. Os alunos aceitaram as nossas justificativas, não demonstraram esta convencidos, mas não retornaram ao assunto.

Por conta do meu horário consegui acompanhar três das quatro turmas, mas também não consegui fazê-lo seguindo a sequência completa em cada turma. Se assim fosse, com certeza, teria muitas outras observações para fazer.

Também auxiliei o professor na organização dos trabalhos entregues, na elaboração de planilhas de controle das atividades, no registro fotográfico e filmagens de alguns momentos dos encontros.

Agradeço ao professor Marcos Vinicius Ribeiro a possibilidade de, ao participar na pesquisa, ter a convicção de que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas é o caminho para que através de problemas, o professor com o seu saber, sua habilidade e o aluno como co-construtor do seu conhecimento vivenciem a real situação de “ensinar e aprender” em qualquer grau no qual essa situação aconteça.

Turma de Engenharia da Computação







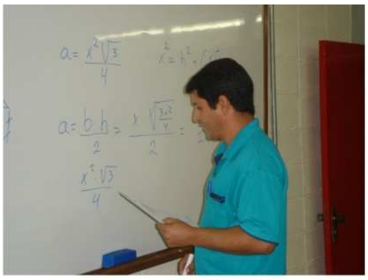








Turma de Engenharia Civil





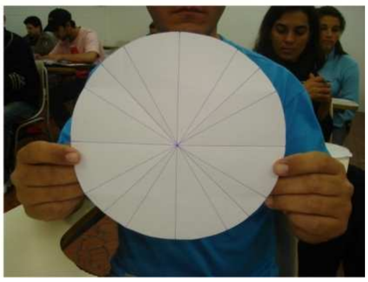




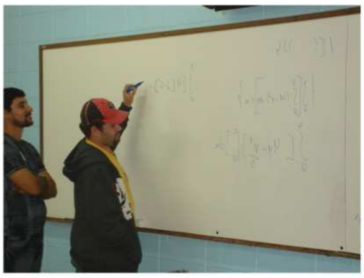








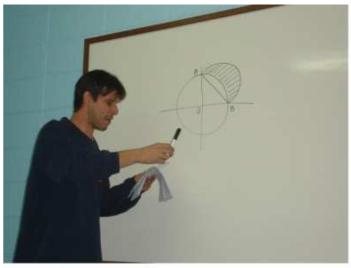
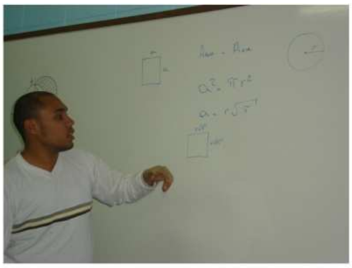
Turma de Engenharia Elétrica 1

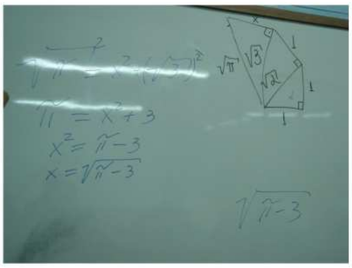





Turma de Engenharia Elétrica 2



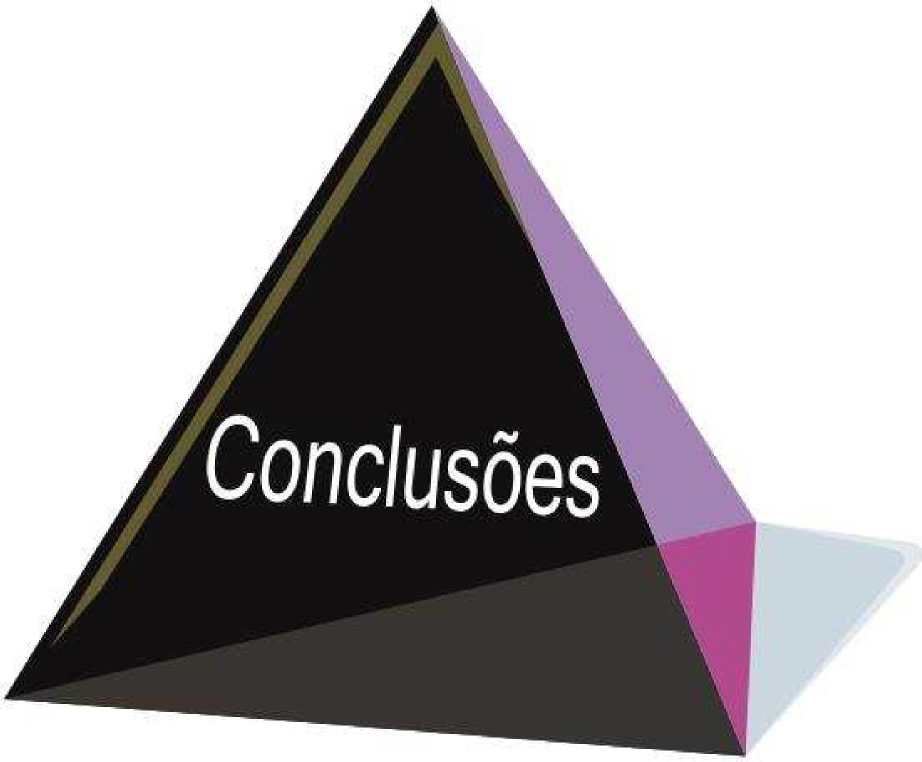




CAPÍTULO 6

EVIDÊNCIAS COLETADAS E PESQUISA TERMINADA

CAPÍTULO 6 – EVIDÊNCIAS COLETADAS E PESQUISA TERMINADA



Introdução – 3º Bloco de Romberg – Atividades 7, 8, 9 e 10

A pesquisa adotada por nós foi sustentada pela Metodologia de Pesquisa de Romberg. Essa metodologia apresenta uma sequência de dez atividades distribuídas em três blocos: o primeiro destinado à identificação do problema da pesquisa; o segundo destinado a selecionar estratégias (o quê?) apropriadas para resolver esse problema e seus correspondentes procedimentos de ação (como?). Com esse bloco, as linhas de trabalho apoiadas num modelo construído (Modelo Modificado) foram responsáveis pela criação das estratégias e dos procedimentos levantados; o terceiro é um bloco que se responsabiliza pela análise do projeto aplicado, identificando o que ficou evidente em relação à pergunta da pesquisa; relatar os resultados; e oferecer esse relatório à comunidade de pesquisa, visando antecipar ações de outros pesquisadores.

Nosso problema de pesquisa ficou definido pela pergunta:

Como se pode construir um projeto de ensino-aprendizagem, destinado a trabalhar Integrais com alunos de um Curso de Engenharia, num ambiente de resolução de problemas, fazendo uso de uma nova metodologia, com recursos à história da matemática e com os alunos, em grupos, num trabalho cooperativo e colaborativo, sendo co-construtores de um conhecimento autogerado?

Nessa pergunta pode-se perceber o envolvimento da História da Integral, da Resolução de Problemas e da ação em Sala de Aula, do professor, dos alunos e do ensino-aprendizagem de integrais.

As circunstâncias estranhas em que se desenvolveu esta pesquisa merecem uma análise. O professor-pesquisador, em 2008, era professor de Cálculo 2, em regime anual, numa Faculdade de Engenharia particular, num curso noturno onde a maioria dos alunos trabalhava.

O projeto do professor-pesquisador visava a trabalhar sobre uma ementa que pedia por Funções de duas ou mais variáveis, Derivadas parciais e direcionais, Integrais múltiplas e aplicações, Sistemas no Espaço não ortogonais, Sequências e Séries, Equações Diferenciais e Integral de Linha.

Esses alunos já haviam cursado Cálculo 1 em regime anual e, portanto, já haviam tido contato com Cálculo Diferencial e Integral para funções de uma variável. Usualmente o contato desses alunos com essa disciplina não lhes dava muita oportunidade de conhecer os importantes conceitos desse ramo da Matemática, pois no primeiro ano de Engenharia foi necessário fazer uma revisão em conteúdos dos Ensino Médio e Fundamental. Assim, o que de Cálculo foi feito lhes deu mais ligação com as técnicas operatórias referentes aos conceitos de Função, Limite, Continuidade, Diferenciação e Integração.

Como professor de Cálculo 2, o professor-pesquisador deveria cumprir a ementa de sua disciplina, trabalhando com funções de duas ou mais variáveis e, no tempo destinado a essa disciplina, queria construir os conceitos relativos àquelas técnicas operatórias trabalhadas no Cálculo 1. Então, resolveu, para seu projeto de pesquisa, fazer apelo à História da Integral, como parte da História da Matemática e da Resolução de Problemas como uma Metodologia de Ensino-Aprendizagem, trabalhando em uma Sala de Aula de uma forma diferente.

Entretanto, com o projeto imaginado e destinado a ser aplicado, houve uma solicitação da disciplina Física, da mesma Faculdade de Engenharia, para que, de início, o professor trabalhasse funções de duas variáveis e suas derivadas parciais. Isso, de certa forma, dificultou a aplicação imediata do projeto planejado, uma vez que, nesse trabalho, recorreu-se novamente a técnicas operatórias, deixando-se o conhecimento conceitual para depois.

Como o Cálculo Diferencial e Integral foi construído a partir da Geometria dos gregos, nosso projeto também quis que os alunos pudessem chegar aos conceitos do Cálculo: Função, Limite, Continuidade, Diferenciabilidade e Integrabilidade, fazendo uma revisão geométrica de áreas de figuras planas e volumes de sólidos. A intenção também para esse tipo de trabalho, fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática *através* da resolução de problemas, era fazer com que os alunos se sentissem participantes na investigação de estratégias e procedimentos que os levassem a encontrar um caminho para a resolução e o correspondente procedimento que lhes desse a solução para o problema proposto.

O projeto pretendia expor as atividades resolvidas pelo professor com a finalidade de perceber se os alunos, durante os encontros, a serem realizados teriam potencial para resolvê-los. A expectativa era que os alunos poderiam ter dificuldade durante a execução do projeto, mas a intenção era dar oportunidade de construirem nova matemática enquanto resolviam problemas.

A impressão que se tem, ao ler as atividades do projeto, é que o professor-pesquisador mostrava uma certa expectativa sobre a qualidade do trabalho a ser apresentado pelos alunos mas, ao mesmo tempo, temia correr um certo risco no desenrolar desse projeto, já que trabalhar o conhecimento conceitual, mais do que "ensinar" técnicas operatórias, fazendo uso de uma metodologia alternativa desconhecida dos alunos, poderia acarretar problemas.

Além disso, uma parte significativa da pesquisa requeria, sempre que possível, que se avaliasse o comportamento frente às atividades dadas e a base de conhecimento dos alunos sobre os conceitos e os conteúdos construídos, durante essa aplicação em sala de aula.

Nessa aplicação, foram coletadas as seguinte evidências.

Apesar da “ousadia” do professor-pesquisador, depois de ter trabalhado com esses alunos derivadas parciais e suas técnicas, de trabalhar com geometria Euclidiana nos Ensinos Médio e Fundamental, ele tinha em mente um objetivo, o de usar uma metodologia de ensino-aprendizagem alternativa, preocupada em mostrar aos alunos que eles eram capazes de “pensar”, “raciocinar”, e “dar sentido” àquela matemática que estavam fazendo. O caminho visto e compreendido pelo professor foi o de, partindo da geometria elementar, progredindo aos poucos para uma geometria demonstrativa, levar os alunos a resolver situações inicialmente fáceis, a acreditar que, buscando na literatura, consultando o professor e discutindo em sala de aula como um participante, ele deixasse de apenas ouvir e copiar a matemática que o professor exibia, para ser um pouco criador daquela matemática que estava sendo construída.

Ficou evidente a diferença entre uma “aula tradicional” e o trabalho com a Metodologia adotada para sala de aula, onde ficou claro para alguns alunos, a não aceitação, ou de uma forte resistência em abandonar o modelo expositivo de aula. Aos poucos, essa resistência foi diminuindo. Os alunos puderam perceber que, com a nova metodologia, passaram a “pensar” bem mais. Mas, a mudança na metodologia de ensino-aprendizagem em sala de aula é difícil, pois os alunos acostumaram-se a essa forma tradicional de ensino desde as séries iniciais.

Na verdade, considerando o número de encontros previstos para o desenvolvimento do projeto, usar quatro desses doze encontros, ou seja, duas semanas inteiras para geometria foi muito tempo mas, como o Cálculo Diferencial e Integral se apoia, desde os gregos, na geometria, isso não nos deixou muito preocupados. Outra coisa interessante de se notar foi o interesse dos alunos ao tomar conhecimento da história da matemática ao longo dos séculos.

Os alunos também mostraram interesse e ficaram entusiasmados em trabalhar de uma forma diferente. A Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas mostrou–se, para a maioria dos alunos, convincente. Outro ponto a destacar nessa metodologia foi o fato de se trabalhar em grupos onde cada aluno, fazendo parte de uma comunidade pensante, podia se mostrar mais atuante na resolução de problemas, levantando suposições, colaborando, trocando e cruzando essas ideias. Enfim, de não se sentir um elemento passivo na sala de aula e de poder agir na construção de um conhecimento com significado e compreensão.

Ficou evidente que, entre todos os alunos, alguns podiam se destacar e, ao se manifestarem, podiam ser ouvidos por seus colegas quando falavam, embora houvesse outros que apenas seguiam o que se dizia, aqueles que apenas copiavam o que se escrevia e aqueles que pareciam, às vezes, perdidos no meio do que era feito.

Uma vantagem era em que o uso da nova metodologia permitia aos alunos um maior interesse e maior envolvimento nos trabalhos gerais e no cumprimento das tarefas, individualmente ou em grupos. A metodologia adotada, como dinâmica de sala de aula, mostrou-se eficiente, integradora, motivadora e capaz de deixar os alunos mais confiantes.

Ficou evidente que a aplicação desse projeto, para o futuro engenheiro, mostrou-se capaz de esclarecer o que significava investigar, e poder submetê-los a novos desafios fazendo com que soubessem tomar decisões e “não fugir” de um problema. Essa evidência foi notada em um certo número de alunos, como pôde ser atestado nos seus trabalhos, nos seus depoimentos e no relato da pesquisadora que nos ajudou nessa aplicação.

Ficaram evidentes alguns momentos desafiadores causados pelos problemas propostos e, também, o prazer, a alegria e a realização de serem capazes de resolvê-los ou de terem conseguido dar solução ao problema.

Inicialmente, a aplicação do projeto parecia estar roubando o tempo destinado ao Cálculo 2. Mas, como os conceitos do Cálculo Diferencial e Integral repetem-se do 1 para o 2, uma vez construídos com uma compreensão e significado das técnicas operatórias, numa nova visão, mostram-se úteis na continuação da disciplina Cálculo 2. É bom repetir que o fato de se ter feito a revisão da geometria com os alunos, fez com que se pudesse levá-los à melhor construção de conceitos de integral dupla, com uma melhor compreensão do conteúdo. Aliado à atitude de espírito investigativo, os alunos puderam dar significado a resolução de uma integral ao esboçar graficamente a região de integração e determinar os seus extremos.

Ficou evidente que, para o professor, houve uma sobrecarga de trabalho ao trabalhar com as quatro turmas de engenharia mas que, por outro lado, houve a oportunidade de mostrar a todos esses 186 alunos, uma metodologia nova e uma nova forma de enfrentar o Cálculo, que quase sempre se apresenta como um vilão no curso de Engenharia. Além disso, hoje o professor-pesquisador reconhece o excesso de problemas oferecidos nas atividades propostas, mas apesar disso, não houve muita reclamação dos alunos a esse respeito. Boa parte dos alunos cumpriu seu dever procurando responder as questões extraclasse deixadas e, algumas vezes, continuando em sala de aula para poderem tirar dúvidas ou apresentar suas estratégias.

Ainda, como uma evidência, pôde-se destacar a falta de percepção dos alunos, por ocasião da aplicação do projeto, em que eles já haviam trabalhado, no Cálculo 1, sobre aqueles conceitos que o professor estava querendo, junto com eles, no Cálculo 2, construir. Ficou evidente que, em classes menores, o desenvolvimento de um projeto poderia ser mais eficiente. Isso é o que todo professor desejaria, um sistema ideal, que praticamente não existe. Entretanto, se uma turma for com alunos mais bem preparados, haverá uma compensação nos resultados obtidos.

No cômputo final, pode-se dizer que esse projeto teve um rendimento satisfatório, no que se refere ao seu objetivo.

No que se refere a nossa fundamentação teórica, podemos dizer que se tornou evidente, no trabalho de pesquisa, a necessidade de um conhecimento não superficial sobre História da Integral para o professor-pesquisador. Esse conhecimento deu segurança para valorizar aos alunos o Cálculo Diferencial e Integral e destacar a importância de como proceder em suas aplicações.

Esse tipo de pesquisa permitiu ao professor-pesquisador mostrar aos alunos o quê? e como? se faz ciência.

No eixo de Resolução de Problemas, o fato de dar início a uma situação problema, antes de se dizer ao aluno o que ele deve fazer ou usar, torna a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas, com sua forma dinâmica de trabalhar em Sala de Aula, uma metodologia nova que oferece a mudança pretendida.

Ficou evidente no trabalho de sala de aula, a responsabilidade de se trabalhar Cálculo Diferencial e Integral com futuros engenheiros, despertando-lhes o interesse por investigação e pesquisa e deixando-os atentos à necessidade dessa matemática em sua vida profissional, caso eles pretendam ser um engenheiros criativos.

Assim, se se quiser engenheiros que trabalhem apenas como tecnólogos, bastam as fórmulas. Entretanto, se quisermos pensar em engenheiros criativos e não apenas seguidores dos projetos de outros, é preciso que o Cálculo Diferencial e Integral seja bem entendido e suas ideias possam ser transferidas a outras situações encontradas em seu trabalho.

Essas evidências todas que pudemos constatar, ao longo da aplicação do projeto, nas Plenárias de participação e discussão, nos trabalhos entregues pelos alunos e nos momentos em que, fora da sala de aula, alguns alunos procuraram continuar discussões de sala de aula, podem atestar que:

- A História da Matemática foi importante, nela os alunos puderam adquirir o conhecimento de como as ideias surgiram, evoluíram e de como fazer a transposição deste conhecimento para as atividades em sala de aula, olhando aos obstáculos e caminhos encontrados durante a evolução do Conceito da Integral, que nada mais é do que o Cálculo Diferencial e Integral como parte da História da Matemática.

- A Resolução de Problemas mostrou-se um caminho eficiente para o trabalho em sala de aula, tanto para o professor quanto para os alunos, na busca pela solução de um problema, por investigar e, na consequente compreensão dos conceitos, agora formulados pelo próprio aluno. Esta metodologia de trabalho permitiu muitas vezes ao aluno colocar-se no lugar dos desbravadores de novos conceitos de Matemática e do Cálculo. Permitiu ao aluno a tensão e o prazer na busca pela certa resposta de um problema, trabalhando com a autoestima.

- Apesar do pouco tempo que tivemos para desenvolver esse projeto, nossa sala de aula, dentro de um ambiente favorável à aprendizagem com compreensão e significado, se apresentou como um local de trabalho colaborativo, onde houve socialização de conhecimentos e espírito de investigação.

Assim, acreditamos que nossa resposta à pergunta feita é que é possível construir-se um projeto de ensino-aprendizagem, destinado a trabalhar Integrais com alunos de um Curso de Engenharia, num ambiente de resolução de problemas, fazendo uso de uma nova metodologia, com recursos à história da matemática e com os alunos, em grupos, num trabalho cooperativo e colaborativo, sendo co-construtores de um conhecimento autogerado.

Nosso trabalho acreditando nessa possibilidade, buscou atender a todas as prerrogativas enunciadas por Van de Walle (2001), quando pudemos dizer que:

- a resolução de problemas coloca o foco da atenção dos estudantes sobre as “ideias” e sobre o “dar sentido” a ela;
- a resolução de problemas desenvolve no estudante a crença de que eles são capazes de fazer matemática e de que ela faz sentido, isto é, aumenta a confiança e a auto-estima dos estudantes;
- a resolução de problemas fornece, ao professor, dados de avaliação que lhe permitem tomar decisões sobre o ensino e ajuda os estudantes a ter sucesso com a aprendizagem;
- os alunos se entusiasmam com o desenvolvimento de sua capacidade de compreensão que experimentam por meio de seu próprio raciocínio.

A nossos alunos, futuros engenheiros, o trabalho com apelos à história, com o recurso da metodologia de ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas em sala de aula, deu-nos a oportunidade de, por meio da aplicação do projeto criado, permitir lhes uma maior participação em todas as resoluções dos problemas propostos, quer individualmente, quer em grupos e mostrar-lhes o que significa investigar, enfrentar novos desafios e "não fugir" diante de uma situação-problema sabendo tomar decisões.

Redigimos nossa Dissertação de Mestrado e a estamos apresentando nesta Defesa esperando que ela possa servir como um trabalho que possa antecipar futuras ações de possíveis leitores e pesquisadores interessados em trabalhar Cálculo Diferencial e Integral com alunos de engenharia na linha que trabalhamos.

REFERÊNCIAS

REFERÊNCIAS

1 Publicações

ALEVATTO, N. S. G. **Associando o Computador à Resolução de Problemas Fechados**: Análise de uma experiência. Rio Claro: UNESP, 2005 (Tese de Doutorado).

ANTON, H. **Cálculo um novo horizonte.** 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2000.

BARON, M. E. e BOS, H.J. Coleção **Curso de História da Matemática, Origens e Desenvolvimento do Cálculo**. 5 v. Tradução de Rudolf Maier. Brasília: Editora UnB, 1985 (Coleção Curso de História da Matemática, Origens e Desenvolvimento do Cálculo).

BOYER, C.B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Blücher, 1974.

BRANCA, N. A. Resolução de Problemas como meta, processo e habilidade básica. In: KRULIK, S.; REYES, R. E. (Org). **A resolução de problemas na matemática escolar**. São Paulo: Atual, 1997.

BRASIL, L. A. S. **Estudo Dirigido de Matemática no Ginásio**. São Paulo: Fundo de Cultura, 1964.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática** - 5ª. a 8ª. séries: Brasília, 1998.

BURTON, D. M. **The History of Mathematics** – an introduction**.** 6.ed. New York: McGraw Hill, 2007.

CAMPBELL, P. F. Characteristics of constructivist instruction. In: **Eighth International Congress on Mathematical Education,** Sevilha, Espanha, 1996 (*Handout*).

CARAÇA, B. de J. **Conceitos Fundamentais da Matemática.** 5.ed. Lisboa: Gradiva, 2003.

CONTRERAS, L.C.; CARRILLO, J. Diversas concepciones sobre resolución de problemas en el aula*.* **Educación Matemática**, v.10, n.1, 26-37, 1998.

COOLIDGE, J. L. **A History of Geometrical Methods.** England, Wotton-under-Edge, Oxford At The Clarendon Press, 1940.

CURY, H. N. et al. **História e Tecnologia no Ensino da Matemática**, v.2. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008.

D'AMBROSIO, U. Prefácio. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

______. **Educação Matemática: da Teoria à Prática.** Campinas: Papirus, 1996.

D'AMORE, B. **Elementos de Didática da Matemática.** Tradução de Maria Cristina Bonami Baruli. São Paulo: Escrituras, 2007.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Tradução de Higyno H. Domingues. Campinas: Unicamp, 2004.

FERREIRA. A. B. H. **Novo Dicionário Aurélio da Língua Portuguesa.** 2.ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1986.

FISCHER, R. In: RESTIVO, S.; VAN BENDEGEM, J. P.; FISCHER, R. (eds). **Math Worlds** - Philosophical and Social Studies of Mathematics and Mathematics Education. New York, State University of New York Press, 1993.

FROTA, M. C. R.; NASSER, L. Formação de Professores – Mudanças na Licenciatura em Matemática. In: _____ **Educação Matemática no Ensino Superior** – Pesquisas e debates. Recife: SBEM, 2009.

GASPAR, M. T. de J. **Aspectos do Desenvolvimento do Pensamento Geométrico em algumas Civilizações e Povos e a Formação de Professores**. Rio Claro: Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2003 (Tese de Doutorado em Educação Matemática).

GRAEBER, A. O.; JOHNSON, M. L. **Insights into secondary students' understanding of mathematics**. Universidade Maryland, College Park, National Science, 1990.

GUIDORIZZI H. L. **Um Curso de Cálculo**, v.1. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

GUNN, B.; PEET, T. E. Four Geometrical Problems from the Moscow Mathematical Papyrus. **Journal of Egyptian Archaeology**, v. XV, 9, 1929.

HOBSON, E. W. **Squaring the Circle and other Monographs**. Chelsea Publishing Company, 1953

HOUAISS, A.; VILLAR, M. S. **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa.** Rio de Janeiro: Objetiva, 2001.

KILPATRICK, J. The reasonable ineffectiveness of research in mathematics education. **For the Learning of Mathematics**, v.2,n.2, 22-28,1981.

KRULIK, S.; REYS, R. (Org.). **A resolução de problemas na Matemática escolar**. Tradução de Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1998.

LAKATOS, I. Falsification and the methodology of scientific research programs. In LAKATOS, I.;. MUSGRAVE, A. (Eds.), **Criticism and the growth of knowledge** Cambridge, England: Cambridge University Press, 1976.

LAUDARES, J. B.; LACHINI, J. (Org.). **Educação Matemática**: a Prática educativa sob o olhar de professores de cálculo. São Paulo: Fumart, 2001.

LINTZ, R.G. **História da Matemática**, v.1. Campinas: Unicamp, 2007 (Coleção CLE, 45v).

MASETTO, M (Org). **Docência Universitária**. Campinas: Papirus, 1998.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston: NCTM, 2000.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **An Agenda for Action.** Reston: NCTM, 1980.

NOBRE, S. R. **Elementos historiográficos da matemática presentes em enciclopédias universais**. Rio Claro, UNESP, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2000 (Tese de Livre Docência em Geociências).

NODDINGS, N. Preparing Teachers to Teach Mathematical Problem Solving. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Ed.). **The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving.** Virginia: Laurence Erlbaum Associates, 1989.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática.** São Paulo: UNESP, 1999.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. **Trabalhando Volume de Cilindros através da Resolução de Problemas**, 2009 (mimeo).

______. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org). **Educação Matemática** - pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004.

ONUCHIC, L. R. Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). Rio Claro: UNESP, 1999

PLATT, J. Strong inference. **Science**, v.146, n. 3642, 347-352, 1964.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 2. ed, 1994.

POLYA, G. **How to Solve It** - A new aspect of mathematical method. Princeton: Princeton University Press, 1945.

POLYA, G. **Mathematical Discovery** – On understanding, Learning and Teaching Problem Solving, v.1 (1962) e v.2 (1964). New York, Wiley.

POLYA, G. On Learning, Teaching and Learning Teaching. Tradução de Mosquito et al. In: POLYA, G. **Mathematical Discovery**, cap XIV, 1962. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/polya/index.htm> Acesso em: 15 de agosto de 2008.

PONTE, J. P. et al. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula.** São Paulo: Autêntica, 2003 (Coleção Tendências em Educação Matemática).

PONTE, J. P. Mathematics teachers' professional knowledge, v.1. In: Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 18, Lisboa, 1994.

RODRIGUES, V. **O Reflexo do Trabalho desenvolvido com professores no trabalho desses professores com seus alunos em suas salas de aula.** Rio Claro: UNESP, Instituto de Geociencias e Ciências Exatas, 2007 (Texto para Qualificação em Doutorado em Educação Matemática).

ROMBERG, T.A. Perspectivas sobre o Conhecimento e Métodos de Pesquisa. Tradução de ONUCHIC, L.; BOERO, M.L. In: **Boletim de Educação Matemática (BOLEMA)**. Rio Claro: UNESP, n. 27, 93-139, 2007.

______. Perspectives on scholarship and research methods. In: GROUWS, D. A. **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. New York: Macmillan Publishing and Company, 1992.

RUDNICK, S. e KRULIK J. A. **Problem-Driven Math – Applying the Mathematics Beyond Solutions**. Chicago: McGraw Hill- Wright Group, 2005.

SANTOS, A. R. **Metodologia científica** - a construção do conhecimento. 7. ed. Rio de Janeiro: Lamparina, 2007.

SANTOS, M. C. Algumas concepções sobre o ensino-aprendizagem de matemática. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo. v.9, n.12, 11-15, 2002.

SCHOENFELD, A. H. Problem Solving in Context. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Ed.) **The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving.** Virginia: Laurence Erlbaum Associates, 1989.

SCHROEDER, T.L.; LESTER Jr., F. K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In TRAFTON, P.R.; SHULTLE, A. P. (Ed.) **New Directions for Elementary School Mathematics**. Reston: NCTM, 31-42, 1989 (Year Book).

SHULMAN, L. S. Disciplines of inquiry in education: An overview. In: JAEGER, R. M. (ed.). **Complementary methods for research in education,** Washington-DC: American Educational Research Association, 3-20, 1988.

SIMMONS, G. F. **Cálculo com Geometria Analítica**, v. 1 e 2. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.

SINGH, S. **O Último Teorema de Fermat**. Rio de Janeiro: Record, 1999.

STEWART, J. **Cálculo**. 4.ed. São Paulo: Pioneira Thomsom Learning, 2001.

TENBRUCK, F.H. *apud* FISCHER, R. In: VAN BENDEGEM, J.P.; RESTIVO, S.; FISCHER (ED). **Math Worlds: Philosophical and Social Studies of Mathematics and Mathematics Education** (Suny Series in Science, Technology, and Society). State University of New York, Albany, 1993.

THOMAS, George. B. **Cálculo.** 10. ed., v. 1 e 2. São Paulo: Addison Wesley, 2002.

THOMPSON, A. G. Learning to Teach Mathematical Problem Solving: Changes in Teachers' Conceptions and Beliefs. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (ed.). **The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving.** Virginia: Laurence Erlbaum Associates, 1989.

VAN DE WALLE, J. A. Teaching Through Problem Solving. In ____ **Elementary and Middle School Mathematics**. New York, Longman, 2001.

VAN DE WALLE, J. A.; LOVIN, L. H. **Teaching Student-Centered Mathematics grades 5-8**, v. 3. Pearson, 2006.

WAGNER, D. R. We Have a Problem Here: 5 + 20 = 45*.* **Mathematics Teacher,** Reston, v. 96, n. 9, 612-616, 2003.

2 Sites Consultados

http://cwx.prenhall.com/bookbind/pubbooks/thomas_br/chapter1/medialib/custom3/bios.htm. Acesso em 6 jan.2009.

http://en.wikipedia.org/wiki/Ferdinand_von_Lindemann. Acesso em: 2 out.2007.

http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES1362.pdf. Acesso em: 30 jul.2009.

http://pt.wikipedia.org/wiki/Quadratura_do_c%C3%ADrculo. Acesso em: 12 abr.2008.

ANEXO

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

unesp

IGCE Rio Claro

Programas de Pós-Graduação

Campus de Rio Claro

Instituto de Geociências e Ciências Exatas (IGCE)

Solicitação

Venho por meio deste solicitar à Vossa Senhoria a PERMISSÃO para coletar dados para a minha pesquisa de Mestrado no contexto da formação de professores, a qual será realizada junto ao programa de Pós-Graduação em Educação Matemática do IGCE de Rio Claro.

Para tal, utilizarei o seguinte procedimento metodológico: filmagem das aulas. Estas imagens serão usadas em caráter científico.

Assim, se estiver de acordo, queira assinar o presente documento.

Assinatura do pesquisador
Marcos Vinícius Ribeiro

Lourdes de la Rosa Onuchic

Assinatura da orientadora
Profª Drª Lourdes de La Rosa Onuchic

	Matrícula	CIVIL turma 128 NOME	Assinatura
1	70093	ALEXANDRE BATISTA VAINI	Alexandre B. Vaini
2	60473	BENEDITO MAURICIO LAUREANO	Benedito Maurício Laureano
3	70104	BRUNA FAGUNDES DE BARROS	Bruna Fagundes de Barros
4	70601	DANIEL ADRIANO DE BARROS	Daniel A. Barros
5	70164	DANIEL MIRANDA	Daniel Miranda
6	70166	DEBORA DA CRUZ	Debora da Cruz
7	60283	DIEGO SMAILE	Diego Smaile
8	70175	EDUARDO OLIVEIRA CORTEZ	
9	70177	EVERTON EDUARDO NASCIMENTO	Everton E. Nascimento
10	70089	FABIO EIDI DE FREITAS IWAMOTO	
11	60152	FABIO MOSCA	
12	70047	FELIPE ALVES DE ANDRADE	Felipe Alves de Andrade
13	80831	FLAVIO UTIDA DE MORAIS JUNIOR	
14	50703	FRANCINE GARBIM	
15	70794	GILIANE DE JESUS A. NASCIMENTO	
16	60133	IGOR ALEXANDRE GARCIA CASANOVA	Igor Alexandre G. Casan.
17	60315	JOAO ANTONIO GARCIA DA MOTA	
18	50135	JOÃO HENRIQUE DE OLIVEIRA	
19	70204	JOSE ROBERTO A.DE ANDRADE	
20	70216	LUCIANO FERREIRA SANTOS	Luciano Ferreira Santos
21	70229	MARIA DE FÁTIMA LIMA DE MELO	
22	60755	MARINA BALIE CARDOSO DA SILVA	
23	60266	MARLENE YUNG DOS PASSOS	Marlene
24	70233	MÔNICA TEIXEIRA DA SILVA	Mônica T. da Silva
25	70234	MURILO GARCIA	
26	80958	RAFAEL AMERICO SIQUEIRA	Rafael A. Siqueira
27	70249	RAFAELA FLORENCIO DA SILVA	
28	70653	REGINALDO BRAZ	Reginaldo Braz
29	60492	RICARDO EIJI YOSHIDA	
30	40175	ROBERTO DE CASTRO	
31	70769	RODINEI GOMES DE ALMEIDA	Rodinei G. Almeida
32	70655	RODOLFO FRANCISCHINELLI A. LEITE	Rodolfo F. A. L.
33	70131	ROSELAINE CORRÊA	Roselaine Corrêa
34	60131	THAIS TARABORELLI	
35	60757	THIAGO SILVA AUGUSTO	Thiago Silva Augusto
36	70782	TIAGO QUEIRÓZ LEITE	Tiago Queiróz Leite
37	70261	VICTOR HUGO FERNANDES CAMARGO	Victor Hugo F. Camargo
38	60216	VILES HENRIQUE WERNEK	VILES HENRIQUE WERNEK
39	70263	VLADEMIR RODRIGUES FONTOLAN	
40	70090	WEIDER LUIZ MOREIRA	

	Matrícula	ELÉTRICA A Turma 130 NOME	Assinatura
41	70498	ADRIANO TADEU FOGAÇA DA SILVA	Adriano Fogaço
42	70306	ALAN PEROZZO LOLI	Alan Perozzo Loli
43	70314	ANDRE LUIS MORAES LAPERUTTA	André Luis Moraes Laperutta
44	70269	ANDREZA MORAES LEITE	Andreza Moraes Leite
45	70315	ANIBAL FRANCISCO PONCIANO	
46	70450	ARTUR LEONARDO MARUM MAROZI	
47	70828	BENEDITO FERREIRA LEÃO JUNIOR	

48	70271	BENJAMIN OLIVEIRA SILVA NETO	Benjamin Oliveira Silva neto
49	70317	BRENO ANTONIO R. DE ABREU JUNIOR	Breno Abreu Jr.
50	70322	CHRISTIANO DE OLIVEIRA CAMARGO	[illegible]
51	70325	CLAUDIO ROBERTO CIRINO	Claudio Roberto Cirino
52	70275	CRISTIANE LEONARDO DE BARROS	Cristiane Leonardo de Barros
53	70328	DANIEL CAMPOS PEREIRA	Daniel Campos Pereira
54	70329	DANILO FRANCISCO SIQUEIRA	DANILO FRANCISCO SIQUEIRA
55	50740	DANILO MORENO LIND	Danilo Moreno Lind
56	70826	DIEGO DOMINGOS MAGALHAES	DIEGO DOMINGOS MAGALHAES
57	70797	DIONE HENRIQUE M.MONTENEGRO	Dione H. mendes Montenegro
58	60123	EMERSON ROBSON ALMEIDA	
59	70339	ERICK TERUHIKO KATAYAMA	Erick T. Katayama
60	70340	EVANDRO ODORICO FIGUEIREDO	Evandro O. Figueiredo
61	70711	FABIO AUGUSTO MARESTONI	Fabio A. Marestoni
62	70350	FELIPE JUNIOR BIAZIN	Felipe Junior Biazin
63	70351	FELIPE PEREIRA DA SILVA	Felipe Pereira da Silva
64	70360	GILBERTO DOS SANTOS	Gilberto dos Santos
65	70619	GISELLI FRANÇA PYAIA	
66	60669	HELDER DO CARMO COSTA	
67	70727	JEFERSON FERNANDES DE MATTOS	Jeferson F. de mattos
68	70728	JOANA CÉLIA ROLIM GRANGEIRO	Joana Célia Rolim Grangeiro
69	70373	JOSE ROBERTO PESSOTTI JUNIOR	José Roberto Pessotti Jr.
70	60666	LARISSA LUCAS BITTENCOURT DE FARIA	
71	70376	LEANDRO CÉSAR FERREIRA C.DE LIMA	Leandro César F. Costa Lima
72	70379	LEANDRO PEGORELLI ANTUNES	Marcio Alexandre
73	70388	MARCIO ALEXANDRE DE SOUZA	
74	70397	MARIA JOSÉ DE MOURA	Maria Moura
75	80774	MARIO EDUARDO SERRA	MARIO SERRA
76	70753	PAULO RICARDO DA SILVA	Paulo R. da Silva
77	70293	RAFAEL ROCHA MOISES	Rafael Rocha Moises
78	70412	RAFAEL VILLELA	Rafael Villela
79	70413	RAPHAEL F. CORRALES NETO	Raphael Fernandes Neto
80	70414	RAPHAEL PIZZOL PERILLO	Raphael Pizzol Perillo
81	70416	RENAN APARECIDO LUCIANO	[illegible]
82	81404	RINALDO CESAR GRACIANO	
83	70422	RODRIGO LUIS COSTA	Rodrigo Luis Costa
84	70425	RODRIGO VIÇO DE OLIVEIRA	
85	70426	ROGÉRIO FREITAS SILVA	ROGÉRIO FREITAS SILVA
86	70662	SAMUEL ANTONIO DE OLIVEIRA SILVA	Samuel Antonio [illegible]
87	70566	SERGIO LUIZ GOBBO JUNIOR	[illegible]
88	60358	TIMOTEO MARQUES ROSA OLIVEIRA	Timoteo M. R. Oliveira
89	60155	VALTER ROSA MATURANO FILHO	
90	70435	VITOR AUGUSTO M. DE BARROS SILVA	Vitor Augusto M. B. Silva
91	70574	WALLON MESSEAS COSTA DE BRITTO	Wallon M. C. Britto
92	70441	WILLIAM FRANCISCO FERREIRA NUNES	[illegible]
		ELÉTRICA B Turma 131	
	Matrícula	***NOME***	***Assinatura***
93	70303	ADRIANO ALVES DE ANDRADE	
94	70305	ALAM ANTUNES DE SOUZA	Souza.
95	50154	ALESSANDRO RODRIGO JACINTO	
96	70311	ALEXANDRE RODRIGUES	
97	81439	CICERO BENEDITO DE CAMARGO	

98	70323	CLAUDIMAR NEVES DE SANTANA	
99	70829	CLAUDIO MASSAYUKI YAMAMOTO	
100	70327	CRISTIANO NUNES MIRANDA	
101	70278	DUILIO DOMINGOS SCUDELLER	
102	70832	ELI PINTO DE MORAES JUNIOR	
103	70342	EVERTON POPPES LOPES	
104	70343	FABIO ALEX DA SILVA	
105	70808	FABIO CESAR BENTO DE CAMARGO	
106	50184	FELIPE AUGUSTO MARTINS	
107	70465	FELIPE MEDEIROS CUNHA	
108	81440	GUILHERME PAOLOZZI HERNANDES	
109	60441	HEBER ADRIANO NEGRETE	
110	70365	JEFERSON FERREIRA PATRIARCA	
111	70838	LEANDRO PISTILA FUJIMOTO	
112	60405	LUCIANO APARECIDO VIEIRA	
113	70383	LUIS ALEXANDRE DE ALMEIDA	
114	70396	MARCOS VINICIUS DA CRUZ MACEDO	
115	70747	MARCOS YOSHIMASSA MURAKAMI	
116	70749	MORENO JOSE DIAS P.DE OLIVEIRA	
117	70400	NILSON EDUARDO DA SILVA	
118	70405	PAULO ALBERTO BELLAZ PLATE	
119	60523	PAULO RICARDO MANOEL DE FRANÇA	Paulo Ricardo Manoel de França
120	60139	PAULO ROGERIO ALEIXO COLI	
121	70407	PEDRO JAROCHINSKI S. G.LOUREIRO	
122	70415	RAUL RAMOS	
123	70420	RODOLFO RODRIGO ARAUJO MATOS	
124	70421	RODRIGO APARECIDO PROENÇA	
125	70298	ROGERIO LENCIONI DA ROSA JUNIOR	
126	70300	THIAGO RAMPIM DE MARCOS	
127	70845	TIAGO DA SILVA MARCOLINO	
128	60100	TIAGO FERNANDES	
129	70846	ULISSES MELO MAURO	Ulisses Melo Mauro.
130	70438	WAGNER ANTONIO DOS SANTOS	
		COMPUTAÇÃO Turma 132	
	Matricula	**NOME**	***Assinatura***
131	50405	ADRIANO DE OLIVEIRA BUGLIA	
132	70312	ALEXANDRO DA SILVA	
133	70499	ALLAN CLARO DA ROSA	Allan C Rosa
134	70448	ANDRE BREDA CARNEIRO	André Breda Carneiro
135	20505	BRUNO RIBEIRO DA SILVA	
136	70504	BRUNO RODRIGUES DOS SANTOS SILVA	Bruno Rodrigues dos S. Silva
137	70505	BRUNO TAGLIAFERRO GRUPP	
138	60340	CAIO STUCHI FERREIRA	Caio Stuchi Ferreira
139	70507	CAIO TELLES DA SILVEIRA	Caio Telles da Silveira.
140	70509	CARLOS ALBERTO VASCONCELOS	Carlos A Vasconcelos
141	60120	CARLOS EDUARDO G.DOS SANTOS	
142	70455	CARLOS VINICIUS ALVES	Carlos V Alves
143	70699	CELIO TERUO KANEKIYO	Celio Teruo Kanekiyo
144	70512	CRISTIANO MACIEL DOS REIS	Cristiano Maciel dos Reis
145	70513	DANILO DA SILVA CASTRO	
146	70515	DANYLO ABDALLA CASTRO SILVA	
147	70516	DIEGO BELLANO PAULO	Diego Bellano

148	70517	DIEGO RIBEIRO HOBOLD	Diego R Hobold
149	70519	DOUGLAS GIMENEZ REBOLLA	Douglas Gimenez Rebolla
150	70460	EDUARDO FONSECA ESPERIDIÃO SILVA	[illegible]
151	70521	EDUARDO LOPES PEREIRA NETO	Eduardo L P Neto
152	70462	EMERSON FREITAS CARDOSO	Emerson Freitas Cardoso
153	70526	EVERTON BARBOSA ARAUJO	Everton Barbosa Araujo
154	60660	FABIO CAMARA ZANARDO	
155	70463	FABIO DOS SANTOS FRANCO	
156	70529	FABRICIO LAZARO J.SOARES DE CAMPOS	
157	60721	FABRICIO PERIGO	
158	70530	FERNANDO CESAR DA SILVA	Fernando Cesar da Silva
159	60116	FERNANDO HENRIQUE S. DE ALMEIDA	FERNANDO H.S Almeida
160	50440	FERNANDO MARTINS GATERA	FERNANDO MARTINS GATERA
161	70833	FILIPE AUGUSTO LAZARO	Filipe Augusto
162	50739	FILIPE SANTUCCI DUARTE	
163	60276	FRANCISCO MOREIRA FARRAPO NETO	
164	70532	GABRIEL GENARI	Gabriel Genari
165	70533	GUILHERME DA SILVA CORREIA	[illegible]
166	70535	HOLF SOARES ARAUJO	Holf
167	50268	IVAN KASTORSKY DE SOUZA	Ivan Kastorsky de Souza
168	50271	JEFERSON JESUS PLENS PEREIRA	Jeferson Jesus Plens Pereira
169	81457	JOAO CORREA	João Corrêa
170	70471	JÔNATAS LUIZ DE OLIVEIRA	Jônatas Luiz de Oliveira
171	70538	JONATHAN CAMARGO RODRIGUES	Jonathan C. Rodrigues
172	60141	KAUE VINICIUS GOMES BALTHAZAR	
173	50744	LEANDRO CARLINI MINGORANCE	
174	70740	LUIZ ALBERTO GOMES MUNHOZ JUNIOR	Luiz Alberto Gomes Munhoz Junior
175	70545	MARCELE MONIQUE RODRIGUES ASSAF	[illegible]
176	70546	MARCELO HENRIQUE DE OLIVEIRA	Marcelo H. Oliveira
177	70549	MURILLO SALA	Murillo Sala
178	70552	PAULO ROBSON ALLONSO	Paulo R. Allonso
179	50337	RENAN RODRIGUES DA SILVA	[illegible]
180	70251	RICARDO JOSÉ PETROCCHI CARVALHO	[illegible] Carvalho
181	70560	RODRIGO APARECIDO DOS SANTOS	Rodrigo Ap. dos Santos
182	60205	SERGIO COSTA JUNIOR	[illegible]
183	50718	TADEU RUSSO SIQUEIRA	[illegible]
184	50149	THIAGO ANDRIES	
185	60741	THIAGO DIAS DOS SANTOS	[illegible]
186	70569	TIAGO BRENNECKE	[illegible]
187	70040	VALDIR CAMILO VIEIRA JUNIOR	
188	70572	VALMIR RIBEIRO DA CUNHA	Valmir Ribeiro da Cunha.
189	70847	VANIA GOMES MEDEIROS	Vania G. de Medeiros
190	40299	WILDENISSON FRANCO DE QUEIRÓZ	[illegible]
191	70577	WILLIAM KENITI MATSUO VENANCIO	William K. M. Venancio
192	70476	Lucas Amaral Lopes RA 70476	Lucas Amaral Lopes