UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA

ESTUDO HISTÓRICO E PEDAGÓGICO SOBRE TERNOS PITAGÓRICOS À LUZ DE EUGÈNE BAHIER

GEORGIANE AMORIM SILVA

NATAL
2009

GEORGIANE AMORIM SILVA

ESTUDO HISTÓRICO E PEDAGÓGICO SOBRE TERNOS PITAGÓRICOS À LUZ DE EUGÈNE BAHIER

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como requisito parcial a obtenção do título de mestre.

Orientador: Dr. John Andrew Fossa.

NATAL

2009

Divisão de Serviços Técnicos
Catalogação da Publicação na Fonte. UFRN / Biblioteca Central Zila Mamede

Silva, Georgiane Amorim.
Estudo histórico e pedagógico sobre ternos pitagóricos à luz de Eugène Bahier / Georgiane Amorim Silva. – Natal, RN, 2009.
115 f.

Orientador: John Andrew Fossa.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Exatas e da Terra. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática.

1. Ternos pitagóricos – Dissertação. 2. Teorema de Pitágoras – Dissertação. 3. Matemática – História – Dissertação. 4. Bahier, Eugène – Dissertação. I. Fossa, John Andrew. II. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. III. Título.

GEORGIANE AMORIM SILVA

ESTUDO HISTÓRICO E PEDAGÓGICO SOBRE TERNOS PITAGÓRICOS À LUZ DE EUGÈNE BAHIER

BANCA EXAMINADORA

Dr. John Andrew Fossa (UFRN) – Orientador

Dr. Rômulo Marinho do Rêgo (externo)

Dr. Iran Abreu Mendes (UFRN)

Dra. Bernadete Barbosa Morey (UFRN) - Suplente

Aprovada em: / / 2009

DEDICATÓRIA

Este trabalho é dedicado a minha avó Miriam e às minhas sobrinhas Melissa e Emily.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me acompanhado sempre.

A minha avó Miriam pela grande contribuição em minha formação espiritual, pessoal e acadêmica.

As pessoas que mesmo geograficamente distante através do amor dedicado por mim sempre estiveram perto: meus pais, minhas irmãs Georgia e Gildeane e minha tia Marleide.

A minhas sobrinhas Emily e Melissa por cada "te amo" que ouvi por telefone.

Ao meu amigo Lluís que apesar de ter um oceano nos separando foi a pessoa que mais esteve comigo, ouvindo, aconselhando e acima de tudo me amando. A ele agradeço a amizade e o amor que, gentilmente me foi e é dedicado. ¡Muchas gracias!

À Ana, Renata, Bianca e Paulinho pela agradável amizade que pude desfrutar em Natal.

A Jozirene e Sandra Paris pela amizade e admiração.

Ao amigo e professor João Paulo Attie por ter me apresentado à Educação Matemática.

A Fossa, meu orientador, fica meu eterno agradecimento, pela confiança e pela disposição em sempre se importar se seus orientandos estão bem.

A amiga Márcia Alves pela amizade prestada na reta final, a quem devo meu eterno agradecimento.

Aos colegas e amigos da Matemática, da Física e da Biologia do PPGECNM. Em especial meu grande amigo Sidney.

A Iguara e Daniel pela disposição em ajudar.

Aos professores Dra. Bernadete Morey e Dr. Iran Abreu, pelas contribuições prestadas no Exame de Qualificação.

A Liliane Gutierre e Conceição Bezerra pela colaboração.

Aos alunos da Licenciatura em Matemática que fizeram parte dessa investigação.

“Eu aprendi a ler e escrever. Já sei somar a alegria e prazer. Sei diminuir tristeza e multiplicar a paz. Mas o mais importante que eu aprendi, foi dividir o amor”.

(Tia Cecéu)

RESUMO

O presente trabalho apresenta uma análise descritiva, histórica e pedagógica da obra *Recherche méthodique et propriétés des triangles rectangles en nombres entiers*. De acordo com a análise realizada, elaboramos e aplicamos o módulo de ensino intitulado Ternos Pitagóricos: uma ferramenta para compreensão do Teorema de Pitágoras, tendo como público alvo os alunos do curso de Licenciatura em Matemática, da UFRN, futuros professores de Matemática. A análise dos dados coletados da prova escrita, de modo geral mostrou que os alunos assimilaram com relativa compreensão os conceitos abordados no módulo de ensino, apontando para uma diferença qualitativa na aprendizagem com relação aos dados obtidos nos primeiros instrumentos utilizados, a saber: questionário e entrevista. Com o módulo de ensino realizado, proporcionamos aos futuros professores, uma maior compreensão do Teorema de Pitágoras, tendo como enfoque os Ternos Pitagóricos sob uma apresentação histórica, constantando o potencial pedagógico da obra em foco.

Palavras-chave: Ternos Pitagóricos, Teorema de Pitágoras e História da Matemática.

ABSTRACT

At the present investigation had the purpose to achieve a descritive analysis pedagogy in the work of *Recherche méthodique et propriétés des triangles rectangles en nombres entiers*. According to the analysis achieved, we made and applyed the teaching module called Pitagories: one of tools to comprehension Pitagory Theorema, there were studying by public students in mathematic course in the UFRN , the new mathematic teachers in future. The analysis the was made with writen test the was showed that all students got the view comprehension in the teaching approach module, to apointed the difference in the learning qualytative with other reseach that was made with quastionaire and enterview. With this module that was made with the new future teacheres there was more attention the better comprehension with the Pitagory Theorema, that was good focus in the pitagory about the potential historical pedagogyc in the work studied.

KEY-WORDS: Ternos Pitagóricos, Pitagory Theorema and History of the Mathematics.

LISTA DE QUADROS E FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Na presente investigação focalizamos os Ternos Pitagóricos e a Formação Inicial de professores, tendo como referenciais a própria História da Matemática e em especial a obra *Recherche méthodique et propriétés des triangles rectangles en nombres entiers*, de Eugène Bahier (1916), em que o conceito é estudado de forma sistemática. Realizamos uma análise descritiva, histórica e pedagógica da referida obra, a qual nos proporcionou a possibilidade de reformular o problema, em termos funcionais, para os futuros professores, através da elaboração e aplicação de um módulo de ensino, ministrado na disciplina Teoria dos Números (UFRN), tendo como público alvo os alunos do curso de Licenciatura em Matemática, futuros professores de Matemática. Por fim, analisamos a eficácia pedagógica do módulo de ensino.

Consideramos que para responder adequadamente aos diversos desafios que serão levantados no decorrer da sua prática docente, o futuro professor necessita de um conhecimento mais amplo, ou seja, necessita de um maior aprofundamento do que tem de ensinar. Com isso, o módulo de ensino que elaboramos, é de extrema relevância para auxiliar os futuros professores, na medida em que buscamos oferecer, uma prática que possibilite a reflexão da utilização dos Ternos Pitagóricos como uma ferramenta pedagógica no ensino do Teorema de Pitágoras. Acreditamos que essa pesquisa contribuirá de maneira significativa para que futuros e atuais professores de Matemática compreendam melhor a relação histórica entre os Ternos Pitagóricos e o Teorema de Pitágoras e o potencial pedagógico presente nessa relação.

Em relação à estrutura textual, no capítulo introdutório apresentamos nossa questão de estudo, bem como sua relevância para a Educação Matemática e a metodologia de pesquisa utilizada. O capítulo II destinamos a apresentação dos pressupostos teóricos que norteiam nossa investigação.

Por sua vez, no capítulo III descrevemos nossa intervenção pedagógica, apresentando os métodos utilizados antes e no decorrer do módulo de ensino, incluindo a análise dos dados. Por fim, apresentamos no capítulo IV, nossas inferências quanto à eficácia do módulo de ensino e algumas considerações que possam subsidiar o trabalho de outros profissionais da área.

1.1 Justificativa

Um dos conceitos mais importantes da Matemática e da Física é o de distância. O que embasa a noção de distância na métrica usual é o Teorema de Pitágoras. Os Parâmetros

Curriculares Nacionais (Brasil, 1998), no item Espaço e Forma, apontam a necessidade de verificações experimentais, aplicações e demonstração do Teorema de Pitágoras.

Entretanto, várias pesquisas explicitam a deficiência existente no ensino do Teorema de Pitágoras. Almouloud e Bastian (2003) enfatizam a grande dificuldade dos alunos no que se refere à aplicação do Teorema de Pitágoras como ferramenta na resolução de problemas. Berté (1995, apud Almouloud e Bastian, 2003) efetuou um levantamento identificando os erros mais freqüentes apresentados pelos alunos na utilização do Teorema. Segundo a pesquisadora, os erros detectados seriam reflexos da ausência de problematização na abordagem do tema.

Diante da evidente importância do ensino do Teorema de Pitágoras e das pesquisas realizadas acerca dos problemas detectados na compreensão do referido assunto, nos indagamos como o Teorema de Pitágoras é apresentado nos livros didáticos, importante fonte para os professores, muitas vezes a única. Segundo Miorim (1998), a maioria dos professores de Matemática utiliza o livro didático como um importante referencial para suas aulas. Um levantamento feito por Miorim (1998) nos revela abordagens apresentadas sobre o Teorema de Pitágoras nos livros didáticos, estritamente práticas, com pouco ou, às vezes, nenhum significado histórico.

Destacamos a priorização que é dada nos livros didáticos e, por conseqüência, nas aulas sobre o Teorema de Pitágoras, à regra de apresentar um valor numérico para dois dos lados do triângulo retângulo e uma incógnita para o terceiro lado. Esse aspecto nos remete a seguinte pergunta "Os professores que são atrelados ao livro didático, saberiam atribuir, intuitivamente, três valores aos lados de qualquer triângulo retângulo?", em outras palavras, "Qual a compreensão que tais professores possuem acerca dos três números inteiros que satisfazem o Teorema de Pitágoras?". Acreditamos que essa mecanização, apresentada nos livros didáticos, desprovida do desenvolvimento histórico e da construção significativa pode contribuir para com a deficiência no ensino desse conceito.

Nesse contexto, emerge nossa pergunta diretriz "Como o estudo dos Ternos Pitagóricos pode auxiliar no Ensino do Teorema de Pitágoras?".

Por levarmos em consideração a importante inter-relação histórica entre o Teorema de Pitágoras e os Ternos Pitagóricos, dispomos da pergunta secundária "Como a História da Matemática pode ser nossa aliada nessa busca?". Por fim, uma vez que a obra *Recherche méthodique et propriétés des triangles rectangles en nombres entier* [Pesquisa Metódica e

Propriedades dos Triângulos Retângulos em Números Inteiros], de autoria do francês Eugène Bahier, apresenta uma discussão teórica consistente e sistemática acerca dos triângulos retângulos em números inteiros, se fez necessário responder a mais uma pergunta, a saber: "Qual o potencial pedagógico da obra *Recherche méthodique et propriétés des triangles rectangles en nombres entier*?"

Diante do estudo realizado, acreditamos que é possível dar aos futuros professores uma maior compreensão do Teorema de Pitágoras, para ajudá-los na sua futura prática docente, por meio do estudo dos Ternos Pitagóricos, tendo como referenciais a própria História da Matemática e a obra de Bahier (1916).

Historicamente, o Teorema de Pitágoras é ligado aos Ternos Pitagóricos, assunto que foi motivo de interesse de ilustres personalidades, como por exemplo, Pitágoras (cerca de 572 - 497 a.C), Platão (427 – 347 a.C), Euclides (cerca de 323-285 a.C), Diofanto (séc. IV d.C), Bachet de Méziriac (1581-1638) Fermat (1601-1655), Edouard Lucas (1842-1891) e o pouco conhecido Eugène Bahier. É provável que alguns Ternos Pitagóricos já fossem conhecidos antes do que o próprio Teorema de Pitágoras. O terno (3,4,5), por exemplo, seria facilmente encontrado aritmeticamente e isto poderia ter incentivado uma busca para outros ternos. Acreditamos que, de um ponto de vista pedagógico, um aspecto importante dos Ternos Pitagóricos se deve ao fato de que eles simplificam os exemplos e possibilitam uma discussão contextualizada e mais interessante, por se tratarem de números inteiros positivos.

Com base no que é chamado de hipótese de van der Waerden-Seidenberg, ver Fossa (no prelo), consideramos que a chave da investigação sistemática dos Ternos Pitagóricos poderia ser achada, com a descoberta do próprio Teorema. Segundo Fossa (no prelo), a referida hipótese afirma, em parte, que os triângulos pitagóricos tiveram um papel fundamental na matemática pré-histórica.

Entretanto, como toda hipótese deve ter como base uma teoria que a sustente, além do estudo feito por Seidenberg, o potencial pedagógico existente na relação entre os Ternos Pitagóricos e o Teorema de Pitágoras foi explorado tendo como fio condutor a História da Matemática, afirmando que os Ternos antecederam o Teorema. Sobretudo, consideramos que o uso da História da Matemática poder ser um fio unificador que liga vários tópicos de matemática num todo que é significativo para o aluno.

Particularmente, em relação às funções que a História pode desempenhar em situações no ensino de Matemática, os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) consideram várias, tais como o desenvolvimento de atitudes e valores mais favoráveis diante do conhecimento matemático, o resgate da própria identidade cultural, a compreensão das relações entre tecnologia e herança cultural, a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos matemáticos, a sugestão de abordagens diferenciadas e a compreensão de obstáculos encontrados pelos alunos. São vários os autores interessados pelo uso da História da Matemática como recurso pedagógico. Dentre eles podemos citar Fossa (2001), Mendes (2001), Miguel e Miorim (2004). No último, afirma-se que

> Muitos autores defendem a importância da história no processo de ensino-aprendizagem da matemática por considerar que isso possibilitaria a desmistificação da Matemática e o estímulo à não-alienação do seu ensino. Os defensores desse ponto de vista acreditam que a forma lógica e emplumada através da qual o conteúdo matemático é normalmente exposto ao aluno, não reflete o modo como esse conhecimento foi historicamente produzido. (MIGUEL E MIORIM, 2004, p.52).

Com isso, se faz necessário nos cursos de Matemática, que o uso apropriado da história desmistifique a idéia de que a Matemática é linear, pronta e acabada.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

Para dar o eixo geral da nossa investigação, explicitamos o seguinte objetivo geral: Analisar o livro *Recherche méthodique et propriétés des triangles rectangles en nombres entiers,* visando à aplicação do conteúdo analisado, na disciplina Teoria dos Números, no curso de Matemática Licenciatura da UFRN.

1.2.2 Objetivos Específicos

Desdobrando o objetivo geral, apresentamos os seguintes objetivos específicos:

1. Analisar a obra *Recherche méthodique et propriétés des triangles rectangles en nombres entiers,* no contexto histórico da Teoria dos Números.

2. Elaborar e testar o módulo de ensino a ser ministrado na disciplina Teoria dos Números,

tendo como referencial teórico a obra *Recherche méthodique et propriétés des triangles rectangles en nombres entiers;*

3. Promover uma apreciação da História da Matemática como recurso pedagógico;

Como resultado da nossa pesquisa, pretendemos divulgar por meio digital e/ou impresso o material elaborado para o módulo de ensino.

1.3 Metodologia da Pesquisa

Em relação à metodologia, nossa investigação assume um caráter qualitativo, considerando que para Borba e Araújo (2006, p. 45), "pesquisar não se resume a listar uma série de procedimentos destinados à realização de uma coleta de dados, que, por sua vez, serão analisados por meio de um quadro teórico estabelecido antecipadamente para responder a uma dada pergunta". D'Ambrosio (2006), afirma que a pesquisa qualitativa "... É o caminho para escapar da mesmice. Lida e dá atenção às pessoas e às suas idéias, procura fazer sentido de discursos e narrativas que estariam silenciosas. E a análise dos resultados permitirá propor os próximos passos".

Consideramos que a metodologia da pesquisa deve ser tida como aliada na construção de conhecimento, sendo necessário a harmonia entre metodologia de pesquisa, procedimentos metodológicos e concepção de conhecimento (Lincoln e Guba, 1985, apud Borba e Araújo, 2006). Partindo desse pressuposto, nossa investigação tem o caráter qualitativo, onde o processo é mais importante do que simplesmente os resultados, entrelaçado com nossa concepção de conhecimento baseada no Construtivismo.

Ao conceber o processo de pesquisa como um mosaico que descreve um fenômeno complexo a ser compreendido, é fácil entender que as peças individuais representem um espectro de métodos e técnicas, que precisam estar abertas a novas idéias, perguntas e dados. Com isso, se faz necessário a adoção da multiplicidade de procedimentos metodológicos para obtenção dos dados, o que segundo Alves-Mazzotti (1998), está relacionado à credibilidade da pesquisa.

A próxima sessão será destinada a descrever o percurso metodológico, enfatizando a multiplicidade de procedimentos.

1.3.1 Procedimentos Metodológicos

O presente estudo compõe de uma parte de estudo teórico: análise da obra de Eugène Bahier (1916) e o desenvolvimento do conteúdo matemático apresentado. Também tem a parte prática: elaboração e aplicação de um módulo de ensino e posteriormente uma análise de suas vantagens e limitações.

De acordo com Gil (2002), a pesquisa documental vale-se de materiais que não receberam ainda um tratamento analítico, ou que ainda podem ser reelaborados de acordo com os objetos da pesquisa. Nesse contexto, consideramos que a obra que analisamos nos viabilizou realizar um estudo teórico com base na pesquisa documental.

Em relação ao estudo prático, nossa pesquisa será embasada na pesquisa-ação. A pesquisa ação pode ser definida como

> ... um tipo de pesquisa com base empírica que é concebida e realizada em estreita associação com uma ação ou com a resolução de um problema coletivo e no qual os pesquisadores e participantes representativos da situação ou do problema estão envolvidos de modo cooperativo ou participativo. (THIOLLENT, 1985, p.14, apud GIL, 2002).

No mais, a pesquisa-ação deve ser em sua essência, uma pesquisa intencionada à transformação participativa, em que sujeitos e pesquisadores interagem na produção de novos conhecimentos.

Em suma, o estudo se subdividiu em cinco fases, a saber: Análise da obra, Elaboração de atividades, Aplicação do módulo de ensino, Análise dos dados e Conclusões. Essas atividades foram distribuídas em três etapas, a saber: histórica, matemática e pedagógica.

A etapa de caráter histórico foi destinada a fazer uma análise descritiva da obra, análise e estudo de documentos sobre o desenvolvimento histórico dos conceitos matemáticos envolvidos, tendo como instrumento a análise de conteúdo. A etapa de caráter matemático consiste na análise quanto à consistência e completude da obra, sendo que o instrumento utilizado foi a análise de conteúdo. Por fim, a terceira etapa, a pedagógica, foi composta pela elaboração do módulo de ensino, cujo instrumento utilizado foi a análise de conteúdo, e pela investigação das vantagens e limitações do módulo de ensino, fazendo uso da triangulação de três instrumentos, a saber: Questionário, Discussão Coletiva e Avaliação Escrita.

Os dados obtidos na avaliação escrita foram analisados com base nos conceitos de compreensão instrumental e compreensão relacional propostos por Skemp (1980).

2. CONFIGURAÇÕES TEÓRICAS QUE SUSTENTAM O ESTUDO

O problema da nossa investigação remete a um estudo relacionado com os Ternos Pitagóricos e a Formação Inicial de professores, que por sua vez, a nosso ver, suscita de uma melhor compreensão de outros aspectos, a saber: Construtivismo e História da Matemática como recurso pedagógico.

Acreditamos que a concepção sobre o que é a Matemática, as visões sobre o que é conhecimento matemático e como este é produzido, e as atitudes pedagógicas, as quais expressam um conjunto de valores morais e políticos, afetam a forma como ensinamos, e influenciam diretamente os resultados da pesquisa. Com isso, no presente capítulo, traçamos um diálogo com princípios que acreditamos serem essenciais para promoção de uma Educação Matemática eficaz e proveitosa.

Em relação aos Ternos Pitagóricos, a discussão consiste em fazer um levantamento sobre o desenvolvimento histórico do Teorema de Pitágoras, dando ênfase aos Ternos Pitagóricos. Particularmente, dentre todo o desenvolvimento histórico sobre os Ternos pitagóricos e o Teorema de Pitágoras que abordamos, enfatizamos a hipótese de van der Waerden-Seidenberg, por acreditarmos que com ela podemos explicitar a possibilidade da utilização dos Ternos Pitagóricos, antes mesmo do conhecimento do Teorema de Pitágoras.

Por fim, apresentamos uma discussão acerca da obra de Bahier (1916), *Recherche méthodique et propriétés des triangles rectangles en nombres entier.* Enfatizamos a referida obra por se tratar de nosso principal referencial teórico matemático na elaboração do módulo de ensino.

2.1. A Matemática é pronta e acabada?

Os Parâmetros Curriculares Nacionais enfatizam a importância da discussão acerca da natureza do conhecimento matemático, com a finalidade de identificar suas características principais e seus métodos particulares como base para a reflexão sobre o papel que essa área desempenha no currículo. Fiorentini (1995) ressalta que além dele, vários outros educadores matemáticos, como Ernest (1991), Ponte (1992), Thompson (1984), Steiner (1987) e Zuñiga (1987), sustentam que “a forma como vemos/entendemos a Matemática tem fortes implicações no modo como praticamos e entendemos o ensino da Matemática e vice-versa".

Historicamente, na concepção platônica, a Matemática existe independente do homem, não podendo ser inventada nem construída, sendo localizada no mundo das idéias. Acredita-se que os objetos matemáticos são pré-determinados e as idéias matemáticas existem em um mundo ideal e estão adormecidas na mente do homem.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998), a Matemática caracteriza-se como uma forma de compreender e atuar no mundo e o conhecimento gerado nessa área do saber como um fruto da construção humana na sua interação constante com o contexto natural, social e cultural. Nesse contexto, acreditamos que a Matemática não é uma ciência estática, pronta e acabada a ser memorizada, mas sim uma ciência viva, dinâmica, construída pelos homens ao longo dos tempos, conforme necessidades sociais, políticas e culturais, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos.

Particularmente, em relação ao ensino, a visão das idéias matemáticas de forma estática, a-histórica e dogmática, acarretam certos danos aos alunos, os quais atuam como meros repetidores de procedimentos mecânicos, encontrando dificuldades em dar significado às atividades que lhe são propostas na sala de aula de Matemática. Conforme enfatiza Fiorentini (1995), aprender matemática não se dá através de memorização de regras, procedimentos e princípios estabelecidos, com objetivos definidos de resolver exercícios e chegar a respostas corretas, mas sim construindo os conceitos a partir de ações reflexivas sobre materiais e atividades, ou mesmo sobre suas próprias reflexões, ou então daquele que acredita que se aprende problematizando situações do dia-a-dia.

Por fim, considerando o objeto matemático como sendo produto da criatividade da mente de cada indivíduo, isto acarreta conseqüências importantes para a Educação Matemática. Segundo Fossa (1998), tais conseqüências são oriundas da visão de Brouwer sobre a realidade matemática. A primeira ressalta que cada aluno deve construir seus próprios conceitos matemáticos ativamente e a segunda refere-se à organização do currículo em consonância com a estrutura da disciplina. Deste modo, os princípios teóricos em relação à epistemologia do conhecimento, necessitam estarem ancorados em uma teoria que priorize não a transmissão e sim a construção do conhecimento, conforme verificaremos na próxima sessão.

2.2 Construir ou transmitir conhecimento nas aulas de Matemática?

Jean Piaget (1896-1980), biólogo e psicólogo, nascido na cidade suíça de Neuchâtel, revolucionou as concepções de inteligência e de desenvolvimento cognitivo, partindo de pesquisas utilizando como instrumento a entrevista clínica, definindo conhecimento em termos de estruturas mentais e conceituando a abstração reflexiva. O construtivismo, postura epistemológica, estudada por Piaget, baseada na idéia de que conhecer é construir, se distancia claramente do empirismo e do racionalismo.

Enquanto que para os empiristas o conhecimento tem como fonte principal a experiência adquirida em função do meio físico, sempre mediada pelos sentidos, para os racionalistas o conhecimento parte do sujeito, podendo ser produzido por ele isoladamente do mundo. Em contrapartida, o construtivismo se opõe as teorias racionalistas e empiristas, ao afirmar que o conhecimento não provém nem diretamente do mundo físico, nem de mentes humanas isoladas do mundo, e sim que a fonte do conhecimento é o sujeito reflexivo, o qual age com o meio a partir de abstrações reflexivas, realizadas mediante a construção de relações entre objetos, ações ou mesmo entre idéias já construídas.

Segundo Inhelder e De Caprona (1985):

> Toda a obra de Piaget está baseada na idéia de que o conhecimento é construção e, portanto, que o desenvolvimento cognitivo também é uma longa e contínua construção de formas novas de conhecimentos que não estão presentes no sujeito (como ocorre com os conhecimentos inatos) nem estão no entorno (nos objetos ou em formas transmitidas social e culturalmente). (INHELDER E DE CAPRONA, 1985, apud MARTÍ,1998, p.45)

Para Piaget, o sujeito explora ativamente seu entorno criando, a partir de suas ações, estruturas internas que lhe permitem ir conhecendo o mundo de forma cada vez mais estável e objetiva.

Por sua vez, entende-se por desenvolvimento o processo de formação das estruturas intelectuais e como aprendizagem a aquisição de informação específica do ambiente, assimilada aos esquemas existentes. É válido ressaltar que aprendizagem é construção e compreensão e não memorização. A concepção piagetiana de aprendizagem defende que sem aprendizagem o conhecimento é bloqueado, mas só a aprendizagem, não faz o desenvolvimento. O desenvolvimento é a condição prévia da aprendizagem. A aprendizagem por sua vez, é a condição do avanço do desenvolvimento. Em outras palavras, conforme enfatiza Inhelder (1977, apud Martí, 1998), "aprender é proceder a uma síntese indefinidamente renovada entre continuidade e a novidade".

Um postulado básico do construtivismo é o reconhecimento da importância dos conhecimentos prévios em qualquer aprendizagem nova, considerando que os indivíduos não são "caixas vazias". Com isso, os professores devem criar situações de aprendizagem em que as concepções alternativas possam se manifestar e servir de orientação.

Intencionando dar conta do aparecimento de conhecimentos novos a partir de conhecimentos anteriores, Piaget pressupôs a identidade de mecanismos funcionais: assimilação, acomodação, equilibração, ao longo de todo o desenvolvimento biológico e mental, que garantem a continuidade em nível de funcionamento psicológico (continuidade funcional); e supondo a ruptura e aparição de formas de organização cognitiva novas, porém integradas às anteriores (descontinuidade estrutural). Segundo Martí (1998), os mecanismos responsáveis por essas mudanças estudados de forma sistemática a partir da década de 1970, mostram o papel primordial do sujeito: mecanismos de autoregulação, tomada de consciência, abstração reflexionante, generalização, etc.

Ao investigar a natureza e a gênese do conhecimento nos seus processos e estágios de desenvolvimento, em outras palavras, como o indivíduo aprende, o postulado construtivista forneceu subsídios valiosos que geraram diversas orientações teóricas e aplicadas não só na psicologia como também na pedagogia. Dentre as perspectivas que surgiram sob influência das idéias piagetianas, destacam-se os construtivismos educativos, evolutivos, cognitivos, terapêuticos, socioculturais, e até construtivismos inatistas. Tolchinsky (1998) ressalta que "para o construtivismo em educação, Piaget foi algo como Picasso para o construtivismo escultórico e arquitetônico". (Tolchinsky, 1998, p. 103)

Entretanto, há tópicos em que o construtivismo não deixa claro os conceitos envolvidos, como por exemplo, os limites para dar conta da especificidade do conhecimento e de sua natureza mediada. Conforme é destacado por Fossa (1998), no caso da Educação Matemática, se faz necessário deixar claro alguns aspectos, a saber: matemática, linguagem, distinção entre memória e imaginação, e intuição.

Todavia, reconhecendo as limitações do construtivismo piagetiano, não intencionamos abandoná-lo. Segundo Martí (1998):

> A concepção construtivista pode ter uma função essencial na hora de definir as linhas mestras de uma teoria, de uma pesquisa ou de um programa de intervenção no campo do desenvolvimento, do ensino e da aprendizagem. (MARTÍ,1998, p.67)

Sobretudo, mesmo que a obra de Piaget não seja um tratado sobre educação, nos cabe reconhecer que suas idéias no que diz respeito às questões epistemológicas são de fundamental importância para entender e refutar várias visões e teorias tradicionais relacionadas à aprendizagem.

Nesse contexto, dentre as posições epistemológicas, enfatizamos o construtivismo radical, tendo como principal teórico Von Glasersfeld. O construtivismo radical é uma teoria do conhecimento que fornece uma abordagem pragmática para questões sobre a realidade, a verdade, a linguagem e o entendimento humano. Entra em ruptura com a tradição filosófica e propõe uma concepção do conhecimento que radica no ajustamento experiencial e não na verdade metafísica.

No construtivismo radical, o sujeito epistemológico é construtor ativo do conhecimento e a autonomia assume um valor muito importante dentro da sala de aula.

Particularmente, no caso da Educação Matemática evidenciamos a psicologia da aprendizagem Matemática, tendo como um dos principais teóricos o matemático e psicólogo inglês Richard Skemp. O referido teórico estuda a aprendizagem e compreensão da Matemática, considerando que os problemas de ensino-aprendizagem são psicológicos, o que por sua vez suscitam de um aprofundamento acerca de como se aprende.

Quanto às noções de conceito e esquema, Skemp afirma que essas definições não são tão fáceis de apresentar, visto que há uma inter-relação entre ambas as noções. Skemp (1980) considera que um conceito requer, para sua formação, certo número de experiências que tenham algo em comum e somente após essa formação é possível falar de exemplos do conceito formado. Se isso ocorre, é possível organizá-los para formar estruturas conceituais denominadas esquemas. Por sua vez, Skemp (1980) considera esquema como sendo uma estrutura de conceitos relacionados pelo sujeito epistemológico. Um esquema é associado a um conjunto de idéias tendo como funções, integrar o conhecimento existente e atuar como um instrumento mental para a aquisição de um novo conhecimento.

Skemp (1980) categoriza a aprendizagem dos conceitos matemáticos em dois níveis, a saber:

o nível de compreensão instrumental e o nível de compreensão relacional. Enquanto que na compreensão instrumental ocorre a assimilação de algo novo sob um esquema simples, na compreensão relacional ocorre a assimilação de novos conceitos sob esquemas mais ricos, conseqüentemente, não tão simples.

Na compreensão instrumental, o aluno domina uma coleção isolada de regras e algoritmos aprendidos por meio da repetição, sem estabelecer relações entre conceitos. Já na compreensão relacional o aluno é capaz de realizar uma grande variedade de atividades com criatividade e inteligência, permitindo relacionar diferentes conceitos em um só esquema.

Entretanto, é válido ressaltar que compreensão instrumental e compreensão relacional não correspondem a dois tipos disjuntos de compreensão, mas sim conforme destaca Fossa (2001) dois estágios de um mesmo processo de conhecimento, havendo uma seqüência gradativa onde a compreensão instrumental se torna relacional.

Considerando que o conhecimento não se transmite, se constrói, o conhecimento não pode ser despejado. É necessário, oportunizar, de fato, a sua construção, somando em vez de sintetizar. Com isso, o aluno não deve ser visto como uma testemunha, que contempla a solução sem dúvidas e obstáculos, e sim como protagonista no processo de conhecimento, podendo construir seu próprio conhecimento.

Fossa (1998) destaca que o papel do professor consiste em organizar atividades estruturadas, mostrar os erros através do uso de contra exemplos, estimular a criação de novos conceitos, estimular abordagens diferentes e avaliar o aluno através do diálogo e de projetos. Particularmente, a exibição e exemplificação devem preceder a descrição, o que auxilia o professor a levar o aluno a níveis sempre mais gerais de abstração. Sobretudo, o professor deve fazer com que sua aula seja centralizada no aluno, o encorajando a desenvolver processos metacognitivos.

Nesse contexto, ao avaliar, o professor não deve simplesmente se preocupar com o produto, e sim com todo o processo, posto que a avaliação é uma parte integral do processo de conhecer. Isto impulsiona a emergência do professor como pesquisador, sendo conveniente a utilização de diversos métodos para descobrir o pensamento do aluno.

Em relação aos conteúdos, eles são considerados como meios úteis, mas não indispensáveis para a construção e desenvolvimento das estruturas básicas da inteligência, dado que o importante não é aprender isso ou aquilo, mas sim aprender a aprender e desenvolver o pensamento lógico-formal. Por sua vez, recomenda-se que o currículo deve ser organizado segundo a estrutura da disciplina, cabendo revisões periódicas para garantir a sua organização correta segundo a estrutura da disciplina. Fossa (1998) ressalta que “a matemática deve ser apresentada ao aluno de tal modo que reflita suas estruturas básicas, como determinadas por especialistas em matemática”.

Diante do exposto, no âmbito institucional da educação, é necessário respeito mútuo nas relações professor-aluno e aluno-aluno, sendo levado em consideração as particularidades de cada indivíduo, as valorizações da independência e da autonomia, tendo como base o diálogo. Segundo Confrey (1991, apud Fossa, 1998), “a autonomia pessoal é a espinha dorsal do processo de construção”.

Com isso, destacamos a valorização do princípio ético fundamental, o que segundo Fossa (2001), é “o desenvolvimento pleno da autonomia do indivíduo, pois é o indivíduo que é o centro criador do nosso universo”.

Particularmente, a Ética constitui um dos temas transversais propostos nos Parâmetros Curriculares Nacionais e reflete a preocupação com a constituição de valores de cada aluno, ajudando-o a se posicionar nas relações sociais dentro da escola e da comunidade como um todo. São quatro blocos temáticos principais: respeito mútuo, justiça, diálogo e solidariedade. É a ética que nos permite buscar critérios para definirmos o que é ser bom, correto e que nos fornece explicações para nosso senso de dever ser moral.

Em relação ao ensino de Matemática, os Parâmetros Curriculares Nacionais, destaca que

> ... pode contribuir para a formação ética à medida que se direcione a aprendizagem para o desenvolvimento de atitudes, como a confiança dos alunos na própria capacidade e na dos outros para construir conhecimentos matemáticos, o empenho em participar ativamente das atividades em sala de aula e o respeito ao modo de pensar dos colegas. (BRASIL, 1998, p. 30)

A promoção da participação ativa dos alunos nas aulas de Matemática pode ser um importante meio para estimular que os mesmos sejam autônomos e criativos na construção do conhecimento.

Miguel e Miorim (2004) consideram que a finalidade da Educação matemática é

> ...fazer com que o estudante construa, por intermédio do conhecimento matemático, valores e atitudes de natureza diversa, visando à formação integral do ser humano e, particularmente, do

> cidadão, isto é, do homem público. (MIGUEL E MIORIM, 2004, p.71)

Desse modo, torna-se evidente o papel do ensino de Matemática perpassando os limites da mera instrução e sendo um aliado para contribuir com a formação do aluno de um modo geral.

Em especial, ao formarmos alunos como pessoas capazes de refletir sobre os valores existentes, capazes de serem críticos e fazer opções por valores que tornem a vida social mais justa, é necessário promover a autonomia, a qual consiste em condição essencial para estimular o poder criativo e reflexivo dos alunos. Para que isso ocorra, é necessário que o professor valorize a cooperação entre os alunos como forma de aprendizagem e também como forma para desenvolver todo o potencial humano de cada um, tendo como meio o diálogo.

2.3 Diálogo entre História e Educação Matemática: muito além do caráter motivacional

Com o intuito de tentar resolver problemas relacionados ao ensino de Matemática, há tendências metodológicas que contribuem para o entendimento e a solução de tais problemas, proporcionando a efetivação de uma Educação Matemática com significado. Mendes (2006) destaca seis tendências metodológicas em Educação Matemática, a saber: 1. O uso de materiais concretos e jogos no ensino de matemática; 2. Etnomatemática; 3. Resolução de problemas; 4. Modelagem Matemática; 5. História da Matemática; 6. Computadores e calculadoras no ensino de matemática.

Diante do exposto, com base em Mendes (2006), evidenciamos que não existe um caminho que possa ser identificado como único e melhor, sendo necessário que o futuro professor conheça diversas possibilidades de trabalho em sala de aula, para construir sua prática. Em relação às características, princípios pedagógicos e modos de abordagens, cada tendência apresenta suas particularidades, cabendo ao futuro professor analisar as possibilidades de uso de cada uma delas.

É evidente a importância de cada uma das tendências metodológicas citadas. Entretanto, no presente estudo, proporcionaremos uma discussão acerca da participação da História no ensino de Matemática, em especial, na formação dos futuros professores de Matemática, enfatizando as funções que a História da Matemática desempenha, quando usada como recurso pedagógico nas aulas de Matemática. Sobretudo, por acreditarmos que o conhecimento matemático não é pronto e acabado, sendo construído e modificado ao longo do tempo, acreditamos na potencialidade pedagógica da inserção da História nas aulas de Matemática.

Quanto à História da Matemática, os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998) denotam que através dela a Matemática é expressa como "uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos". A nosso ver, a História da Matemática pode auxiliar na formação do pensamento matemático, atuando como fio condutor para explicar a propagação do pensamento matemático em diferentes contextos culturais.

Nobre (1996) evidencia que o estudo da História da Matemática permite ao professor observar que, ao longo do tempo, dificuldades, erros e modificações fizeram parte da estruturação de muitos conceitos, até que esses chegassem à forma como são conhecidos atualmente. Outro argumento dado com relação à importância da História para a Matemática é o de Heiede (1996). Segundo Gutierre (2003, p.22),

> Em seu artigo *History of Mathematics and the teacher* Heiede argumenta que muitas pessoas parecem viver vidas não históricas, pois focalizam demais o presente, sem pensar no passado ou no futuro. Ele afirma que no ensino da Matemática isso também acontece, e a História da disciplina acaba não sendo tratada como deveria.

Sobretudo, a inclusão da História no ensino da Matemática pode contribuir para tornar as aulas mais dinâmicas e interessantes.

Gutierre (2003) analisou o processo de ensino-aprendizagem da Matemática que envolve a História da Matemática como recurso metodológico, destacando três funções pedagógicas que a História da Matemática cumpre neste processo, baseado no estudo realizado por Miguel (1993), o qual apresenta treze funções. As três funções destacadas por Gutierre (2003) são as seguintes: motivação, significação e método. No presente estudo, teceremos idéias acerca das duas primeiras funções.

A História como fonte de motivação para o ensino-aprendizagem da Matemática é justificada por promover o despertar do interesse do aluno em estudar o conteúdo matemático que lhe está sendo ensinado. Miguel e Miorim (2004) destacam que vários autores consideram que os textos históricos exercem um papel motivador no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Entretanto, por provocar certo distanciamento do aspecto formal e rigoroso do conhecimento matemático, o poder motivador é questionado por diversos autores. Miguel e Miorim (2004) contrapõem à existência de um suposto potencial motivador inerente à História, a partir de duas considerações. A primeira delas destaca que se fosse esse o caso, o ensino da própria História seria automotivador. A segunda consideração é de cunho psicológico, a qual aborda que a motivação tem caráter individual e não universal e o que é motivador para um indivíduo pode não ser para outro.

Outro ponto a ser destacado é o dado por Nobre e Baroni (1999), ao destacarem a necessidade de se ter cautela, para não incorrer no erro de simplesmente assumir a História da Matemática como elemento motivador ao desenvolvimento do conteúdo. Segundo os autores,

> Sua amplitude extrapola o campo da motivação e engloba elementos cujas naturezas estão voltadas a uma interligação entre o conteúdo e sua atividade educacional. Essa interligação se fortalece a partir do momento que o professor de matemática tem o domínio da história do conteúdo que ele trabalha em sala de aula. (NOBRE E BARONI, 1999, p.132)

A medida que o professor conhece a história do conteúdo a ser trabalhado a motivação não é o único fator responsável para a inserção da história no ensino da Matemática. Nesse caso, a própria estrutura do conhecimento matemático, histórica e contínua fortalece o uso.

Fossa (2001) e Miguel (2003, apud Gutierre 2003) designam como Uso Ornamental e História-Anedotário, respectivamente, exemplos do uso da História como elemento motivador. Miguel (2003, apud Gutierre 2003) enfatiza a história-anedotário como sendo um contraponto aos momentos formais do ensino, que exigem grande dose de concentração e esforço por parte do aprendiz. Por sua vez, para Fossa (2001), o Uso Ornamental por apenas enfocar notas históricas, requer a delimitação do seu papel "para evitar falsas expectativas e, ao mesmo tempo, aproveitar ao máximo tudo que seu o uso nos tem a oferecer".

Nesse contexto, em contraposição à simples acumulação de fatos e às informações históricas de natureza estritamente factual, encaradas como meros acessórios ou ornamentos, emerge a visão da História como um instrumento que pode promover significado e compreensão no processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Desse modo, a História deixa de ser vista além da função motivadora, assumindo a possibilidade de contribuir para com a ampliação do próprio conhecimento matemático.

Ao se utilizar o processo de ensino e aprendizagem da Matemática que visa à compreensão e a significação, Miguel e Miorim (2004) enfatizam que é necessário levantar e discutir os porquês, o que segundo os referidos autores, são as “razões para a aceitação de certos fatos, raciocínios e procedimentos por parte do estudante”. Jones (1969, apud Miguel e Miorim 2004) aponta que os porquês cronológicos, os porquês lógicos e os porquês pedagógicos, devem ser levados em consideração por todos os que se propõem a ensinar Matemática, sendo que os porquês cronológicos se justificam por razões de cunhos histórico, cultural, casual e convencional, os porquês lógicos se justificam em decorrência lógica de proposições previamente aceitas e os porquês pedagógicos se justificam por razões de ordem pedagógica.

Por sua vez, em relação à participação da História da Matemática na formação do professor de Matemática, teóricos como, Miguel e Miorim (2004), Miguel e Brito (1996) defendem a necessidade de fazer com que a História da Matemática participe de forma orgânica, proporcionando historicidade nas disciplinas de conteúdo específico. Os últimos afirmam que uma participação orgânica da História na formação do professor

> ... conceberia a História como fonte de problematização que deveria contemplar as várias dimensões da Matemática (lógica, epistemológica, ética, estética, etc.) e da Educação Matemática (psicológica, política, axiológica, didático-metodológica, etc.), o que remeteria, inevitavelmente, os formadores de professores a destacar e discutir com seus alunos as relações de influência recíproca entre matemática e cultura, matemática e sociedade, matemática e tecnologia, matemática e arte, matemática e filosofia da matemática, etc. (MIGUEL E BRITO, 1996, p.49)

Desse modo, a matemática dialoga com os demais campos do saber, levando em consideração às particularidades de cada um.

Contudo, além das vantagens, também se faz necessário considerar alguns empecilhos ao uso didático da História da Matemática. Miguel e Miorim (2004) destacam a ausência de literatura adequada, a natureza imprópria da literatura disponível, a história como um fato complicador e a ausência do sentido de progresso histórico. Entretanto há outros, tais como a questão de cunho filosófico que envolve a idéia de que História não é Matemática, a falta de destreza de habilidade do professor e também o fato de haver estudantes que não gostam de História e, por conseguinte, de História da Matemática. Entretanto, Miguel e Miorim (2004) ressaltam que esses argumentos não devem ser considerados como enfraquecedores e sim pontos de partida para estimular o desenvolvimento de novos estudos e pesquisa, na tentativa de sanar tais dificuldades.

Muitos teóricos discutem acerca da instrumentalização didática da História da Matemática. Miguel e Miorim (2004), por exemplo, ressaltam que a história deve ser utilizada levando em consideração que não é um objeto de uso, e sim um campo de diálogo. Por sua vez, Nobre e Baroni (1999) tecem o seguinte comentário:

> Há que se ter cautelas quando se trata de 'propor o trabalho em sala de aula, nas aulas de Matemática, com a utilização da História da Matemática'. A História da Matemática, assim como a Análise, a Álgebra, a Topologia etc., é uma área do conhecimento matemático, um campo de investigação científica, por isso é ingênuo considerá-la como um simples instrumento metodológico. (NOBRE E BARONI, 1999, p.130)

Com isso, se torna insuficiente que o professor apenas conheça o conteúdo matemático a ser trabalhado. Faz-se necessário que o mesmo também conheça a história do conteúdo matemático a ser trabalhado.

Com isso, destacamos a necessidade de substituir a idéia e a prática de que a História da Matemática é um mero elemento motivador em pela idéia e prática da História da Matemática como uma fonte de atividades matemáticas, cujos conceitos e problemas históricos sejam elementos integradores. Fossa (2001) indica o Uso Ponderativo, no qual a História da Matemática é utilizada para ensinar os próprios conceitos da Matemática, proporcionando significado na aprendizagem Matemática. O Uso Ponderativo se subdivide em Uso Novelesco e Uso Episódico, sendo que o Uso Novelesco é quando há ocorrência da História da Matemática durante toda a disciplina e o Uso Episódico é quando se aborda alguns tópicos. Nos usos novelesco e episódico ocorre o que Fossa (2001) designa de Uso Manipulativo.

Fossa (2001) destaca que o Uso Manipulativo se dá através de atividades estruturadas utilizando materiais manipulativos, no qual a História da Matemática emerge como uma fonte rica em matéria prima para o desenvolvimento de tais atividades. O referido autor enfatiza que as atividades estruturadas podem ser destinadas tanto as aulas conduzidas usando o método de redescoberta quanto à elaboração de exercícios de fixação não rotineiro.

Diante do exposto, as atividades estruturadas que envolvem a História da Matemática se apresentam como uma ferramenta capaz de desenvolver um ensino de Matemática compreensivo, significativo e dinâmico para o aluno. Com relação à tais atividades, Mendes (2006), enfoca a elaboração e utilização de textos de História da Matemática como elemento de superação das dificuldades encontradas por professores de matemática com relação aos conteúdos que ministram em suas salas de aula. Conforme o referido autor

> A utilização da história no ensino da matemática surge como uma proposta que procura enfatizar o caráter investigatório do processo de construção do edifício matemático, podendo levar os estudiosos dessa área de pesquisa à elaboração, testagem e avaliação de atividades de ensino centradas na utilização de informações históricas relacionadas aos tópicos que pretendem ensinar. (MENDES, 2006, p.55)

O caráter investigatório que é estimulado pela utilização da história no ensino de matemática, é de grande importância para o professor, dado a complexidade da prática docente.

Nesse contexto, se torna evidente a necessidade das atividades serem desenvolvidas na sala de aula pelos próprios alunos, trabalhando em pequenos grupos, estimulando a curiosidade e a criatividade por parte dos integrantes do grupo. Outro ponto a ser destacado é a necessidade da realização de registros por escrito dos resultados das atividades.

Posto que as atividades históricas requerem a participação efetiva do aluno na construção do seu conhecimento, evidencia-se a perspectiva construtivista de ensino, na qual há a valorização dos conhecimentos prévios dos alunos, bem como a promoção da investigação por parte dos mesmos.

2.4 Teorema de Pitágoras e Ternos Pitagóricos antes e depois de Pitágoras

Pitágoras (cerca de 572 - 497 a.C), filósofo e matemático, nascido em Samos, ilha grega no mar Egeu, viajou pelo Egito e Babilônia, e segundo alguns historiadores, possivelmente foi até a Índia, mesmo que isso seja pouco provável. A escola fundada por ele, Escola Pitagórica, secreta e ao mesmo tempo comunitária, onde conhecimento e propriedades eram comuns, possuía bases religiosas, matemáticas e filosóficas. Boyer (1996) afirma que “nunca antes ou depois a matemática teve um papel tão grande na vida e na religião como entre os pitagóricos”.

Figura 1: Escultura de Pitágoras.[1]

Boyer (1996) ressalta que Pitágoras morreu em 500 a.C. aproximadamente, na antiga cidade grega de Metaponto. A tradição diz que não deixou obras escritas, mas suas idéias foram levadas adiante por um grande número de discípulos. Entretanto, conta-se que Aristóteles escreveu uma biografia dos pitagóricos, embora esta se tenha perdido.

Os gregos aprenderam depressa como passar à frente de seus predecessores, não hesitando em absorver elementos de outras culturas. Sobretudo, conforme destaca Boyer (1996), a tudo o que tocavam davam mais vida. Em todas as áreas do pensamento que se propuseram a trabalhar realizaram feitos que marcaram definitivamente a história da humanidade.

Particularmente, em relação às contribuições de Pitágoras à matemática, Thomas (1939), enfatiza que: "... transformou essa ciência numa forma liberal de instrução, examinando seus princípios desde o início e investigando os teoremas de modo imaterial e intelectual". (Thomas, 1939, apud Boyer, 1996, p. 33). Dentre as contribuições dos pitagóricos, destacamos umas das proposições mais importantes de todo o campo da Geometria, o Teorema de Pitágoras, o que justifica a denominação Teorema de Pitágoras. Segundo uma lenda, quando Pitágoras demonstrou o Teorema, ficou tão vislumbrado que ordenou que bois fossem sacrificados aos deuses. Entretanto, isso não é possível, uma vez que os princípios vegetarianos eram adotados pelos membros da escola pitagórica.

---

[1] Fonte: http://filosofiacienciaevida.uol.com.br/ESFI/Edicoes/21/artigo77246-1.asp.

Matematicamente, três números inteiros positivos que satisfazem a relação $a^2+b^2 = c^2$ são chamados Números Pitagóricos ou Ternos Pitagóricos. Um Terno Pitagórico primitivo é um Terno Pitagórico em que os três números são primos entre si. O menor Terno Pitagórico primitivo é o (3, 4, 5), posto que $3^2+4^2=5^2$. Se (a,b,c) é um Terno Pitagórico, então (ka,kb,kc) também é um terno pitagórico, para qualquer número natural k.

Particularmente, há duas fórmulas paramétricas atribuídas aos gregos que geram Ternos Pitagóricos, a saber: *fórmula de Pitágoras* e *fórmula de Platão.* Na primeira temos que $(2n+1, \frac{1}{2}(2n+1)^2-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}(2n+1)^2+\frac{1}{2})$, para todo n natural. Essa fórmula gera todos os Ternos Pitagóricos, em que os dois últimos termos são consecutivos, como por exemplo, os ternos (3, 4, 5) e (5, 12, 13). Na segunda, temos que $(2n, n^2-1, n^2+1)$, para todo n natural maior que 1. A referida fórmula gera todos os Ternos Pitagóricos, em que os dois últimos termos são dois ímpares ou pares consecutivos, como por exemplo, (4, 3, 5), (6, 8, 10) e (8, 15, 17).

Fossa e Erickson (2004) investigaram as duas fórmulas e concluíram que as fórmulas foram casos especiais de uma outra fórmula bem conhecida na Antigüidade, a fórmula paramétrica babilônica em duas variáveis, a saber: $(2nm, n^2-m^2, n^2+m^2)$, onde $n, m \in \mathbf{N}$ com $n>m$). A fórmula gera todos os Ternos Pitagóricos, incluindo todos os gerados pelas fórmulas de Pitágoras e de Platão. Segundo Fossa (no prelo), isto indica que as fórmulas gregas foram derivadas da fórmula babilônica para que triângulos com certas propriedades fossem escolhidos do universo de triângulos pitagóricos.

2.4.1Teorema de Pitágoras e Ternos Pitagóricos antes de Pitágoras

Para Fossa (no prelo), é importante reconhecer que conhecimento de Ternos Pitagóricos não necessariamente implica em conhecimento do Teorema de Pitágoras. Fossa (no prelo) enfatiza que vários historiadores têm ressaltado que um povo ou outro conheceu alguns Ternos Pitagóricos mas, no entanto, não há qualquer evidência que conheceu o Teorema de Pitagóras.

Os babilônios dos tempos de Hamurabi (1700 a.C.), já conheciam o fato de que em um triângulo retângulo, a soma do quadrado das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa. O *Plimpton 322* (figura 2), tablete de argila encontrado na Babilônia, utilizado entre 1900 a 1600 a.C, tábua pertencente à coleção G.A Plimptom da Universidade de Columbia, catalogada sob o número 322, possui seqüências de números correspondentes aos Ternos

Pitagóricos.

Figura 2: Plimpton 322[2]

Em especial, com relação ao triângulo pitagórico de lados 3, 4 e 5, Fossa (no prelo), destaca que

> É o único para que os lados são números consecutivos. Sua área é 6, o próximo número da seqüência numérica, e seu perímetro é duas vezes sua área. O produto dos seus lados é 60, 6 vezes sua área e a base do sistema de numeração babilônico. Mais interessante ainda, o produto dos lados de qualquer triângulo pitagórico é divisível por 60 = 3×4×5. (FOSSA, no prelo)

Essas relações do menor triângulo pitagórico (3, 4, 5) com o número 60, base do sistema de numeração babilônico, pode ser uma justificativa plausível para entender o fato de que esse caso particular era conhecido pelos babilônios antes dos pitagóricos.

Particularmente, alguns historiadores acreditam que os antigos egípcios, antes da era cristã, sabiam que pelo menos o triângulo de lados 3, 4 e 5, possui um ângulo de 90 ^{o}. De fato, eles utilizavam uma corda[3] com treze nós uniformemente espaçados (figura 3), sendo que determinavam um ângulo reto ao unir o primeiro nó com o último e esticando a corda. Acredita-se que isso permitiu que os antigos egípcios estabelecessem as bases para as suas construções com precisão.

[2] Fonte: http://en.citizendium.org/wiki/Number_theory.
[3] Os esticadores de cordas utilizavam as cordas para traçar as bases de templos e para realinhar demarcações apagadas de terra.

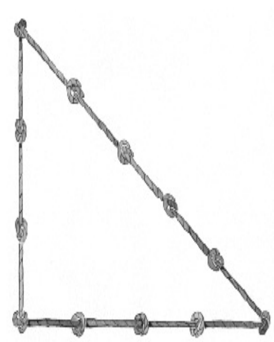


Figura 3: Formação do triângulo (3, 4, 5)
utilizando a corda de 13 nós.

Entretanto, diversos historiadores matemáticos como Eves (1997) e Boyer (1996) ressaltam que nos papiros que chegaram até nós, não há prova que os egípcios tinham conhecimento do Teorema, nem muito menos que eles pudessem demonstrá-lo.

Diante do exposto, emerge a hipótese de van der Waerden-Seidenberg, a qual atribui conhecimento do próprio Teorema de Pitágoras a alguns matemáticos pré-históricos. A referida hipótese discute a presença do Teorema de Pitágoras e dos Ternos pitagóricos em construções antigas. Afirma que em parte, os triângulos pitagóricos tiveram um papel fundamental na matemática pré-histórica.

A hipótese de van der Waerden-Seidenberg é pautada em três "descobertas", a saber:

D1. As três tradições matemáticas – a hindu, a grega e a babilônica – tiveram uma origem comum, na qual uma das preocupações centrais foi a construção de altares, usando o Teorema de Pitágoras.

D2. O próprio Van der Waerden depois de fazer um estudo comparativo sobre a matemática chinesa, e a matemática babilônica, chegou à conclusão de que essas duas matemáticas também tiveram uma origem comum na matemática pré-babilônica. De novo, o Teorema de Pitágoras desempenharia um papel importante na matemática pré-babilônica.

D3. As construções dos monumentos megalíticos[4] tiveram significância na demarcação de certos eventos astronômicos (por exemplo, os equinócios) e, é possível que tenham sido construídas utilizando-se o Teorema de Pitágoras.

Segundo Fossa (no prelo), Van der Waerden, juntando as três "descobertas", especulou que as

[4] Monumento megalítico, ou megálito, do grego *mega, megalos*, grande, e *lithos*, pedra, designa uma construção monumental com base em grandes blocos de pedras rudes.

tradições matemáticas das várias culturas mencionadas anteriormente tiveram uma única origem numa teoria matemática consistente e relativamente bem articulada, contendo, como um conteúdo central, o Teorema de Pitágoras.

2.4.2 Teorema de Pitágoras e Ternos Pitagóricos depois de Pitágoras

Com relação às demonstrações do Teorema de Pitágoras, Lorenzoni e Silva (2002), destacam que Elisha Scott Loomis, professor de Matemática americano, na segunda edição do livro The Pythagorean Proposition, apresentou 370 demonstrações diferentes. Em particular, os referidos autores ilustram diferentes demonstrações de matemáticos estrangeiros e também de brasileiros - professores de Matemática, autores de livros didáticos e alunos.

Evidentemente, desde a Antiguidade, muitas demonstrações vêm sendo propostas para o Teorema de Pitágoras. Nesse contexto, muitos pesquisadores, em especial, Lorenzoni e Silva (2002), defendem que uma das mais antigas e conhecidas é a que aparece no livro I dos Elementos de Euclides, escrito por volta do ano 300 a.C.

A proposição I 47 é o Teorema de Pitágoras com uma demonstração atribuída universalmente ao próprio Euclides e a proposição final, I 48, é o recíproco do Teorema de Pitágoras. Curiosamente, a demonstração do Teorema de Pitágoras dada por Euclides representada pelo diagrama da figura (4), é conhecido às vezes como capelo franciscano ou cadeira de noiva.

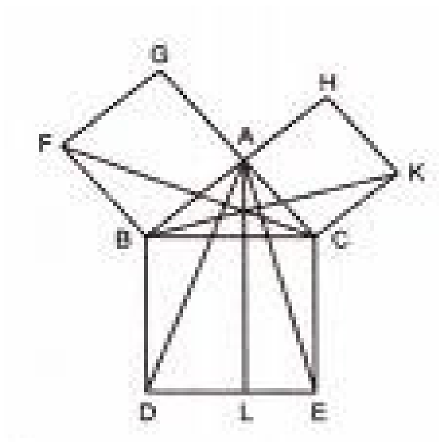


Figura 4: Representação utilizada por Euclides

Particularmente, o geômetra grego Papus, apresentou uma generalização elementar do Teorema de Pitágoras. Entretanto, não se sabe se tal generalização é mesma de Papus. Boyer

(1996) enfatiza que há possibilidades de que Heron já a conhecia.

Fermat, considerado o fundador da moderna Teoria dos Números, realizou estudos utilizando os números perfeitos e amigáveis, números figurados, quadrados mágicos, ternos pitagóricos, divisibilidade, e acima de tudo, números primos. Em especial, o chamado Último Teorema de Fermat, segundo o qual questiona-se sobre a possibilidade da "soma de dois cubos resultar em um cubo", em outras palavras, se é possível existir um terno de números inteiros (m, n, p) tal que $m^3+n^3 = p^3$, indiscutivelmente, teve como fonte inspiradora o Teorema de Pitágoras.

2.4.3 Importância do Teorema de Pitágoras e dos Ternos Pitagóricos

Modenarmente, não só matemáticos e estudiosos se preocuparam em oferecer uma demonstração ao Teorema de Pitágoras. Dentre os que não são matemáticos, destacamos Leonardo da Vinci (1452-1519 e o presidente americano James Abram Garfield (1831-1881).

Dois exemplos do reconhecimento não só da fama, como também da importância do Teorema de Pitágoras, foi que em 1955, a Grécia emitiu um selo (figura 5) para comemorar o 2500º aniversário de Pitágoras e em 1971 na Nicarágua, ocorreu o lançamento de uma série de selos postais para homenagear as dez fórmulas matemáticas mais importantes do mundo, sendo que um dos selos é dedicado ao Teorema de Pitágoras.

Figura 5: Selo em homenagem ao 2500º aniversário de Pitágoras[5]

Eves (1997) tece o seguinte comentário com relação à homenagem realizada pela Nicarágua:

[5] Fonte: http://www.malhatlantica.pt/mathis/problemas/pitagoras/pitagoricos.htm.

> Deve ser extremamente gratificante para cientistas e matemáticos ver suas fórmulas assim homenageadas, pois essas fórmulas certamente contribuíram muito mais para o desenvolvimento da humanidade do que os feitos de reis e generais que muitas vezes se estampam em selos postais. (EVES,1997, p. 347)

Forte indício da influência da matemática e da ciência na sociedade.

Com relação às aplicações, o Teorema de Pitágoras e os Ternos Pitagóricos são empregados na solução de inúmeros problemas práticos, em especial, na engenharia civil. Sobretudo, por conta da rigidez do triângulo há sua presença em muitas estruturas de madeira ou ferro em construções, como por exemplo, a tesoura do telhado[6] (figura 6) e a porteira de fazenda com travessa (figura 7).

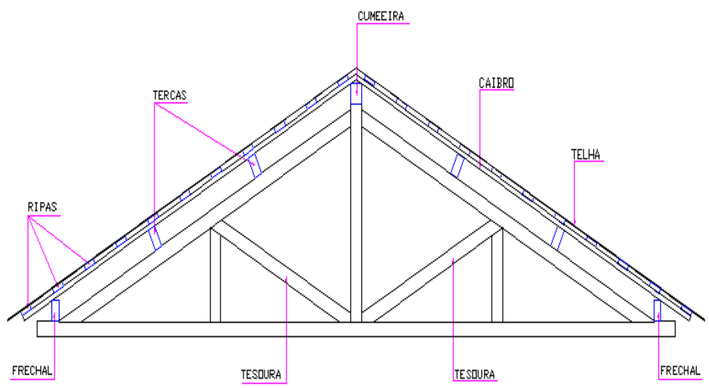


Figura 6: Armação de um telhado[7]

Figura 7: Porteira de fazenda com travessa[8]

[6] Estrutura feita com vigas de madeiras, principal elemento de sustentação, o qual transfere o peso do telhado para os pilares ou paredes da casa.
[7] Fonte: http://www.cesec.ufpr.br/~tc407/00/aulas/11.html.
[8] Fonte: http://www.centraldocampo.com.br/construcao_itabira.htm.

Particularmente uma aplicação dentro da própria Matemática é o cálculo da diagonal de um quadrado cujo lado tem medida l (figura 8). A diagonal divide o quadrado em dois triângulos retângulos iguais, cujos catetos medem l e cuja hipotenusa é igual à diagonal d do quadrado. Aplicando o Teorema de Pitágoras temos: $d^2 = l^2+l^2 \rightarrow d^2 = 2l^2 \rightarrow d = \sqrt{2l^2} \rightarrow d = l\sqrt{2}$

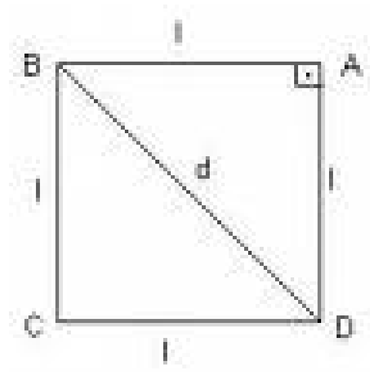


Figura 8: Diagonal de um quadrado

Um dado importante, é que o Teorema de Pitágoras pode ser considerado um caso particular das leis dos cossenos[9].

Por fim, outra aplicação é o cálculo da distância entre dois pontos, de fundamental importância para a Matemática e para a Física. A distância d entre os pontos A e B é a medida do segmento. Como o triângulo destacado (figura 9) é retângulo, posto que a distância é a hipotenusa do referido triângulo, aplicando o teorema de Pitágoras temos: $d = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$.

[9] $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos C$.

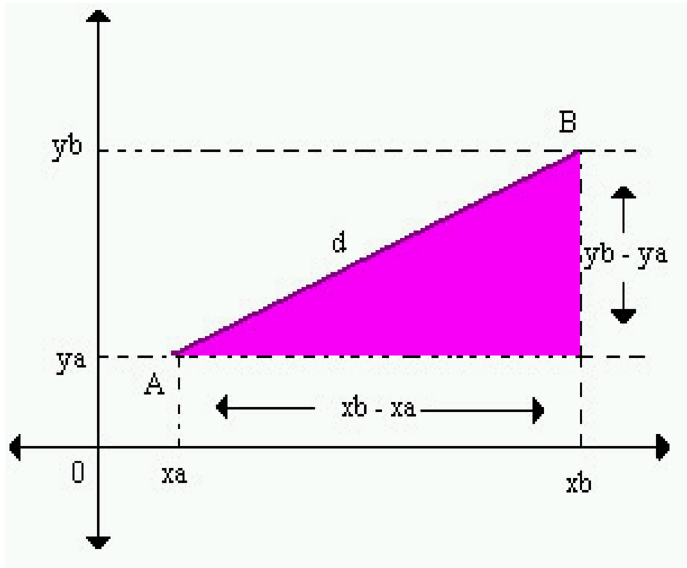


Figura 9: distância entre dois pontos.

2.5 Apreciação da obra Recherche méthodique et propriétés des triangles rectangles en nombres entiers

A presente sessão é destinada a apresentarmos uma descrição da obra intitulada *Recherche méthodique et propriétés des triangles rectangles en nombres entiers,* nossa principal fonte na elaboração do módulo de ensino.

A obra *Recherche méthodique et propriétés des triangles rectangles en nombres entiers*, de autoria do francês Eugène Bahier , data de publicação 1916, é constituída de 266 páginas, sendo organizada em introdução seguida de nove capítulos, três tábuas numéricas e um índice que se encontra no final da obra. Por não termos acesso a uma versão impressa, dispomos de uma versão eletrônica. Em relação às credenciais do autor, a única informação que temos é que ele era um engenheiro.

O problema apresentado na referida obra é as propriedades dos grupos dos três números inteiros que satisfazem a relação $a^2 + b^2 = c^2$. Bahier (1916) justifica que apesar de aparentemente fúteis e da provável falta de aplicações práticas, vários desses problemas já se encontram em obras de ilustres personalidades, como por exemplo: Platão (427-347 a.C), Pitágoras (cerca de 572-497 a.C), Euclides (cerca de 323-285 a.C), Diofanto (séc. IV d.C), Bachet de Mèziriac (1581-1638), Fermat (1601-1655), Frenicle de Bessy (1605-1675). Ele considera que recentemente, os progressos advindos da Teoria dos Números por Euler (1707-1783), Lagrange (1736-1813), Legendre (1752-1833), Gauss (1777-1855), etc., tem permitido oferecer elegantes soluções a certas propriedades do triângulo retângulo em números inteiros.

Além das personalidades citadas anteriormente, Bahier (1916) destaca Edouard Lucas (1842-1891), o qual tratou de muitos problemas sobre triângulos retângulos em números inteiros ao longo de sua obra sobre a Teoria dos Números. Particularmente, Bahier foi aluno de Edouard Lucas, o que nos leva a acreditar que esta tenha sido a fonte inspiradora e motivadora para que Bahier escrevesse a obra que analisamos.

Bahier (1916) une nessa obra os mais notáveis dentre os numerosos problemas aos quais pouco se ocasionou a Teoria dos Triângulos Retângulos em números inteiros, que já se encontram indicados nas obras dos sábios, cujos nomes foram citados.

O Capítulo I da obra é reservado para destacar algumas noções básicas e definições que são necessárias para compreender o conteúdo da obra. Primeiramente é explicitada a definição de *triângulo retângulo em números inteiros*, como sendo um triângulo retângulo de forma que seus três lados são expressos por números inteiros. Por conseguinte, é apresentado a definição de relação *primitiva ou triângulo primitivo*. É no Capítulo I, que são enunciados e demonstrados os dois primeiros teoremas apresentados na obra, além da apresentação da importante relação fundamental para encontrar todos os triângulos por meio de dois números geradores. Em decorrência do exposto, Bahier encerra o capítulo com a apresentação de sete propriedades imediatas dos triângulos primitivos.

O Capítulo II consideramos como um dos mais importantes. Nele é destacada a generalidade da relação fundamental e apresentado alguns casos particulares, que nos conduzem a possibilidade de construir uma Tábua que agrupa valores associados de a, b e c, em função do número gerador x, permitindo calcular facilmente, os sucessores, considerando $1 \leq x \leq 25$.

Por sua vez, o terceiro capítulo é destinado a apresentar treze propriedades do número c, ou seja, da hipotenusa. Entretanto, dentre as treze propriedades somente uma, a oitava, é enunciada diretamente. As demais aparecem implícitas, nos enunciados de sete teoremas e de cinco problemas, o que particularmente, consideramos como uma boa maneira de envolver o leitor. Outro ponto a ser destacado no referido capítulo, é que em muitos desses teoremas e problemas, Bahier deixa explícito quais deles foram motivos de estudo e interesse de ilustres personalidades, como por exemplo, Fermat e Euler.

O Capítulo IV tem sua particularidade, por ser destinado a apresentar uma discussão contendo não só a Álgebra, como também a Geometria. Bahier expressa alguns elementos notáveis, em função dos números geradores, tais como os lados do triângulo retângulo, perímetro, área, altura relativa à hipotenusa, raios dos círculos inscritos e circunscritos, bissetriz. Em especial, o Teorema de Fermat: “A área do triângulo retângulo em números inteiros nunca será um número quadrado, nem a metade de um número quadrado”, é enunciado e demonstrado no referido capítulo. Bahier nos apresenta uma demonstração por absurdo, utilizando algumas informações dadas por Fermat, priorizando os triângulos primitivos, uma vez que demonstrado para os primitivos, o teorema também é válido para os secundários.

O quinto Capítulo é destinado a retratar o problema: “Encontrar todos os triângulos retângulos em números inteiros nos quais a diferença dos catetos é igual a um número dado”. Bahier acredita que antes da publicação dessa obra, apenas são indicadas soluções específicas deste problema e que nenhum método geral de investigação, como o proposto por ele, ainda não tinha sido publicado.

No sexto Capítulo, Bahier enuncia e soluciona três problemas relacionados ao perímetro. O primeiro problema propõe pesquisar os triângulos cujo perímetro e a área são expressos pelo mesmo número. O segundo problema é destinado a pesquisar os triângulos retângulos a partir de um número dado para o perímetro, em diversos casos particulares, considerando p como sendo o produto de fatores primos. O último problema apresentado no referido capítulo, propõe determinar os triângulos retângulos cujo perímetro é expresso por um número quadrado. Em suma, Bahier não tem o propósito de pesquisar se existe um ou vários triângulos que satisfazem o problema em questão, e sim, determinar para quais valores atribuídos aos números geradores x e y, o triângulo retângulo gerado terá como perímetro um número quadrado.

No sétimo Capítulo, Bahier enuncia e soluciona três problemas relacionados à área. O primeiro problema apresentado intenciona formar grupo de três triângulos cujas áreas são iguais. O segundo problema consiste em pesquisar sobre n triângulos retângulos que possuem a mesma superfície. O último problema apresentado no referido capítulo, que foi motivo de interesse de Fermat, é o seguinte: Encontrar três triângulos retângulos em números inteiros cujas áreas são os lados de um quarto triângulo retângulo. A demonstração apresentada por Bahier é baseada em algumas considerações dadas por Fermat, ao solucionar esse problema.

O penúltimo Capítulo é composto por uma diversidade de problemas. Os dez problemas que são apresentados obedecem a seguinte estrutura: enunciado, generalizações, estudo de casos específicos, exemplos numéricos, salvo em alguns casos.

No ultimo Capítulo o autor nos apresenta um estudo das soluções em números inteiros da equação indeterminada $a^2+b^2+c^2 = d^2$. Segundo Bahier, esse problema é apresentado com o mesmo interesse que foi dado a pesquisa das soluções em números inteiros da equação indeterminada a dois termos, $a^2+b^2 = c^2$, e suas propriedades. Além disso, ele afirma que nesse problema também há facilidade em estabelecer que um valor qualquer tomado como valor de a, sempre corresponderá a um número ilimitado de grupos de valores para b, c, e por conseqüência, d. Analogamente ao problema onde o foco era a relação $a^2+b^2 = c^2$, nesse capítulo são determinadas as condições dos termos a e b, na equação $a^2+b^2+ c^2 = d^2$, devendo considerados três casos, a saber: um dos dois números é ímpar; todos os dois são simplesmente pares; todos os dois sãos múltiplos de 4. Além disso, é estabelecido que a, b, e c não podem ser todos os três ímpares. Outro ponto discutido, é a interpretação geométrica da relação $a^2+b^2 = c^2$, a qual nos conduz aos números d dos números diagonais. Com isso, a pesquisa da equação $a^2+b^2+ c^2 = d^2$, parte do número diagonal d.

Em anexo, Bahier nos apresenta três tábuas numéricas, cujos conteúdos descreveremos a seguir.

Tábua I: todos os triângulos primitivos $a^2+b^2 = c^2$, em números inteiros, obtidos a partir do valor de a ou de b entre 2 e 301.

Tábua II: todos os triângulos $a^2+b^2 = c^2$, em números inteiros, obtidos com a ou b igual a 840.

Tábua III: valores dos primeiros termos das seqüências conjugadas $\sum$ e $\sum$', e das seqüências derivadas de T e T', pelos diversos valores de $p = 8q$ +/- 1 até $p = 113$.

O quadro a seguir, nos apresenta, de forma concisa, uma descrição do conteúdo matemático dos nove capítulos e das três tábuas numéricas contidas na obra.

Quadro 1: Conteúdo matemático da obra

RECHERCHE MÉTHODIQUE ET PROPRIÉTÉS DES TRIANGLES RECTANGLES EN NOMBRES ENTIERS
Capítulo I: Définitions et propriétés fondamentales [Definições e propriedades fundamentais] o Definições de: triângulo retângulo em números inteiros, relação primitiva ou triângulo primitivo, relação secundária ou triângulo secundário; o Enunciado e demonstração de dois teoremas; o Relação fundamental para encontrar todos os triângulos por meio de dois números geradores; o Sete propriedades imediatas dos triângulos primitivos;
Capítulo II: Recherche méthodique des triangles primitifs [Pesquisa metódica de triângulos primitivos] o Generalidade da relação fundamental; o Alguns casos particulares, a partir da relação fundamental; o Construção de uma Tábua que determina todos os triângulos primitivos, para os valores ímpares de *a*[10];
Capítulo III: Quelques propriétés des nombres hypoténuses [Algumas propriedades das hipotenusas] o Treze propriedades do número *c*, ou seja, da hipotenusa;
Capítulo IV: Quelques propriétés géométriques des triangles rectangles en nombres entires [Algumas propriedades geométricas de triângulos retângulos em números inteiros] o Expressão dos lados do triângulo retângulo, do perímetro, da área, da altura

[10] Os termos *a* e *b* representam os catetos do triângulo retângulo e o termo *c* representa a hipotenusa.

relativa à hipotenusa, dos raios dos círculos inscritos e circunscritos e da bissetriz em função dos números geradores;

- Algumas propriedades geométricas dos triângulos retângulos em função dos números geradores;

Capítulo V: Étude de quelques propriétés de suites récurrentes

[Estudo de algumas propriedades de seqüências recorrentes]

- Solução do problema: Encontrar todos os triângulos retângulos em números inteiros nos quais a diferença dos catetos é igual a um número dado;

Capítulo VI: Problémes relatifs au périmétre

[Problemas ralacionados ao perímetro]

- Enunciado e solução de três problemas relacionados ao perímetro;

Capítulo VII: Problémes relatifs a la surface

[Problemas relacionados à área]

- Enunciado e solução de três problemas relacionados à área;

Capítulo VIII: Problémes Divers

[Problemas diversos]

- Apresentação de dez problemas;

Capítulo IX: Étude del l'équation indéterminée $a^2+b^2+c^2 = d^2$

[Estudo da equação indeterminada $a^2+b^2+c^2 = d^2$]

- Soluções em números inteiros da equação indeterminada $a^2+b^2+c^2 = d^2$;

- Interpretação geométrica da relação $a^2+b^2+c^2 = d^2$;

Tábuas Numéricas[11]

- Tábua I: todos os triângulos primitivos $a^2+b^2 = c^2$, em números inteiros, obtidos a partir do valor de *a* ou de *b* entre 2 e 301;
- Tábua II: todos os triângulos $a^2+b^2 = c^2$, em números inteiros, obtidos com *a* ou *b* igual a 840;
- Tábua III: valores dos primeiros termos das seqüências conjugadas $\sum$ e $\sum'$, e das seqüências derivadas de T e T', pelos diversos valores de $p = 8q$ +/- 1 até $p = 113$;

Didaticamente, o autor aborda o conteúdo de maneira satisfatória, estruturando a obra de forma que proporciona ao leitor uma linguagem clara e consistente, nos fornecendo algumas características norteadoras, a saber: exemplos numéricos, observações e notas, retomando, sempre que é preciso, informações citadas em capítulos anteriores, além de nos apresentar uma seqüência lógica e sistematizada, proporcionando equilíbrio entre as partes. Entretanto, ressaltamos que o título da obra corresponde ao conteúdo apresentado, bem como os subtítulos que refletem bem o espírito de cada sessão.

Um exemplo da preocupação de Bahier em deixar claro suas idéias, é o fato de que quando não se faz necessário demonstrar um determinado teorema, ele diz quem realizou a demonstração do mesmo e onde encontrá-la. Outro ponto a ser destacado, é o cumprimento das promessas realizadas. Exemplo disso são as demonstrações simples e claras dos problemas propostos, proporcionando coerência entre os objetivos e as conclusões. Entretanto, mesmo tendo o conteúdo apresentado de forma clara, é válido ressaltar a necessidade de conhecimentos prévios, como por exemplo, demonstrar teoremas, para uma melhor compreensão por parte do leitor.

Conforme a análise realizada, consideramos que a obra *Recherche méthodique et propriétés des triangles rectangles en nombres entiers,* sua estrutura e suas idéias apresentadas, podem ser consideradas como uma importante contribuição nas reflexões acerca dos problemas relacionados aos triângulos retângulos em números inteiros, e por conseqüência, aos Ternos Pitagóricos. Em

[11] Na presente investigação não analisamos o conteúdos dessas tábuas numéricas.

particular, sua relevância para a Educação Matemática, se deve a completude, originalidade e ao resgate histórico do assunto matemático em questão, tendo destaque a preocupação de Bahier em enfatizar problemas que foram motivos de interesse e de estudos de ilustres personalidades ao longo da história.

Por fim, mesmo o autor não deixando claro o público alvo a quem a obra se destina, nossas considerações sobre uma possível indicação da obra se refere a alunos, professores e estudiosos que tenham interesse nos estudos relacionados à teoria sobres os triângulos retângulos em números inteiros, podendo a mesma ser adotada em um curso de Teoria dos Números. Particularmente, levando em consideração as idéias criativas, novos conhecimentos a serem desenvolvidos, e a abordagem inovadora e efetiva para o ensino, presentes na referida obra, com a finalidade de verificar seu potencial pedagógico, elaboramos um módulo de ensino que foi ministrado na disciplina Teoria dos Números, da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, conforme descreveremos no próximo capítulo.

3. TERNOS PITAGÓRICOS UMA FERRAMENTA PARA COMPREENSÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

O presente capítulo é destinado a apresentar o planejamento, a execução e a análise do módulo de ensino, que realizamos como atividade didática operacionalizada em sala de aula. Focalizamos os Ternos Pitagóricos, tendo como principal referencial a obra *Recherche méthodique et propriétés des triangles rectangles en nombres entiers*, de Eugène Bahier, em que o conceito é estudado de forma sistemática.

Em relação à análise dos dados, ela acontece não só no final, mas como também ao longo da descrição da intervenção.

3.1 Aperfeiçoamento do instrumento

Antes de aplicarmos, o módulo de ensino em questão, idealizamos a intervenção com um projeto piloto[12] que fora testado em uma turma composta por alunos do curso de Licenciatura em Matemática da UFRN, matriculados na disciplina Teoria dos Números – primeiro semestre do ano de 2008. Na oportunidade, notamos alguns aspectos insatisfatórios, em relação à elaboração e aplicação do módulo de ensino, tais como: divisão do conteúdo, número de encontros, quantidade de conteúdo e atividades que muitas vezes não estimulavam participação por parte dos alunos. Outro aspecto insatisfatório foi a falta de compreensão, por parte dos alunos, com alguns enunciados.

Em conseqüência dos problemas detectados no projeto piloto, ficamos mais atentos e adequamos o instrumento nos aspectos citados anteriormente, melhorando assim a intervenção. As modificações foram as seguintes: redução do conteúdo por encontro, aumento do número de encontros, atividades valorizando e estimulando a participação dos alunos, realização das atividades em dupla, mais clareza nos enunciados das questões a serem trabalhada e na atribuição da nota levamos em consideração a freqüência.

[12] Nesse estudo, não apresentaremos nem analisaremos os dados obtidos no projeto piloto.

3.2 Contexto

O módulo de ensino "Ternos Pitagóricos: uma ferramenta pedagógica no ensino do Teorema de Pitágoras" foi desenvolvido durante sete encontros de duas horas aula cada, 14 h/a, tendo como público alvo, vinte e nove alunos do curso de Licenciatura em Matemática da UFRN e um aluno do Bacharelado, matriculados na disciplina Teoria dos Números – segundo semestre do ano de 2008. O conteúdo central foi os Ternos Pitagóricos, sob um enfoque histórico.

3.3 Objetivos do módulo de ensino

3.3.1 Objetivo Geral

O objetivo geral do módulo de ensino foi levar os futuros professores de matemática à apreciação de uma prática que possibilite a reflexão da utilização dos Ternos Pitagóricos como uma ferramenta pedagógica no ensino do Teorema de Pitágoras.

3.3.2 Objetivos Específicos

Ao final do módulo de ensino, esperamos que o futuro professor seja capaz de:

1. Entender o desenvolvimento histórico do Teorema de Pitágoras;
2. Reconhecer a importância do Teorema de Pitágoras, no ensino de Matemática.
3. Compreender a definição dos Ternos Pitagóricos;
4. Reconhecer a importância do estudo dos Ternos Pitagóricos para a futura prática docente;
5. Diferenciar o uso da História da Matemática como recurso pedagógico do uso da História da Matemática como elemento motivador.

3.4 Metodologia

O percurso metodológico consistiu em três momentos, a saber:

3.4.1 Momento I

Antes de iniciarmos a intervenção, aplicamos um questionário (anexo A), que nos serviu como diagnóstico, para identificar as idéias prévias dos alunos, com relação aos Ternos Pitagóricos. Em outras palavras, esse questionário é o instrumento inicial que nos ajudou a definir com mais precisão nossos objetivos específicos.

Nosso propósito com o questionário foi identificar as concepções dos futuros professores de Matemática, alunos da disciplina Teoria dos Números, acerca de três aspectos, a saber:

1. Teorema de Pitágoras: desenvolvimento histórico e importância para o ensino;
2. Ternos Pitagóricos: definição, importância do seu estudo, desenvolvimento histórico;
3. A História da Matemática como recurso pedagógico.

Além disso, realizamos algumas perguntas, relacionadas à formação, tais como: Por que Licenciatura em Matemática? Já leciona? Expectativas?

3.4.2 Momento II

O momento II consiste no desenvolvimento dos seguintes conteúdos:

1. Desenvolvimento histórico, interrelacionando os Ternos Pitagóricos com o Teorema de Pitágoras;
2. O uso da História da Matemática como recurso pedagógico;
3. Importância do estudo dos Ternos Pitagóricos;
4. Ternos Pitagóricos: definição, fórmula paramétrica, construção de uma tábua contendo alguns ternos primitivos, alguns teoremas.

O momento II consistiu na aplicação didática do módulo de ensino. Com o intuito de obter não só uma boa produtividade individual, como também coletiva, as atividades que foram realizadas nos seis encontros, tais como, exercícios por escrito, participação oral, exposição na lousa, sempre foram realizadas em duplas. Por estar inserido em uma disciplina do curso de graduação, houve a necessidade de atribuir nota. No decorrer dos encontros, fornecemos algumas dicas de dinâmicas de grupo e metodologias que podem ser úteis à futura prática docente dos alunos.

3.4.3 Momento III

No final, aplicamos uma avaliação escrita (anexo B), com o intuito de registrar por escrito as respostas dadas pelos alunos, às atividades relacionadas ao que foi apresentado no desenvolvimento do módulo de ensino. Analisaremos as informações coletadas com a finalidade de inferir quanto à eficácia do trabalho realizado.

3.5 Desenvolvimento do módulo de ensino

As atividades que projetamos foram realizadas em sete encontros. Essa sessão é destinada a realizar uma descrição sobre nossa intervenção pedagógica**.**

3.5.1 Encontro I

Após uma breve apresentação, foi entregue aos alunos o questionário para que eles respondessem. Essa subseção será destinada a descrever os dados obtidos através do questionário, bem como as cabíveis inferências.

Em relação à estrutura, o questionário foi subdividido em cinco sessões, a saber: sessão A- destinada a coleta de dados pessoais, sessão B – direcionada a identificar o perfil do histórico escolar dos alunos, sessão C- sete perguntas relacionadas à futura prática docente, sessão D, composta por quatro perguntas relacionadas ao Teorema de Pitágoras, sessão E - composta por duas perguntas relacionadas aos Ternos Pitagóricos.

À guiza de informação, transcreveremos a seguir, os enunciados das questões das sessões D e E, as quais envolvem o conteúdo matemático em foco.

D1: O que você conhece sobre o desenvolvimento histórico do Teorema de Pitágoras?

D2: Em sua opinião, qual a importância do estudo do Teorema de Pitágoras?

D3: Você conhece alguma aplicação? Qual?

D4: Imagine que você está em uma sala de aula, ensinando sobre o Teorema de Pitágoras. Suponhamos que com o intuito de exemplificar triângulos que satisfazem o Teorema de Pitágoras, ao olhar para suas anotações, você percebe que sua irmã mais nova pintou de esmalte preto, os números correspondentes aos catetos e as hipotenusas dos três triângulos que você havia copiado do livro didático que você esqueceu em cima da sua cama. Considerando que o professor é um artista, que necessita de criatividade para agir de acordo com sua necessidade, o que você faria? Imediatamente, você seria capaz de dar valores aos números que sua irmã pintou? Quais seriam esses valores?

E1: O que você sabe sobre ternos pitagóricos?

E2: Você considera importante o estudo dos ternos pitagóricos para os futuros professores de Matemática? Justifique sua resposta.

A seguir, apresentamos um quadro com uma síntese de alguns dados obtidos.

Quadro 2: Alguns dados dos alunos

aluno	**sexo**	**idade**	**semestre**	**tempo que leciona**	**RESPONDEU**					
					D1	**D2**	**D3**	**D4**	**E1**	**E2**
A	m	28	6°	-	x	x	x	x		
B	m	32	4°	-				x		
C	f	19	4°	9 meses	x	x	x	x	x	x
D	f	20	6°	1 semana	x	x	x	x	x	x
E	f	20	6°	-	x			x		
F	f	24	8°	1 ano	x	x	x			
G	m	24	4°	2 meses	x	x	x	x		x
H	f	23	8°	4 anos	x	x	x	x		
I	m	22	4°	2 anos	x	x	x	x		x
J	m	21	4°	-	x	x	x			x
K	f	22	4°	-	x	x	x	x		
L	f	23	8°	4 meses			x	x		

aluno	sexo	idade	semestre	tempo que leciona	RESPONDEU					
M	f	21	6°	-						
N	m	20	4°	-		x	x	x		
O	m	22	6°	-		x	x	x		x
P	f	21	4°	1 mês					x	
Q	m	21	4°	-	x	x	x			x
R	m	19	4°	-			x		x	x
S	f	18	4°	-				x	x	x
T	m	32	4°	-	x	x	x	x	x	x
U	f	20	6°	2 anos	x	x	x		x	x
V	m	30	4°	1 ano			x	x		
W	m	21	4°	-						
X	m	19	6°	-	x	x	x	x		x
Y	m	24	4°	-				x		
Z	m	34	4°	-				x		x
A'	m	45	6°	-	x					
B'	m	21	4°	-	x	x	x	x	x	x
C'	m	24	4°	-	x	x	x			x
D'	m	32	6°	-	x	x	x	x	x	x

Todos os alunos que participaram do módulo de ensino responderam ao questionário, totalizando assim, trinta questionários, sendo 11 mulheres e 19 homens. Em relação à faixa etária dezenove alunos possuem idades entre 20 e 25 anos, quatro alunos possuem menos de 20 anos e sete alunos possuem mais de 25 anos. No que diz respeito à vida escolar (Ensino Fundamental e Ensino Médio), o que predomina é o ensino público, em sua maioria cursados no estado do Rio Grande do Norte. Somente três alunos tiveram sua vida escolar totalmente no ensino privado.

Dos trinta alunos, dezoito fazem parte do quarto semestre, nove do sexto semestre, e apenas três alunos F, H e L do oitavo semestre. Outro ponto a ser enfatizado é que o aluno W é do curso de Bacharelado em Matemática. Entretanto, também o consideramos como um sujeito da investigação.

Em sua maioria, a escolha pela Licenciatura é justificada pela afinidade com a disciplina, no ensino básico, e pelo desejo de ensinar, em alguns casos, estimulados por professores. Segundo o aluno K: “gosto muito dos números, cálculos e de ajudar aqueles que têm dificuldades com a disciplina”. O aluno B’ relata que: “... tive o prazer em ensinar e gostei, por isso que estou aqui”.

Dentre os participantes, dez já lecionam, sendo que somente cinco lecionam há no mínimo um ano. Entretanto, a repulsão em ensinar, que é freqüente entre os alunos do bacharelado, não se limita ao aluno W. Observamos que os alunos E, I, T, Y e Z deixam claro que não pretendem lecionar. O aluno I relatou que: “... não desejo investir na profissão, apenas complementar o que tenho”, o aluno Y destaca que: “ ... pretendo passar para algum concurso ... de preferência para não ensinar”, já o aluno Z justifica que sua opção pelo curso de Licenciatura em Matemática, se deve pela facilidade em concluir o curso.

Mesmo não sendo a maioria com experiência em sala de aula, um ponto a ser discutido são os problemas a serem enfrentados na sala de aula, que foram relatados. Destacam-se: desinteresse e dificuldade de aprendizagem por parte dos alunos, falta de recursos didático-pedagógicos nas escolas públicas, falta de compromisso da escola com os alunos e com os professores, falta de incentivo e investimento por parte dos governantes e a dificuldade em associar os conteúdos trabalhados com o cotidiano. O curioso é que apenas o aluno B’ apontou a questão salarial como sendo um problema. Dentre os alunos, somente o aluno S declarou não ter conhecimento sobre eventuais problemas a serem enfrentados pelos futuros professores de Matemática em sua atividade docente. Destacamos as palavras da aluna S: “Existe problema? Acho que não!”.

As respostas dadas ao que vêm a ser um bom ensino de Matemática foram diversificadas, as quais destacam-se: dispor de recurso didático, todos aprendam o conteúdo, conteúdo de forma clara e objetiva, associação dos conteúdos ao cotidiano. Em particular, o aluno O, relata que: “... aquele que desenvolve a argumentação lógica...” e o aluno S enfatiza a necessidade de fazer com que os alunos sejam estimulados a refletir, e não só calcular. Mesmo a maioria não possuindo experiência em sala de aula, e os alunos do quarto semestre ainda não terem cursado as disciplinas relacionadas à educação é notório a reflexão dos mesmos acerca de um ensino de qualidade. Em contrapartida, o aluno W argumentou que um bom ensino é aquele em que o professor consegue “passar” seus conhecimentos para o aluno.

Um ponto crítico a ser discutido, é a concepção dos alunos sobre o que é Educação

Matemática. Dentre os participantes, onze alunos não responderam à pergunta, sendo a distribuição por semestre a seguinte: oito alunos do quarto semestre, dois alunos do sexto semestre e um aluno do oitavo semestre. Entretanto, dentre as vinte respostas, mesmo havendo certos equívocos, somente as dos alunos F e H, do oitavo semestre, e os aluno A e D do sexto semestre, são coerentes. A seguir, apresentamos os argumentos dados pelos alunos F, H, A e D.

Aluno F: "É o estudo das práticas de ensino de matemática, procurando buscar sempre melhoria para o ensino".

Aluno H: "Uma parte da matemática que estuda a didática, a forma de se trabalhar com os alunos".

Aluno A: "É um estudo que busca soluções de como ensinar matemática".

Aluno D: "É a área da educação que dar suporte ao ensino de matemática, no sentido de dar meios e possibilidades de melhorar as formas de lecionar os conteúdos matemáticos".

Em suma, as demais respostas convergem para a seguinte explicação: quem ensina matemática está praticando Educação Matemática ou ainda quem aprende Matemática é educado matematicamente, sendo assim foi preciso a Educação Matemática. A seguir, apresentamos alguns argumentos que foram dados.

Aluno K: "... aquele que tem educação matemática tem habilidades para resolver problemas matemáticos e conhece sobre sua história".

Aluno G: "A habilidade do aluno em lidar com números e operações no dia-a-dia".

Aluno I: "Aprender a fazer conta".

Aluno B': "É uma forma de fazer o aluno raciocinar, ou seja, ele próprio construir seu conhecimento lógico, com o auxílio do professor".

Em relação às metodologias que auxiliam no ensino de Matemática, emergiu uma diversidade de exemplos, a saber: Jogos, Resolução de Problemas, História da Matemática, Uso de Computadores, Materiais Manipulativos, Modelagem Matemática, Etnomatemática.

Somente os alunos E e W não responderam a pergunta "Em relação ao uso da História da Matemática, para você ela é necessária no ensino de Matemática?". Dentre as respostas dadas, somente as dos alunos G e Y não são favoráveis ao uso da História da Matemática. O aluno G argumentou que "... gosto da matemática aplicada direta, sem muita história. Não preciso saber de onde veio" e o aluno Y não justificou sua resposta.

Em relação às respostas favoráveis ao uso da História da Matemática, a maioria diz respeito à necessidade de conhecer a origem e "de onde vêm" as fórmulas. Entretanto há outras justificativas a seguir transcreveremos algumas delas.

Aluno F: "... é de fundamental importância para uma melhor compreensão da matemática".

Aluno K: "... aprender sobre algo, sempre é melhor quando busca entender sua história".

Aluno M: "... talvez entendendo o desenrolar da história dos conceitos, os alunos dêem mais valor a essa disciplina".

Aluno O: "... se usada corretamente, pode ser atrativa e interessante".

Aluno U: "... serve de suporte para um bom entendimento da disciplina".

Aluno X: "Sim. Para refletir sobre como os problemas foram surgindo ao longo dos tempos e como a matemática surgiu e se desenvolveu, para resolver estes problemas".

Aluno A': "... precisamos mostrar que a matemática é feita por homens".

Aluno B': "... mostra que a matemática não surgiu por acaso".

Aluno D': "... nos dá embasamento e desperta a curiosidade do aluno".

A preocupação do aluno R quando argumenta que "infelizmente é muito difícil introduzir esse conteúdo mais específico".

Conforme verificamos, a maioria das respostas converge para utilização de episódios históricos com o intuito de motivar os alunos para a aprendizagem matemática. Com isso, o aluno pode entender as origens da Matemática e passar a ter interesse pela mesma.

Em relação ao Teorema de Pitágoras, realizamos quatro perguntas, sendo uma situação problema envolvendo o Teorema e as demais priorizaram três aspectos, a saber: desenvolvimento histórico, importância para o ensino e aplicação, sendo o número de respostas dadas aos referidos aspectos, respectivamente, dezenove, dezoito e vinte e um. O número de respostas dadas à situação problema foi vinte e um. Um ponto a ser destacado é que dentre as respostas dadas poucas foram pertinentes, cuja discussão traçaremos a seguir.

A importância e a aplicação do Teorema de Pitágoras foram justificadas por diversos motivos, a saber: ajuda a compreender uma parte do mundo; grande aplicabilidade no cotidiano e em diversas áreas; resolve problemas da geometria. Segundo o aluno A, "... é utilizado tanto na matemática quanto em outras áreas, como por exemplo, física, astronomia e engenharia civil". Uma justificativa mais geral é apresentada pelo aluno Y ao afirmar que a importância em estudar o Teorema é a "possibilidade de adquirir mais conhecimento". Por fim, destacamos o argumento dado pelo aluno O: "Seu estudo nos leva a perceber várias aplicações da matemática no cotidiano, o que nos ajuda a resolver alguns problemas do dia-a-dia". O referido aluno acrescenta que uma importante aplicação é o cálculo de distâncias.

Dentre os que responderam à pergunta com relação ao que sabem sobre o desenvolvimento histórico do Teorema de Pitágoras, muitos afirmam conhecer, embora justifiquem que não lembram, outros simplesmente respondem com um sim, sem descrever o que sabem. Segundo o aluno K "... muito pouco. Já paguei uma disciplina que relatava sobre o assunto mais não me lembro", já o aluno U argumenta que "... já tive acesso ao desenvolvimento, mas não me recordo".

Os alunos A, F e J respondem superficialmente, conforme constataremos em seus argumentos:

Aluno A: "... seu desenvolvimento se deve a Pitágoras".

Aluno F: "... algo sobre a história de Pitágoras, a escola pitagórica e seus discípulos".

Aluno J: "Bem, Teorema de Pitágoras é um dos famosos teoremas que Pitágoras provou através de um triângulo retângulo. Ficou demonstrado que em todo triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos".

Somente os alunos D, T, B' e D' apresentam respostas mais consistentes sobre o desenvolvimento histórico do referido Teorema. A seguir, apresentamos os argumentos dados por esses alunos.

Aluno D: "Os antigos precisavam da segurança de que as construções que eles faziam se sustentassem de pé. Para isso, sua base deveria ser unida com o restante da estrutura, formando um ângulo reto, daí foi desenvolvido o Teorema de Pitágoras".

Aluno T: "Atribui-se a Pitágoras. Porém o teorema parece já ser conhecido antes do nascimento de Pitágoras".

Aluno B': "Foi desenvolvido pela academia pitagórica... mas outros povos já haviam feito algo parecido".

Aluno D': "Foram estudados em várias épocas até que foi finalizada por Pitágoras".

Com relação aos Ternos Pitagóricos, nosso objeto de estudo, priorizamos identificar as idéias existentes sobre o que é um terno pitagórico e sobre a importância do seu estudo para os futuros professores de Matemática. Dentre os alunos, nove responderam à questão "O que você sabe sobre Ternos Pitagóricos?". Houve alunos que não apresentaram respostas consistentes, como por exemplo, o aluno I que nos apresentou a seguinte resposta: "Imagino o que seja, mas não tenho certeza”. Com isso, somente os alunos R, S, T, B’, P e D apresentaram argumentos mais consistentes. A seguir, transcreveremos os argumentos dados pelos referidos alunos.

Aluno R: “São grupos de três números que satisfazem a igualdade $a^2 + b^2 = c^2$”.

Aluno S: “São números positivos que satisfazem o Teorema de Pitágoras”.

Aluno T: “... números que satisfazem $a^2 + b^2 = c^2$”.

Aluno B’: “É algo referente a três... três números que satisfazem o Teorema de Pitágoras”.

Aluno P: “... foi descoberto antes do Teorema de Pitágoras”.

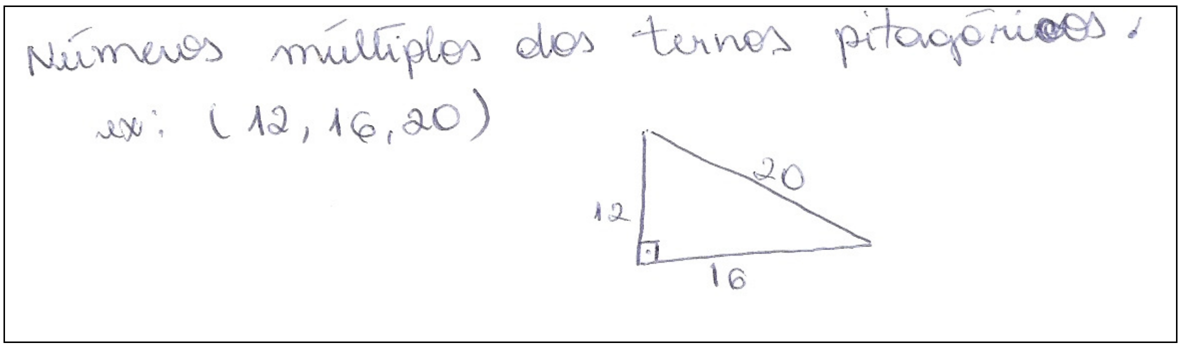
Aluno D: “... números que combinados geram seguimentos que unidos resultam em um triângulo, onde a união dos seus seguimentos originam um ângulo reto”.

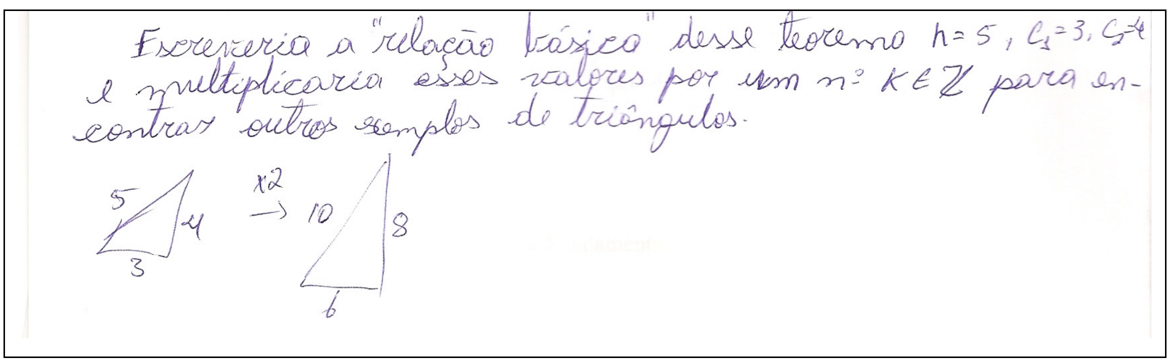
Como verificamos anteriormente, somente cinco alunos apresentaram argumentos consistentes sobre os Ternos Pitagóricos. Entretanto, quando perguntado sobre a importância do estudo dos Ternos Pitagóricos para os futuros professores de Matemática, obtivemos dezesseis respostas, ou seja, um número superior à quantidade de alunos que souberam opinar sobre o que são Ternos Pitagóricos. Com isso, emerge uma indagação: “é possível saber a importância do estudo de determinado conteúdo, sem saber sua definição, seu desenvolvimento histórico, ou seja, sem conhecê-lo?”. Bem, ao analisarmos as dezesseis respostas apresentadas, constatamos que em sua maioria convergem para a justificativa de que o futuro professor necessita aprender conteúdos, ou seja, o conteúdo pelo conteúdo. Enfim, por não saber o que vem a ser um Terno Pitagórico, os alunos não souberam opinar sobre a importância do seu estudo. O curioso, é que até mesmo os alunos R, S, T, B’ e P, que apresentaram algumas idéias sobre o que são Ternos Pitagóricos, não souberam opinar claramente, sobre a importância do seu estudo. Somente o aluno D apresentou um argumento mais pertinente, a saber: “... é sempre bom quando o professor ao lecionar um conteúdo conheça a raiz deste, para melhor poder explicar ao aluno”.

Intencionalmente, deixamos a questão contendo uma situação problema para ser discutida nos últimos parágrafos, por considerarmos como a mais importante. A seguir, enunciaremos a referida questão, seguida da análise das respostas dadas e algumas considerações.

“Imagine que você está em uma sala de aula, ensinando sobre o Teorema de Pitágoras. Suponhamos que com o intuito de exemplificar triângulos que satisfazem o Teorema de Pitágoras, ao olhar para suas anotações, você percebe que sua irmã mais nova pintou de esmalte preto, os números correspondentes aos catetos e as hipotenusas dos três triângulos que você havia copiado do livro didático que você esqueceu em cima da sua cama. Considerando que o professor é um artista, que necessita de criatividade para agir de acordo com sua necessidade, o que você faria? Imediatamente, você seria capaz de dar valores aos números que sua irmã pintou? Quais seriam esses valores?"

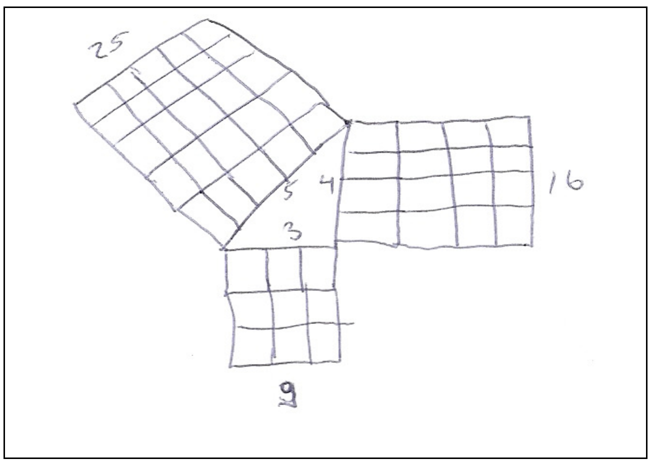
Dentre os integrantes, vinte e um responderam a essa questão. Os alunos C, F e K apresentaram argumentos vagos. Segundo o aluno F "... daria valores nos quais soubesse uma resposta que eles resultariam", porém assim como os alunos C e K, não atribuiu valores. Os argumentos mais consistentes foram dados pelos alunos D, O e T, os quais ilustraremos a seguir, respectivamente.





como o terno mas conhecido é 3, 4 e 5,
bastaria, apenas multiplicarmos por qualquer
inteiro.
ex: 3 x 3 = 9
4 x 3 = 12
5 x 3 = 15

Os demais argumentos se concentraram no Terno Pitagórico (3, 4, 5), sendo que três alunos exemplificaram ternos secundários do (3, 4, 5), sem devida explicação e doze alunos simplesmente responderam à questão com o (3, 4, 5). Em particular, o aluno G além de dar como exemplo o terno pitagórico (3, 4, 5), apresentou uma demonstração geométrica, conforme podemos verificar na ilustração a seguir.



Diante do exposto, nosso propósito foi proporcionar a esses alunos a compreensão sobre a importância do estudo dos Ternos Pitagóricos, em particular no ensino do Teorema de Pitágoras. Sobretudo, como didaticamente podemos potencializar a interrelação histórica existente entre o Teorema de Pitágoras e os Ternos Pitagóricos. Com isso, em conseqüência da análise realizada, no decorrer do módulo de ensino, priorizamos três categorias, a saber: História da Matemática como recurso pedagógico, Teorema de Pitágoras e Ternos Pitagóricos.

Por fim, testamos na intervenção pedagógica a hipótese de que o estudo dos Ternos

Pitagóricos, por parte dos futuros professores de Matemática, pode ser uma ferramenta para o ensino do Teorema de Pitágoras, conforme descrevemos nas seguintes sessões.

3.5.2 Encontro II

As atividades que projetamos, foram realizadas pelas duplas formadas em cada encontro. No decorrer do módulo de ensino, interagimos continuamente com as duplas, conduzindo discussões gerais, permitindo que as duplas comparassem e contestassem as diferentes soluções apresentadas.

No segundo encontro, apresentamos o cronograma (anexo C), contendo os dias que seriam realizados os demais encontros e o plano pedagógico (anexo D), explicitando a necessidade da formação de duplas permutáveis, com a intenção de promover discussões mais intensas. Logo em seguida, tendo como referencial o questionário aplicado no encontro I, apresentamos sete perguntas na lousa, distribuídas em cinco blocos, para que os alunos pudessem expor suas idéias, oralmente.

A dinâmica utilizada foi a seguinte: escrevemos na lousa as questões referentes ao bloco I, depois solicitamos que os alunos opinassem a respeito. Em seguida, sugerimos que os alunos tentassem entrar em um consenso, obtendo quando possível, uma idéia geral. Acabada a discussão, partimos para o bloco seguinte. A seguir, o ocorrido.

As perguntas do bloco I foram: 1. Quais são suas expectativas sobre sua futura prática docente? 2. Para você, quais são os problemas a serem enfrentados pelos futuros professores de Matemática em sua atividade docente? 3. Em sua opinião, o que é um bom ensino de Matemática?

Por ser o primeiro bloco notamos certa timidez por parte dos alunos. Entretanto, à medida que um argumentava, os outros se sentiam estimulados a também expor suas opiniões. Por se tratar de aspectos relacionados à prática docente, alguns alunos que já lecionam, contaram experiências que vivenciam diariamente, estendo assim a discussão. Com isso, informamos aos alunos a necessidade de serem mais breves em seus argumentos, para oportunizar a participação de todos.

No referido bloco a síntese das idéias expostas é a seguinte: Alguns confessaram que não querem lecionar, segundo o aluno I, “ensinar dar muito trabalho, é muito cansativo”. Muito concordaram com a opinião do aluno I, entretanto relataram a satisfação existente na prática docente. Por exemplo, o aluno H[13], relatou que "... é muito bom saber que fui eu que ensinei aquele menino as regras de sinais, certas fórmulas". Em contrapartida, os outros discursos convergem à explicação de que o maior problema a ser enfrentado é a repulsão dos alunos em aprender Matemática, sendo assim suas expectativas são as de ajudar os alunos a compreenderem e gostarem da Matemática, proporcionando um ensino de qualidade, onde todos aprendam.

"O que você entende por Educação Matemática?", foi a pergunta do bloco II. Como havíamos constatado no questionário, a maioria dos alunos não têm uma idéia formada sobre o que é Educação Matemática, dado que os que sabem algo, apresentaram alguns equívocos, como por exemplo, o aluno H que acreditava que a Educação Matemática fosse capaz de solucionar todos os problemas referentes ao ensino de Matemática.

Com isso, em especial, nesse bloco, houve a necessidade de mediarmos com mais intensidade as discussões, conduzindo os alunos a certas reflexões tais como: se há problemas a serem solucionados, é necessário estudá-los; Educação Matemática como campo científico e profissional.

Dando continuidade a discussão do bloco anterior, após explicarmos a preocupação das pesquisas em Educação Matemática em estudar metodologias para auxiliar no ensino de Matemática, iniciamos o bloco III, solicitando que os alunos citassem as metodologias que eles conhecem, seguida de um posicionamento. Foram citadas diversas metodologias, algumas conhecidas por poucos, como por exemplo, a Modelagem Matemática. Em relação aos posicionamentos, a maioria foi favorável, sendo que os desfavoráveis estavam relacionados à falta de acesso e as limitações existentes.

O bloco IV foi destinado a um aprofundamento na discussão acerca do uso da História da Matemática como recurso pedagógico.

Após a participação oral dos alunos, realizamos um comentário geral sobre as referidas perguntas, com a finalidade de expor à importância do campo da Educação Matemática, as preocupações com o ensino de Matemática e as metodologias existentes, enfatizando a História da Matemática. Em seguida demos início ao bloco V, com a pergunta "O que você sabe sobre os Ternos Pitagóricos?".

Solicitamos que um aluno voluntário[14] fosse à lousa, e com o auxílio dos demais colegas, e

[13] O aluno H já possui 4 anos de docência.
[14] O aluno D se dispôs a escrever na lousa.

quando necessário com nossas orientações, construíssem a definição sobre Ternos Pitagóricos. A definição estabelecida foi a seguinte:

"Três números inteiros positivos que satisfazem o Teorema de Pitágoras, ou seja, $a^2 + b^2 = c^2$".

Ao solicitarmos um exemplo, por unanimidade, o exemplo dado foi o (3,4,5). Os outros exemplos foram os secundários do (3,4,5). Conforme o que foi constatado no questionário, ao exemplificar com ternos secundários, os alunos não justificavam a escolha. Entretanto, reservamos essa discussão para um momento posterior, quando os alunos deveriam construir a definição de terno primitivo e terno secundário.

Em seguida, discorremos sobre seu desenvolvimento histórico interrelacionando com o Teorema de Pitágoras, seguido de algumas aplicações e da importância do estudo dos Ternos Pitagóricos para o ensino do Teorema de Pitágoras.

Em relação ao conteúdo matemático que foi exposto no referido encontro, apresentamos algumas noções básicas relacionadas aos Ternos Pitagóricos. Inicialmente, explicitamos como problema, as propriedades dos conjuntos dos três números inteiros positivos, que satisfazem a relação $a^2 + b^2 = c^2$. Em seguida, destacamos algumas definições e propriedades fundamentais, a saber:

Triângulo Retângulo em Números Inteiros como sendo todo triângulo retângulo cujos três catetos são mensuráveis conforme uma unidade convenientemente escolhida, podendo ser expressa por números inteiros e que traduzindo em linguagem aritmética, retoma oferecer a consideração das soluções através dos números inteiros da relação $a^2 + b^2 = c^2$ (I), que existe entre os três lados de um triângulo retângulo;

Em relação às condições dos termos de $a^2 + b^2 = c^2$ (I), explicitamos que é sempre possível supor que os três números a, b e c são primos entre si, dois a dois, já que toda reação (I), no qual dois de seus números tendo um divisor comum pode ser reconduzido a uma relação mais simples, pois esse divisor também divide o terceiro número;

A última discussão foi destinada a construir os conceitos de terno primitivo e terno secundário. Inicialmente, entregamos para cada dupla uma versão impressa da situação problema que estava inserida no questionário. Em seguida pedimos para que um aluno[15] voluntário nos auxiliasse na lousa.

---

[15] O aluno L se dispôs a escrever na lousa.

A dinâmica utilizada foi a seguinte: solicitamos que cada dupla escrevesse no papel um terno pitagórico difente do (3,4,5) . Em seguida, cada dupla citou para o voluntário o exemplo dado, para que ele escrevesse na lousa. Houve duplas que não souberam exemplificar. Entretanto, todos os exemplos atribuídos foram ternos secundários do (3,4,5), como por exemplo: (9,12,15), (6,8,10), (15,20,25). Em continuidade, levantamos a seguinte questão: "qual a relação dos ternos exemplificados, com o terno (3,4,5)?".

Diante da questão suparacitada, o aluno C', com o auxílio dos demais colegas chegou a seguinte conclusão: "para chegarmos a qualquer terno que tem na lousa, basta multiplicar todo o terno por um determinado número. Por exemplo, se multiplicarmos o terno (3,4,5) por 3, vamos ter o terno (9, 12, 15), que coincide com o primeiro terno da lousa". É válido ressaltar que na situação problema do questionário, na qual era solicitado que os alunos exemplificassem três Ternos Pitagóricos, o referido aluno não apresentou nenhuma resposta, o que nos leva considerar que a fala do aluno C' representa certa mudança significativa quanto aos três números inteiros que satisfazem o Teorema de Pitágoras.

Em seguida, afirmamos para os alunos, que o terno (3,4,5) é um terno primitivo e que os ternos que estavam escritos na lousa são secundários. Com isso, os alunos, por nosso intermédio, chegaram as seguintes definições:

Relação Primitiva ou Triângulo Primitivo como sendo toda relação (I), nas quais a, b e c são números inteiros, primos entre si, dois a dois;

Relação Secundária ou Triângulo Secundário como sendo toda relação da forma (I) que pode ser reconduzida a uma relação primitiva, dividindo os três termos por seu máximo divisor comum, que é, portanto, um número maior que a unidade;

Diante do exposto, propusemos aos alunos, convencionar que a simples palavra "triângulo" sempre se referia a um triângulo retângulo em números inteiros.

Por fim, explicitamos o teorema "Se entre três números inteiros a, b, c primos entre si, dois a dois existe a relação $a^2 + b^2 = c^2$, os números a e b são sempre de paridades diferentes, e número c é sempre ímpar".

Por fim, demos algumas dicas e solicitamos que cada um pensasse na demonstração desse teorema, sendo que o primeiro momento do encontro seguinte seria destinado para que cada dupla obtivesse uma demonstração coletiva, a partir da demonstração individual realizada em casa.

3.5.3 Encontro III

Iniciamos esse encontro, estabelecendo um tempo de 20 minutos, para que as duplas discutissem suas demonstrações do teorema que foi enunciado no encontro anterior e chegassem a um consenso. Em seguida, duas duplas deveriam se unir, formando assim um grupo de quatro pessoas e discutir as duas demonstrações com a finalidade de chegar a um consenso entre o grupo. Em nível de registro, cada grupo nos entregou a demonstração estabelecida pelo grupo. Por fim, propomos que a demonstração deveria ser realizada por escrito na lousa, por um aluno voluntário, com o auxílio da ministrante e dos demais alunos. O aluno M se dispôs a escrever na lousa. Ao longo, da demonstração, os alunos tiveram a oportunidade de discutir os procedimentos, o que de certa forma possibilitou uma solução em conjunto. É válido ressaltar, que a ministrante auxiliou durante o processo da demonstração. Apresentamos a seguir a demonstração dada pelos alunos ao 1° teorema.

Demonstração

"Suponhamos que a e b são de mesma paridade. Então a e b são todos os dois pares ou todos os dois ímpares.

i) Eles são pares: Impossível, pois contraria a hipótese (são primos entre si);

ii): Eles são ímpares : Sejam $a = 2k+1$ e $b = 2k'+1$. Então:

$$(2k+1)^2+(2k'+1)^2 = c^2$$

$$4k^2+4k+1+4k'^2+4k'+1 = c^2$$

$$4(k^2+k+k'^2+k')+2 = c^2$$

Com isso, notamos que c^2 é um número par, porém não é um múltiplo de 4. Isso é um absurdo, posto que todo número par elevado ao quadrado é um múltiplo de 4. Logo, a e b não podem ser ambos ímpares. Portanto por (i) e (ii), a e b não são de mesma paridade.

Agora nos resta demonstrar que c é ímpar.

Como a e b são de paridades diferentes, temos que: $a = 2k$ e $b = 2k+1$. Então, temos que:

$$(2k)^2+(2k+1)^2 = c^2$$

$$4k^2+4\,k'^2+4\,k+1 = c^2$$

$$4(k^2+k'^2+k')+1 = c^2$$

Portanto, os números a e b são de paridades diferentes. Logo, a soma de seus quadrados, ou seja, c^2 sempre será ímpar. Com isso, o número c é ímpar.”

Por convenção, estabelecemos que na relação primitiva $a^2+b^2 = c^2$ (I), o número a é ímpar e o número b é par.

Para dar continuidade a aula, explicitamos $(X-Y)^2+4XY = (X+Y)^2$, como sendo a relação II, e em seguida pedimos para que os alunos comparassem II com a relação I $(a^2+b^2 = c)$, considerando as condições citadas no 1° teorema. Com essa comparação, os alunos estabeleceram as seguintes relações para X e Y, em função dos números a, b e c:

$X-Y = a$ e $X+Y =$ c, temos: $X = \dfrac{c+a}{2}$ e $Y = \dfrac{c-a}{2}$; $4XY = b^2$. Com isso, com o auxílio da ministrante, os alunos foram conduzidos a seguinte observação: Se a relação (I) existe entre três números inteiros a, b, c, primos entre si, dois a dois, sempre é possível determinar os valores de X e Y em função dos números a, b e c.

Para finalizar o encontro, enunciamos o 2º teorema: “Os números X e Y são dois números inteiros, primos entre si e de paridades diferentes.

Nesse encontro, com o propósito de realizar uma dinâmica em grupo para demonstração do 2º teorema, chegamos mais cedo, e colocamos no fundo de algumas cadeiras, bexigas contendo papéis, cujas possibilidades são: P1: X e Y são inteiros; P2: X e Y são primos entre si; P3: X e Y são de paridades diferentes.

Após enunciar o 2º teorema, solicitamos que os alunos encontrassem e estourassem a bexiga que estava embaixo da cadeira (uma bexiga por dupla), e logo em seguida solucionassem o que estava escrito no papel que estar dentro da bexiga. Cada dupla teve dez minutos para entregar por escrito, sua resposta, que foi corrigida por outra dupla. Por fim, sorteamos uma dupla para cada item P1-P4, para apresentar a solução na lousa. Nesse contexto, a demonstração do 2° teorema, subdividida em quatro partes, que foram expostas na lousa, pelas duplas sorteadas, com o auxílio da ministrante, e dos demais colegas foi a seguinte:

“1º X e Y são inteiros, pois os números c e a são ímpares; sua soma e sua diferença são dois números pares.

2º X e Y são primos entre si, pois se eles tivessem um divisor comum, que dividisse sua soma c e sua diferença a, isso é contrária à hipótese prévia.

3º X e Y são de paridades diferentes, se eles fossem todos dois ímpares, sua soma c seria um número par, assim que sua diferença a.”

3.5.4 Encontro IV

Dentre todo o conteúdo matemático, exposto no decorrer do módulo de ensino, é no encontro IV que apresentamos um dos mais importantes, que é a relação fundamental.

Nesse encontro, nosso primeiro procedimento foi explicitar a relação III:

$$(x^2-y^2)^2+(2xy)^2 = (x^2+y^2)^2,$$

como sendo a importante relação fundamental que nos possibilita encontrar todos os triângulos por meio de dois números geradores. Ela surge a partir da identidade

$$\text{II } (X-Y)^2+4XY = (X+Y)^2,$$

considerando x e y primos entre si e de paridades diferentes, podendo obter para a, b, c, valores inteiros para as relações

$$a = x^2-y^2 \text{ (IV)}; \; b= 2xy \text{ (V)}; \; c= x^2+y^2 \text{ (VI)};$$

Esses valores verificam a relação primitiva da forma $a^2+b^2 = c^2$.

Em seguida, solicitamos que os alunos atribuíssem valores para x e y, obedecendo as condições necessárias na relação fundamental, e verificassem se os ternos correspondentes são primitivos. Em seguida, duas duplas fizeram essa tarefa na lousa. Á guiza de informação, a dupla formada pelos alunos G e O, foram a lousa e ao atribuir valores para x e y, respectivamente 3 e 2, verificaram que o terno correspondente (5,12, 13), é um terno primitivo.

Um ponto a ser enfatizado, é que as relações IV, V e VI, foram determinadas pelos próprios alunos, a pedido da ministrante. Em seguida, estabelecemos que x^2 e y^2, ou seja, X e Y são números inteiros quadrados. Portanto x e y serão inteiros. Com isso, concluímos que a relação (III) pode servir para **estabelecer todas as relações primitivas da forma (I),** e, com efeito, também permite obter todas as relações secundárias, partindo das relações primitivas correspondentes. É válido ressaltar que o interessante é que ela foi indicada por Euclides.

Em decorrência do exposto propiciamos uma discussão sobre as sete propriedades imediatas dos triângulos primitivos, a saber:

P1. A relação (V) mostra que o número b sempre é múltiplo de 4, posto que um dos números geradores x ou y sempre são pares;

P2. A relação (VI) mostra que o número da hipotenusa c, é sempre a soma dos quadrados de dois números inteiros;

P3. Um dos números a ou b é sempre um múltiplo de 3.

P4. Se a é um número primo ou um número ímpar não múltiplo de 3, então b é múltiplo de 12.

P5. Um dos três números a, b, c, sempre é múltiplo de 5.

P6. O produto $a \cdot b$ é sempre divisível por 12. Essa propriedade condiciona um corolário: “A área de um triângulo primitivo sempre é um múltiplo de 6.”

P7. A diferença $c-b$ e a soma $c+b$ sempre são dois números quadrados ímpares.

A dinâmica para demonstrar as sete propriedades mencionadas anteriormente foi a seguinte: entregamos uma versão impressa das sete propriedades a todas as duplas. Em seguida, solicitamos que eles fizessem uma breve leitura, sendo que metade das duplas indicaria uma propriedade para que outra dupla solucionasse na lousa, sendo que a dupla que indicou deveria auxiliar a dupla que estivesse demonstrando a propriedade na lousa. Dessa forma, proporcionamos uma maior interação entre as duplas.

Finalizamos o encontro IV com o enunciado da generalidade da relação fundamental: “A todo número inteiro maior que dois, tomado por valor de a ou de b, sempre corresponde ao menos um triângulo retângulo em números inteiros, ou seja, um grupo de três números inteiros ligados pela relação $a^2+b^2 = c^2$ (I)”.

3.5.5 Encontro V

Iniciamos o encontro V com o enunciado de três casos particulares, com os quais conduzimos os alunos a algumas conclusões, reflexões e exemplos, seguindo um roteiro (anexo E). A seguir, descreveremos a dinâmica utilizada.

O primeiro caso consistiu na solicitação de que os alunos fizessem $y = 1$ na relação fundamental $(x^2-y^2)^2+ (2xy)^2 = (x^2+y^2)^2$ (III), obtendo assim a relação $(x^2-1)^2+(2x)^2 = (x^2+1)^2$.

Em seguida, solicitamos que os alunos estabelecessem os ternos correspondentes aos três primeiros números pares, preenchendo os espaços em branco, contidos no roteiro. Com isso, foi estabelecido que:

Para $x = 2$, o triângulo correspondente é $3^2+4^2 = 5^2$ (menor triângulo retângulo em números inteiros);

Para $x = 4$, o triângulo correspondente é $15^2+8^2 = 17^2$;

Para $x = 6$, o triângulo correspondente é $35^2+12^2 = 37^2$.

Por fim, os alunos, com o nosso auxílio, chegaram à conclusão de que nesse caso, todo valor par atribuído à x, estará associado à valores de a, b e c, primos entre si, dois a dois, fornecendo assim, um triângulo primitivo.

O segundo caso consistiu na solicitação de que os alunos fizessem $y = 2$ na relação fundamental $(x^2–y^2)^2+(2xy)^2 = (x^2+y^2)^2$ (III), obtendo assim a relação $(x^2–4)^2+(4x)^2 = (x^2+4)^2$. Seguindo o mesmo procedimento do primeiro caso, os exemplos numéricos para os três primeiros números ímpares a partir de $x=3$, estabelecidos pelos alunos, foram os seguintes:

Para $x = 3$, o triângulo correspondente é $5^2+12^2 = 13^2$;

Para $x = 5$, o triângulo correspondente é $21^2+20^2 = 29^2$;

Para $x = 7$, o triângulo correspondente é $45^2+28^2 = 53^2$.

Por fim, os alunos, com o nosso auxílio, chegaram à conclusão de que nesse caso, todo valor ímpar atribuído à x, a partir de $x=3$, estará associado à valores de a, b e c, primos entre si, dois a dois, fornecendo assim, um triângulo primitivo.

No terceiro caso, fizemos $x = y+1$, ou seja, dois números consecutivos, sendo x o sucessor de y, obtendo assim, $a = x^2–y^2 \rightarrow a = 2y+1$.

Com isso, observamos que os valores sucessivos de a, quando relacionados a valores de y pertencentes à seqüência natural dos números inteiros, corresponde a seqüência dos números ímpares, à partir de 3, e por conseqüência, todos os triângulos assim obtidos, são primitivos.

Em seguida, propiciamos mais quatro reflexões, a saber:

1. Pode-se determinar rapidamente, os números a, b e c, em função de x, tomando todos os valores inteiros a partir de 2. Os valores de a são os números ímpares sucessivos, a partir do 3;

2. A partir da relação fundamental (III) $(x^2–y^2)^2+(2xy)^2 = (x^2+y^2)^2$, esses três casos particulares, nos conduzem à possibilidade de construir uma tábua que agrupa valores associados de a, b e c, em função do número gerador x;

3. Diante do exposto, surge uma ótima ferramenta pedagógica que é a construção de uma tábua agrupando os valores associados de a, b e c, em função de x, permitindo calcular facilmente, os sucessores, considerando $1 \leq x \leq 25$; Com isso entregamos aos alunos uma tábua (anexo F) a ser preenchida, obtendo como resultado a tábua a seguir.

x	y = x -1	2(x – 1)	(x – 1) + x	2(x-1)x	b+1
			a	b	c
1	0	0	1	0	1
2	1	2	3	4	5
3	2	4	5	12	13
4	3	6	7	24	25
5	4	8	9	40	41
6	5	10	11	60	61
7	6	12	13	84	85
8	7	14	15	112	113
9	8	16	17	144	145
10	9	18	19	180	181
11	10	20	21	220	221
12	11	22	23	264	265
13	12	24	25	312	313
14	13	26	27	364	365
15	14	28	29	420	421
16	15	30	31	480	481
17	16	32	33	544	545
18	17	34	35	612	613
19	18	36	37	684	685
20	19	38	39	760	721
21	20	40	41	840	841
22	21	42	43	924	925
23	22	44	45	1012	1013
24	23	46	47	1104	1105
25	24	48	49	1200	1201

4. Tendo os primitivos, é um bom e ótimo começo. Uma vez que, a partir dos primitivos, chegamos aos secundários.

3.5.6 Encontro VI

O encontro VI foi destinado para uma discussão acerca do comportamento da tábua construída no encontro anterior. A dinâmica utilizada consistiu em solicitar que as duplas escrevessem suas inferências, em seguida comparassem e contestassem com outra dupla as diferentes soluções apresentadas, formando assim um grupo de quatro pessoas. Dando continuidade a interação entre os alunos, solicitamos que cada quarteto se unisse a outro quarteto, a fim de encontrarem inferências diferentes, aumentando assim o número de informações. Por fim, com a finalidade de proporcionar uma discussão geral, solicitamos que os alunos fizessem um círculo e que um representante de cada grupo fosse responsável em enunciar suas inferências, sendo que o próximo a falar não poderia repetir inferências já mencionadas. Antes de enumerarmos as inferências estabelecidas, ressaltamos que as conclusões se referem aos ternos onde o termo *c* é sucessor do termo *b*, e o termo *a* é um número ímpar, ou seja, os ternos representados na tábua.

A seguir, apresentamos as inferências acerca do comportamento da tábua, que foram estabelecidas pelos alunos.

I_1: As duas primeiras colunas são constituídas pela seqüência dos números naturais, a primeira a partir de 1, e a segunda a partir de 0;

I_2: A terceira coluna é constituída pela seqüência dos números pares, a partir de 0. Portanto, os números dessa coluna são o dobro dos correspondentes da segunda coluna;

I_3: A quarta coluna apresenta os valores sucessivos do número *a*: essa é a seqüência dos números ímpares;

I_4: A quinta coluna apresenta os valores correspondentes de *b*. O número de cada linha é o produto dos dois números situados sob a mesma linha nas colunas 1 e 3;

I_5: A sexta coluna apresenta os valores correspondentes de *c*, obtidos adicionando uma unidade aos valores de *b* que se encontram na mesma linha;

I_6: Os valores atribuídos ao número *a*, formados pela seqüência natural dos números ímpares, são terminados por 1, 3, 5, 7, 9, sucessivamente. Com isso, o valor das unidades se repetem por períodos de 5 números;

$I_{7:}$ Os valores atribuídos ao número *b*, nessa tábua, são terminados sucessivamente por 0, 4, 2, 4, 0 e os números *c* são sucessivamente terminados por 1, 5, 3, 5,1; Portanto, os números *b* e *c* se sucedem por períodos de 5, e esses períodos são simétricos em relação ao número médio das unidades;

$I_{8:}$ O número *b* sempre será terminado por 0, 2 ou 4, e que todo número *c* sempre será terminado por 1, 3 ou 5.

Por fim, os alunos concluíram, com o nosso auxílio que a tábua é fácil de ser construída, permitindo determinar rapidamente, todos os triângulos primitivos, para os valores ímpares de *a*. Com isso, através da multiplicação dos números *a*, *b* e *c* por um mesmo número inteiro, pode-se deduzir um número ilimitado de soluções secundárias.

3.5.7 Encontro VII

O último encontro foi destinado para aplicação de uma prova individual, composta de 11 questões subjetivas, cujo objetivo principal foi examinar se ocorreu uma aprendizagem com significado dos conteúdos matemáticos que foram abordados no decorrer do módulo de ensino, bem como a importância dos Ternos Pitagóricos para o ensino do Teorema de Pitágoras e a inter-relação histórica dos referidos conteúdos. Além disso, houve questões relacionadas à formação docente e relatos a respeito da participação dos mesmos no módulo de ensino. No entanto, dado que tais objetivos em sua maioria correspondem aos mesmos estabelecidos no questionário, não intencionamos realizar uma análise comparativa, posto que o propósito do questionário foi identificar as idéias prévias dos alunos e nos servir como base na elaboração da intervenção pedagógica.

Em relação à análise dos dados obtidos, subdividimos as 11 questões em dois blocos, sendo o primeiro bloco composto pelas seis primeiras questões da prova escrita, cujas respostas esperadas são de caráter pessoal, e o segundo bloco é composto pelas cinco questões que envolvem o conteúdo matemático - Ternos Pitagóricos.

A seguir, apresentaremos as seis primeiras questões da prova escrita, seus respectivos objetivos, uma descrição e análise dos resultados obtidos pelos alunos nessa prova.

A questão 1, “Para você, o estudo dos Ternos Pitagóricos para o ensino do Teorema de

Pitágoras, é importante?", teve como objetivo identificar qual importância é dada pelos alunos ao estudo do conteúdo matemática em foco.

Os trinta alunos apresentaram argumentos positivos quanto ao estudo dos Ternos Pitagóricos para o ensino do Teorema de Pitágoras, predominando a justificativa de que pedagogicamente esse estudo pode servir para ampliar o conhecimento do futuro professor, servindo como ferramenta pedagógica em sala de aula. À guiza de exemplificação, apresentamos a seguir, os argumentos dados pelos alunos E, P, S e V.

Aluno E: "Nos ajuda no desenvolvimento da aula para resolver as questões ou criar uma questão caso seja necessário".

Aluno P: "Para saber quais valores atribuir a cada lado do triângulo sem precisar recorrer a livros".

Aluno S: "Através dos Ternos Pitagóricos é que encontraremos uma justificativa que parece ser mais clara para ensinarmos aos nossos alunos o Teorema de Pitágoras".

Aluno V: "Nos possibilitará enquanto professores a não ficar abitolados a exemplos de livros didáticos, na hora da elaboração de uma prova ou de um exercício em sala de aula".

A questão 2, "Em relação ao desenvolvimento do módulo de ensino Ternos Pitagóricos: uma ferramenta pedagógica no ensino do Teorema de Pitágoras, qual momento você considerou mais importante?", foi destinada a identificar quais foram, na opinião dos alunos, os momentos mais importantes do módulo de ensino. Houve uma diversidade de argumentos, predominando a construção da tábua numérica. Os outros argumentos são relacionados aos momentos em que trabalhamos conceitos como os de triângulo primitivo e secundário, as propriedades, a relação fundamental e os teoremas. Particularmente, destacamos a seguir, os argumentos dados pelos alunos, E, H, X, C' por se tratarem não só do conteúdo matemático, mas como também do desenvolvimento do módulo de ensino de um modo geral.

Aluno E: "Todos. Pois cada momento significou muito para mim. Aprendi coisas novas e interessantes".

Aluno H: "Na realidade todo o módulo de ensino foi importante, pois me instigou a buscar mais sobre o tema, e a cada aula dava uma certa curiosidade de qual seria o próximo passo que eu deveria seguir para finalizar a atividade do dia. Mas se for para falar de um momento específico, gostei da aula onde encontramos, por meio das relações, vários Ternos Pitagóricos".

Aluno X: "O mais importante foi a forma como o desenvolvimento da turma aconteceu, as trocas de informações nas duplas e a calma como o conteúdo foi abordado durante o módulo de ensino".

Aluno C': "A prática das atividades em grupo, provocando a interação entre os alunos. A que mais me chamou atenção foi a dinâmica da bexiga, pois cada grupo teria que estourar a bexiga escolhida para obter a questão que iria responder".

A questão 3, "Quais são suas expectativas sobre sua futura prática docente?", teve o intuito de identificar quais são as expectativas dos alunos quanto a futura prática docente. Em sua maioria, os argumentos convergiram à necessidade da busca de metodologias que proporcionem um ensino de Matemática interessante e significativo para o aluno. A seguir, apresentamos os argumentos dados pelos alunos B, C, F, O.

Aluno B: "Utilizar a cada dia novas ferramentas, ou metodologias, para um bom ensino da Matemática. Procurar novos conhecimentos para facilitar o entendimento da Matemática por parte dos alunos".

Aluno C: "Fazer com que os alunos despertem um interesse pela Matemática, tentar mostrar a mesma de uma forma simples e clara, desmistificando a idéia que ela é um bicho de sete cabeças".

Aluno F: "Pretendo trabalhar de uma forma diferente da 'tradicional'. Pretendo usar sempre que possível a história da matemática como ferramenta pedagógica, e a utilização do material concreto, que também considero fundamental".

Aluno O: "Tenho a expectativa de desenvolver uma prática docente inovadora e que faça com que o aluno aprenda significativamente. Para isso buscarei utilizar as metodologias mais recentes e consideradas boas ou excelentes para o ensino da matemática. Espero que os futuros e atuais professores de matemática sigam essa mesma linha".

Alguns alunos manifestaram não pretenderem exercer a docência. Entretanto, apresentaram certas expectativas, caso venham a ensinar. Em especial, destacamos o argumento dado pelo aluno W: "Caso eu for lecionar (não pretendo), eu espero poder passar os meus conhecimentos para os alunos de uma forma prática, que todos entendam e aprendam de verdade".

Em relação à questão 4, "Em relação ao uso da História da Matemática, para você ela é necessária no ensino de Matemática?", todos alunos apresentaram argumentos favoráveis ao uso da História da Matemática. A maioria dos argumentos apontaram para a necessidade de saber as origens e necessidades de cada conteúdo implicando em um bom recurso para auxiliar na compreensão da Matemática. A seguir, apresentamos alguns argumentos.

Aluno A: "A História da Matemática mostra como os povos desenvolveram nas teorias, além de mostrar os períodos que aconteceu, o desenvolvimento dos números... também podemos comparar com a Matemática atual e ver que ela continua cada vez mais se desenvolvendo".

Aluno B: "A base do presente é o passado"

Aluno R: "Em toda construção humana é de fundamental importância acompanharmos o seu processo de formação e entender como ela se apresenta nos dias atuais. Além disso, seria uma ferramenta importante para que os alunos possam construir mais conhecimento".

Aluno A': "Nos ajuda a saber que a matemática não foi feita do dia para a noite".

Aluno C': "... saber que por trás desses cálculos existe uma história".

Curiosamente, os alunos G e Y que no questionário haviam manifestado posição contrária quanto ao uso da História da Matemática no ensino de Matemática, na avaliação escrita apresentaram argumentos favoráveis, conforme podemos verificar nas transcrições a seguir.

Aluno G: "Quando mostramos para o aluno fatos históricos sobre determinado assunto, isto prende a atenção do aluno, e passa a ver que aquilo surgiu de uma necessidade, dando mais importância e querendo aprender mais sobre o assunto."

Aluno Y: "nos possibilita conhecer várias ferramentas importantes que se pode colocar em prática junto com os alunos..."

As transcrições dos argumentos dados pelos alunos G e Y, mesmo que direcionados aos fatores motivacionais e instrumentais, são exemplos de mudanças significativas que ocorreram quanto à importância que deve ser dada ao uso da História da Matemática no ensino de Matemática.

As respostas dadas à questão 5, "Historicamente, como os Ternos Pitagóricos e o Teorema de Pitágoras estão inter-relacionados?" correspondem ao fato de que os Ternos Pitagóricos eram conhecidos antes dos gregos, cabendo a esses povos a generalização e demonstração do Teorema que hoje é conhecido como Teorema de Pitágoras. Curiosamente o aluno P destaca que "os ternos pitagóricos é uma preparação para o Teorema de Pitágoras". Acreditamos que o referido aluno teve a intenção de esclarecer que o conhecimento do teorema se deu após o conhecimento de alguns ternos. Exemplos disso são os argumentos que transcreveremos a seguir.

Aluno I: "Os ternos já eram conhecidos bem antes pelos babilônios. Pitágoras através da escola pitagórica desenvolveu um teorema, estabelecendo uma relação entre esses ternos demonstrando-os".

Aluno U: "Os Ternos Pitagóricos surgiram a partir de uma necessidade prática, que logo depois foi formalizada através do Teorema de Pitágoras".

A questão 6, "Com o módulo de ensino, o que você aprendeu sobre Ternos Pitagóricos?", objetivou identificar, em termos gerais, o que os alunos destacam ter aprendido sobre Ternos Pitagóricos no módulo de ensino. Dois pontos foram evidenciados, pela maioria, a saber: a construção de um terno pitagórico através da relação fundamental e a possibilidade de se obter ternos secundários a partir dos primitivos. Posto que as respostas foram muito gerais, nas questões do bloco dois verificaremos se houve ou não a compreensão dos conteúdos matemáticos envolvidos.

Por fim, apresentaremos as outras cinco questões contidas na prova escrita e seus respectivos objetivos. Classificamos as respostas dadas pelos alunos sob três categorias, a saber: satisfatória (S), insatisfatória (I) e incompleta (I_2). A seguir, apresentamos um quadro contendo os alunos e as respectivas respostas às cinco questões em foco, sob as três categorias supracitadas.

Quadro 3: Respostas apresentadas

Aluno	**Q7**	**Q8**	**Q9**			**Q10**	**Q11**
			a	**b**	**c**		
A	S	S	S	S	I_2	I	S
B	S	S	I	S	I_2	S	S
C	I	S	S	S	S	I_2	S
D	S	S	I	S	S	S	S
E	I	S	S	I	S	I	S
F	S	S	S	S	S	I_2	S
G	S	S	S	I	S	S	I
H	I_2	S	S	S	S	S	S
I	S	S	S	S	I_2	S	S
J	S	S	S	S	S	S	S
K	I_2	S	S	S	S	I_2	S

Aluno	Q7	Q8	Q9			Q10	Q11
			a	b	c		
L	S	S	I	I	S	S	S
M	I	S	S	S	S	S	S
N	S	S	S	S	S	S	S
O	S	S	S	S	S	S	S
P	S	S	I	S	S	S	I
Q	S	S	S	S	S	S	S
R	S	S	S	S	S	S	S
S	S	S	Br[16]	S	S	S	S
T	I	S	I	S	S	S	S
U	S	S	S	S	S	S	S
V	S	S	S	Br	S	S	I
W	S	S	S	Br	S	S	S
X	S	S	S	S	S	I	S
Y	Br	S	S	S	I_2	I	S
Z	S	S	S	S	S	S	S
A'	S	S	S	S	S	S	S
B'	S	S	S	S	S	S	S
C'	S	S	S	S	S	S	S
D'	S	S	S	S	S	S	S

A questão 7, " Qual a definição de triângulo primitivo e de triângulo secundário?", teve como principal objetivo verificar qual a compreensão que os alunos possuíam a respeito dos conceitos de triângulo primitivo e triângulo secundário. Dos trinta alunos, vinte e três apresentaram respostas satisfatórias ao definirem e exemplificarem tais conceitos de forma geral. A seguir, apresentamos as respostas dadas pelos alunos N, W e X, como sendo exemplos de respostas satisfatórias.

[16] Questão em branco.

Aluno N

O e de TRIÂNGULO SECUNDÁRIO?

O Triângulo Primitivo é formado por um terno pitagórico primitivo, onde (a,b,c) são primos entre si, dois a dois.

O triângulo Secundário é formado a partir do triângulo primitivo. Pega-se o terno pitagórico primitivo (a,b,c) e multiplica ~~pelo~~ por um número inteiro positivo:

$$x(a,b,c) = (ax, bx, cx).$$

Aluno W

Triângulo primitivo é um triângulo formado pelo terno pitagórico primitivo, ou seja, $(3,4,5)$ é o menor terno que pode se formar um triângulo.

O secundário é formado por infinitos ternos diferentes que por exemplo podem ser formados por ternos que são múltiplos do terno Pitagórico primitivo..

ex: $n(3,4,5)$ com $n>1$ sempre formará um triângulo secundário.

Aluno X

*O Primitivo é formado por números primos entre si dois a dois onde temos a e b de paridades distintas e c impar.

*A partir de um primitivo podemos obter um secundario apenas multiplicando os termos por um número natural. Também podemos a partir de um secundario obter um primitivo ao dividir os termos pelo seu m.d.c.

Quatro alunos se limitaram a respostas contendo exemplos específicos, as quais consideramos como sendo insatisfatórias, dois alunos atribuíram definições corretas, porém muito reduzidas, tendo suas respostas classificadas como incompletas e apenas o aluno Y não respondeu à questão, deixando-a em branco.

Particularmente, a resposta dada pelo aluno C limita-se a uma definição que apenas considera certa particularidade dos triângulos primitivos e dos triângulos secundários o que nos levou a classificar como resposta insatisfatória, conforme verificamos a seguir.

Triângulos primitivo: obdecem ao Teorema fundamental $(x^2-y^2)^2+(2xy)^2=(x^2+y^2)^2$

Triângulos secundário: são aqueles que surgem de dados baseados no triângulos secundários

Ex $= \underbrace{(3,4,5)}_{\text{PRIMITIVO}} = 2\cdot(3,4,5) = \underbrace{(6,8,10)}_{\text{SECUNDARIO}}$

Por sua vez, mesmo que com caráter mais geral que a resposta apresentada pelo aluno C, o aluno K apresentou uma resposta reduzida, o que nos levou a classificá-la como incompleta.

Aluno K

Triângulo Primitivo é aquele no qua é construído c/ um Terno pitagorico primitivo, usando a formula fundamental.

Triangulo Secundário é aquele que ~~é gerado~~ possui um Ternos gerados para seus três números (uma variavel), ~~contudo~~ sendo assim, Todo triângulo secundário é gerado pelo ~~Ter~~ triangulo ~~secundário~~ primitivo.

Em relação à questão 8, "Porque no desenvolvimento do módulo de ensino enfatizamos mais os triângulos primitivos", objetivamos verificar se os alunos haviam compreendido que através dos primitivos obtemos os secundários, ou simplesmente estavam de forma mecânica, utilizando os triângulos primitivos sem saber dessa importância. Todos os trinta alunos apresentaram respostas satisfatórias. À guiza de exemplificação, a seguir, apresentamos as respostas dadas pelos alunos I e C, respectivamente.

> Porque os triângulos secundários são obtidos através dos ~~[illegible]~~ triângulos primitivos multiplicando os lados dos triângulos primitivos por qualquer número natural.

> Por que são destes triângulos que pode-se construir novos triângulos. Eles seriam a base da qual sairiam triângulos secundário baseados no primitivos

A questão 9: "Vimos que $(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^2 + y^2)^2$ é uma importante relação no estudo dos ternos pitagóricos. Suponhamos que um colega seu faltou no dia em que essa relação foi exposta e desenvolvida em classe, o que você diria para explicá-lo sobre: (a) A importância dessa relação; (b) O procedimento necessário para chegarmos a essa relação; (c) Quais são as condições dos termos x e y;". Por possuir três itens apresentaremos seus objetivos e a análise das respostas por etapa.

O item (a) teve como objetivo verificar se os alunos compreenderam a respeito da possibilidade de que com essa relação podemos construir diversos ternos primitivos, levando em consideração as condições necessárias dos termos envolvidos.

Com isso, as respostas que apresentaram tais informações da referida relação, classificamos como satisfatórias, as respostas que apenas apresentaram exemplos específicos ou particulares atrelados ao mecanismo de desenvolver a referida relação, porém sem saber explicar sua importância, classificamos como insatisfatórias e as respostas que apresentaram certo entendimento da questão mais avançado que às insatisfatórias e menos que as satisfatórias, classificamos como incompletas.

Diante das condições supracitadas, 24 alunos apresentaram respostas satisfatórias, 5 apresentaram respostas insatisfatórias e apenas o aluno S não respondeu à questão. À guisa de informação, transcreveremos a seguir, as respostas dadas pelos alunos F e N, representando às satisfatórias e as respostas dadas pelos alunos B e D, representando às insatisfatórias.

Aluno F: "Nos ajuda na construção dos ternos primitivos, obedecendo às condições necessárias para que se torne uma estrutura do Teorema de Pitágoras".

Aluno N: "...se pegarmos x e y inteiros, primos entre si e de paridades diferentes, conseguimos um terno pitagórico primitivo".

Aluno B: "Que para chegar a esta relação basta atribuir na relação II os seguintes valores: $X = x^2$ e $Y = y^2$, e desenvolvê-la".

Aluno D: "Estabelece a relação entre os valores de a, b e c, onde a é uma diferença entre quadrados e um número ímpar; b é sempre par e c é uma soma de dois quadrados e é sempre ímpar".

Em relação ao item (b), consideramos como sendo satisfatórias às respostas que continham uma representação algébrica correta, levando em consideração as condições de cada termo apresentado; as respostas que não explicitaram as condições necessárias, classificamos como insatisfatórias e as respostas que continham um conhecimento geral da referida relação, porém de forma sintética, classificamos como sendo incompleta.

Dentre os 30 alunos, 25 apresentaram respostas satisfatórias, 3 insatisfatórias e os alunos V e W não responderam à questão. Transcreveremos a seguir, às respostas dadas pelos D' e L, como sendo exemplos das respostas satisfatórias e insatisfatórias, respectivamente.

Aluno D': "Seja a relação (I) $a^2+b^2 = c^2$, a, b e c são inteiros, primos entre si. Ainda temos que a e b são de paridades diferentes e c é ímpar. Em seguida, considerando a identidade $(X-Y)^2+(4XY)^2 = (X+Y)^2$ e fazendo $X = x^2$ e $\mathrm{Y} = y^2$, obtemos a relação (II) $(x^2-y^2)^2+(2xy)^2 = (x^2+y^2)^2$, sendo que $a = x^2-y^2$, $b = 2xy$ e $c = x^2+y^2$".

Aluno L: "Partindo das relações anteriores: (I) $a^2+b^2 = c^2$ e (II) $(X-Y)^2+(4XY)^2 = (X+Y)^2$, chegamos a essa relação $(x^2-y^2)^2+(2xy)^2 = (x^2+y^2)^2$".

O item (c), último da questão 9, intencionou identificar se os alunos reconheciam as três condições necessárias dos termos x e y, a saber: inteiros, primos entre si e de paridades diferentes. Vinte e seis alunos apresentaram as três condições, com isso classificamos tais respostas como sendo satisfatórias, 4 alunos apresentaram em suas respostas apenas duas condições, as quais classificamos como incompleta.

O enunciado da questão 10 é

> "Imagine que você está em uma sala de aula, ensinando sobre o Teorema de Pitágoras. Suponhamos que com o intuito de exemplificar triângulos que satisfazem o Teorema de Pitágoras, ao olhar para suas anotações, você percebe que sua irmã mais nova pintou de esmalte preto, os números correspondentes aos catetos e as hipotenusas dos três triângulos primitivos que você havia copiado do livro didático que você esqueceu em cima da sua cama. Considerando que o professor é um artista, que necessita de criatividade para agir de acordo com sua necessidade, o que você faria? Imediatamente, você seria capaz de dar valores aos números que sua irmã pintou? Quais seriam esses valores?"

A questão enunciada anteriormente teve como objetivo analisar se os alunos são capazes de dar soluções à situação problema destacada, fazendo uso dos conceitos e propriedades que foram trabalhados no decorrer do módulo de ensino. As respostas que apresentaram exemplos sem justificar, consideramos como sendo insatisfatórias. Respostas que consideraram o (3, 4, 5), e a partir dele obtiveram secundários, apresentando justificativa, consideramos como sendo incompletas. Por fim, as respostas que apresentaram exemplos e justificativas que recorreram aos conceitos e propriedades vistos no decorrer do módulo de ensino, classificamos como sendo satisfatórias.

Diante da análise realizada, levando em consideração as condições supracitadas, 4 alunos apresentam respostas classificadas como insatisfatórias, 3 incompletas e 23 satisfatórias.

A seguir, apresentamos as transcrições das respostas dadas pelos alunos A e E, como exemplos das insatisfatórias.

Aluno A: " (3,4,5) – porque é o mais simples de se ter em mente; (5, 12, 13) e (7, 24, 25)".

Aluno E: "(3,4,5), (6,8,10), (9,12,15) ... dentre outros".

Como exemplo de respostas incompletas, transcreveremos a seguir, a resposta dada pelo aluno K.

"Sim. Seria capaz de atribuir valores a esse triângulo primitivo. Imaginaria dois números primos entre si, de paridades diferentes, na qual a soma de seus quadrados seria a hipotenusa, e essa hipotenusa teria que ser de um valor ímpar e ser primo, aos outros dois".

Por fim, ilustraremos a seguir, as respostas dos alunos M, U e R, como representantes das respostas satisfatórias, respectivamente.

Aluno M

Utilizando a fórmula fundamental temos:

Se $y = 1$ e $x = 2$

$(2^2 - 1^2)^2 + (2 \cdot 1 \cdot 2)^2 = (2^2 + 1^2)^2$

$3^2 + 4^2 = 5^2$ (3, 4, 5)

Se $y = 1$ e $x = 4$

$(4^2 - 1^2)^2 + (2 \cdot 1 \cdot 4)^2 = (4^2 + 1^2)^2$

$15^2 + 8^2 = 17^2$ (15, 8, 17)

Se $y = 1$ e $x = 6$

$(6^2 - 1^2)^2 + (2 \cdot 1 \cdot 6)^2 = (6^2 + 1^2)^2$

$35^2 + 12^2 = 37^2$ (35, 12, 37)

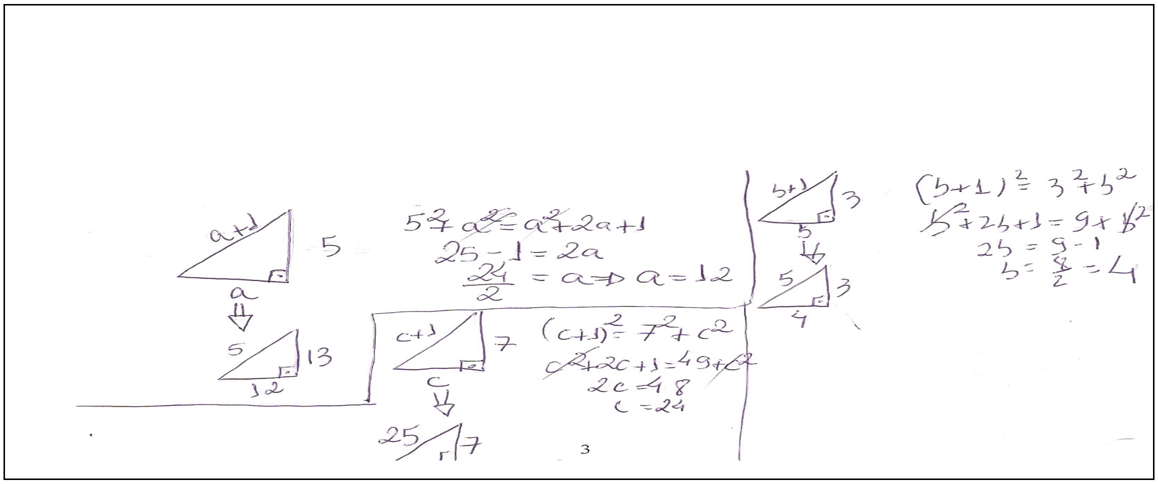
Aluno U

Se nós tivesse memorizado alguns ternos pitagóricos primitivos, rapidamente, construiria a tábua de números consecutivos e acharia os três primeiros ternos pitagóricos. Sabendo, como achar e construir a tábua temos:

x	y = x + 1	2(x − 1)	a	b	c
1	0	0	1	0	1
2	1	2	3	4	5
3	2	4	5	12	13
4	3	6	7	24	25

Logo, os valores dos triângulos seriam (3, 4, 5), (5, 12, 13) e (7, 24, 25) a partir desses ternos primitivos, poderíamos achar outros ternos secundários, basta multiplicar 3 os ternos primitivos por um $n \in \mathbb{Z}^+$.

Aluno R



A questão 11, cujo objetivo foi verificar se os alunos compreenderam o significado de cada coluna da tábua que foi construída no módulo de ensino, tem o seguinte enunciado:

"De acordo com a tábua que construímos em classe, responda as perguntas relacionadas a cada uma das colunas."

x	y	$(x-1)+x$	$2(x-1)x$	$b+1$
		a	b	c
Qual seqüência é representada?	Qual seqüência é representada?	Qual seqüência é representada?	Que relação possui com os números geradores x e y?	Que relação possui com o número b?

Vinte e sete alunos através dos cálculos e das justificativas apresentadas mostraram que compreenderam o significado de cada coluna da tabela, apresentando respostas satisfatórias. Apenas três apresentaram respostas insatisfatórias.

O aluno C não se restringiu apenas a valores numéricos, ele apresenta uma análise do comportamento da tábua. Com isso, apresentamos a seguir, a resposta dada pelo aluno C como exemplo de resposta satisfatória.

x	y	(x – 1) + x	2(x-1)x	b+1
		a	b	c
Qual seqüência é representada?	Qual seqüência é representada?	Qual seqüência é representada?	Que relação possue com os números geradores x e y?	Que relação possue com o número b?
1	0	1	00	1
2	2	3	04	5
3	4	5	08	9
4	6	7	12	13
5	8	9	16	17
6	10	11	20	21
7	12	13	24	25
8	14	15	28	29
9	16	17	32	33
10	18		36	37
			40	41
IN-{0} Naturais menos o zero.	Números pares	Números ímpares	repetições das terminações 0,4,8,2,6 a cada 5 linhas seguindo está seqüência. Sequência de finais de números pares.	repetições das terminações 1,5,9,3,7 na cada 5 linhas, Seqüências de finais ímpares em cada número dessa coluna.

O aluno G apenas apresentou valores numéricos, sem considerar a generalidade da tábua. Com isso, apresentamos a seguir, a resposta dada pelo aluno G como sendo um dos exemplos de resposta insatisfatória.

y = x − 1

x	y	(x – 1) + x	2(x-1)x	b+1
Nº ÍMPARES	y = X − 1	a	b	c
Qual seqüência é representada?	Qual seqüência é representada?	Qual seqüência é representada?	Que relação possue com os números geradores x e y?	Que relação possue com o número b? b+1
1	0	1	0	
3	2	5	12	13
5	4	9	40	41
7	6	13	84	85
9	8	17	144	145
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

b e c são consecutivos e de paridades diferente

Com base na análise qualitativa das provas escritas, apresentamos a seguir, um quadro contendo uma análise quantitativa dos dados, levando em consideração a classificação das respostas apresentadas sob as três categorias levantadas, a saber: satisfatória, insatisfatória e incompleta.

Quadro 4: Resumo das respostas apresentadas (%)

Classificação	Q7	Q8	Q9			Q10	Q11
			a	b	c		
Satisfatória	76,6	100	80	83,3	86,6	76,6	90
Insatisfatória	13,3	–	16,6	10	–	13,3	10
Incompleta	6,6	–	–	–	13,3	10	–
Em branco	3,3	–	3,3	6,6	–	–	–

Conforme podemos constatar na análise dos dados da prova escrita, expressos quantitativamente no quadro destacado anteriormente, percebemos uma quantidade significante de respostas satisfatórias. Entretanto, não consideramos as respostas insatisfatórias e incompletas como indícios da falta de compreensão, ponto que iremos defender na próxima sessão, tendo como referencial as idéias de Compreensão Relacional e Compreensão Instrumental propostos por Skemp (1980).

3.6 Níveis de compreensão

Com relação às questões analisadas no quadro 3 e expressas quantitativamente no quadro 4, por se tratarem de questões que envolvem conteúdo matemático, na presente sessão, discutiremos os resultados, de modo geral, conforme as duas categorias de apreensão de um conceito: Compreensão Instrumental e Compreensão Relacional, propostos por Skemp (1980). O referido autor enfatiza que nos dois níveis de compreensão há compreensão. Logo, é válido ressaltar que a afirmação de que no nível compreensão instrumental não há compreensão é ingênua.

Na presente investigação, casos em que por meio de repetição o aluno domina certos algoritmos e regras, sem estabelecer relações entre conceitos, consideramos como sendo representante do nível de compreensão instrumental. Em contrapartida, nos casos em que o aluno relaciona diferentes conceitos através da realização de uma grande variedade de atividades com criatividade e inteligência, consideramos como sendo do nível de compreensão relacional.

Quadro 5: Níveis de compreensão apresentados

Aluno	CR[17]	CI[18]
A	x	
B	x	
C	x	
D	x	
E		x
F	x	
G		x
H	x	
I	x	
J	x	
K	x	
L		x
M	x	
N	x	
O	x	
P		x
Q	x	
R	x	
S	x	
T		x
U	x	
V		x
W	x	
X	x	
Y		x
Z	x	

[17] Compreensão Relacional.
[18] Compreensão Instrumental.

Aluno	**CR**	**CI**
A’	x	
B’	x	
C’	x	
D’	x	

A título de exemplo, apresentaremos a seguir algumas inferências sobre o nível de compreensão dos alunos A’ e E, como sendo representantes dos níveis de compreensão relacional e instrumental, respectivamente.

O aluno A’ tem 45 anos, nunca lecionou, optou pelo curso em Matemática Licenciatura por afinidade e não possui expectativas em relação a futura prática docente.No questionário aplicado no início da intervenção pedagógica, o aluno A’ só respondeu uma pergunta dentre as cinco questões propostas sobre o Teorema de Pitágoras e os Ternos Pitagóricos. A referida questão interrogava sobre o que os alunos conheciam sobre o desenvolvimento histórico do Teorema de Pitágoras, cuja resposta dada pelo aluno A’ foi a seguinte:

“A soma do quadrado dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa”.

Conforme podemos verificar, a resposta dada nos leva a constatar a idéia de que o Teorema de Pitágoras está ligado apenas a fórmula muitas vezes repetida mecanicamente sem o conhecimento do desenvolvimento histórico do assunto em foco, nem muito menos as propriedades relacionadas aos três números inteiros que satisfazem o Teorema de Pitágoras. Particularmente, no caso do aluno A’, esse argumento é reforçado pelo fato de que o mesmo não apresentou nenhuma idéia com relação aos Ternos Pitagóricos.

No entanto, após a aplicação do módulo de ensino, ao analisarmos a prova escrita do aluno A’, nos deparamos com respostas que representam uma mudança significativa quanto o conhecimento do referido aluno sobre o Teorema de Pitágoras e os Ternos Pitagóricos.

O aluno em foco apresenta respostas onde é presente generalizações e exemplificações, como por exemplo, os cálculos e inferências apresentadas na tábua da última questão da prova escrita. Outro exemplo disso é a justificativa dada pelo referido aluno de que a importância da relação fundamental se dar pelo fato de que a partir dela podemos generalizar e encontrar uma quantidade infinita de triângulos primitivos.

Um ponto muito importante a ser destacado, são os três registros que o aluno A’ deixou na prova escrita, sobre a importância do módulo de ensino para ele. O primeiro registro foi que para ele não houve um momento mais importante do módulo de ensino, e sim todos os momentos, posto que segundo ele o módulo de ensino foi de suma importância para o seu aprendizado. O segundo registro é constatado quando ao responder a pergunta “Com o módulo de ensino, o que você aprendeu sobre Ternos Pitagóricos” o referido aluno apresenta a resposta

“Os triângulos pitagóricos, primitivos... e as várias relações que eu não tinha conhecimento.”

Por fim, o terceiro registro, o qual consideramos o mais significativo, é constatado no início da resposta dada à situação problema, onde era solicitado que o aluno atribuísse valores aos catetos e hipotenusas de três triângulos retângulos. É válido recordar que essa situação problema também estava no questionário e que por sinal não fora respondida pelo referido aluno.

Antes de exemplificar os três Ternos Pitagóricos, o aluno A’, fez o seguinte registro: “Antes desse módulo de ensino eu tinha dificuldade para resolver este problema. Agora com o conhecimento do Ternos Pitagóricos é bem mais fácil resolver”.

Diante do exposto, consideramos o aluno A’ como um exemplo importante do nível de compreensão relacional, dada a comprovação da possibilidade de uma maior compreensão do Teorema de Pitágoras após o conhecimento dos Ternos Pitagóricos.

Por sua vez, o aluno E, representante do nível de compreensão instrumental, tem 20 anos, nunca lecionou nem pretende lecionar, assim como o aluno A’ também optou pelo curso em Matemática Licenciatura por afinidade. No questionário aplicado no início da intervenção pedagógica, o aluno E respondeu duas perguntas dentre as cinco questões propostas sobre o Teorema de Pitágoras e os Ternos Pitagóricos.

Uma das questões respondida pelo referido aluno trata sobre o que os alunos conheciam sobre o desenvolvimento histórico do Teorema de Pitágoras, cuja resposta dada pelo aluno E foi que “o teorema surgiu através da semelhança de triângulo”.

A resposta destacada anteriormente demonstra a plena falta de conhecimento sobre o desenvolvimento histórico do Teorema de Pitágoras.

A outra questão respondida foi a situação problema, cuja resposta dada foi simplesmente o terno (3,4,5), sendo que fora pedido três exemplos. Dado que o referido aluno não respondeu as questões que interrogavam sobre o que vinha a ser um Terno Pitagórico e sua importância para o ensino do Teorema de Pitágoras, consideramos que isso justifica a impossibilidade do aluno em apresentar outros exemplos na situação problema.

Em relação às respostas dadas pelo aluno E na prova escrita, de um modo geral constatamos o domínio do aluno com certas regras e algoritmos, porém sem relações entre conceitos, o que nos levou a considerá-lo como representante do nível de compreensão instrumental. No mais, o nível de compreensão instrumental diagnosticada no aluno E pode ser constatado nos três registros que destacaremos a seguir.

O primeiro registro foi que para o aluno em foco, a inter-relação histórica entre os Ternos Pitagóricos e o Teorema de Pitágoras é que "após o Teorema de Pitágoras veio os Ternos Pitagóricos que nos auxilia em resolver qualquer questão de uma forma mais rápida". O segundo registro é a resposta dada à pergunta "Com o módulo de ensino, o que você aprendeu sobre Ternos Pitagóricos?", a saber: "Aprendi que com os Ternos Pitagóricos eu posso resolver qualquer Teorema de Pitágoras mais rápido e criar qualquer questão para os meus alunos". Novamente torna-se evidente a importância que é dada pelo aluno E ao caráter prático do assunto matemático estudado.

Por fim, no terceiro registro, a resposta dada à situação problema, constatamos a apresentação de exemplos específicos, característica do nível de compreensão instrumental. A resposta apresentada é composta do terno (3,4,5) e dois secundários desse terno.

No entanto, dado que no nível de compreensão instrumental também há compreensão, ao compararmos as respostas apresentadas pelo referido aluno no questionário com as respostas apresentadas na prova escrita, constatamos certa compreensão sobre o Teorema de Pitágoras e os Ternos Pitagóricos. Exemplo claro disso é a resposta supracitada, posto que no questionário o aluno não apresentou nenhum conhecimento quanto aos ternos secundários.

No mais, um último ponto a ser destacado sobre o aluno E, diz respeito à sua futura prática docente. Curiosamente no questionário o referido aluno mostra plena certeza de que não pretende ensinar. Entretanto, na prova escrita ao ser questionado sobre suas expectativas quanto à futura prática docente, ele continua não querendo lecionar, porém apresenta uma certa possibilidade, conforme podemos verificar na transcrição a seguir.

"Não pretendo ensinar. Porém, se um dia eu for ensinar, as minhas expectativas são as melhores possíveis. Logo, não posso entrar em uma sala de aula pensando negativo".

Em suma, diante das respostas apresentadas nas provas escritas e na execução das atividades propostas no decorrer do módulo de ensino, destacamos que na medida em que os alunos foram desafiados com atividades em que foram incentivados a agir de forma não-convencional, os mesmos produziram uma diversidade de estratégias de resolução, mostrando que compreenderam as ações que executaram, em vez de estarem atrelados à memorização de fórmulas e procedimentos.

Com isso, posto a grande quantidade de respostas satisfatórias, na prova escrita, acreditamos que em sua maioria ocorreu uma aprendizagem com significado, em um nível de compreensão relacional, dos conteúdos matemáticos que foram abordados no decorrer do módulo de ensino, bem como no que diz respeito a importância dos Ternos Pitagóricos para o ensino do Teorema de Pitágoras e a inter-relação histórica dos referidos conteúdos.

No entanto, é válido ressaltar que em nosso planejamento cometemos a falha de não realizar uma entrevista após a prova escrita, o que nos daria mais elementos para a referida classificação. Entretanto, mesmo não tendo realizado essa entrevista, por menor que seja a evolução dos alunos, no domínio do conteúdo matemático, acreditamos que houve mudanças significativas quanto ao conhecimento que os alunos apresentaram antes da aplicação do módulo de ensino.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente capítulo discorreremos algumas considerações acerca de como o estudo dos Ternos Pitagóricos pode auxiliar no ensino do Teorema de Pitágoras, tendo como aliadas a própria História da Matemática e a obra *Recherche méthodique et propriétés des triangles rectangles en nombres entier* [Pesquisa Metódica e Propriedades dos Triângulos Retângulos em Números Inteiros], sob autoria do francês Eugène Bahier. As referidas considerações, que por sua vez representam os resultados gerais do nosso estudo, estarão em consonância com o objetivo geral e objetivos específicos propostos, os quais serão frisados a seguir.

O objetivo geral foi analisar o livro *Recherche méthodique et propriétés des triangles rectangles en nombres entiers,* visando à aplicação do conteúdo analisado, na disciplina Teoria dos Números, no curso de Matemática Licenciatura da UFRN. Enquanto que os objetivos específicos foram: 1. Analisar a obra *Recherche méthodique et propriétés des triangles rectangles en nombres entiers,* no contexto histórico da Teoria dos Números; 2. Elaborar e testar o módulo de ensino a ser ministrado na disciplina Teoria dos Números, tendo como referencial teórico a obra *Recherche méthodique et propriétés des triangles rectangles en nombres entiers*; 3. Promover uma apreciação da História da Matemática como recurso pedagógico.

Verificamos que o conceito de Ternos Pitagóricos é apresentado de forma consistente e sistemática, o que nos permitiu constatar seu potencial pedagógico ao elaborarmos o módulo de ensino que fora aplicado na disciplina Teoria dos Números, cuja eficácia discutiremos no presente capítulo. Outro potencial pedagógico constado foi a inter-relação histórica existente entre os Ternos Pitagóricos e o Teorema de Pitágoras.

No decorrer do módulo do ensino priorizamos o Uso Manipulativo da História da Matemática, o que segundo Fossa (2001) se dá através de atividades estruturadas utilizando materiais manipulativos, no qual a História da Matemática emerge como uma fonte rica em matéria prima para o desenvolvimento de tais atividades. Nesse contexto, elaboramos atividades estruturadas as quais foram aplicadas utilizando o método de redescoberta, promovendo a investigação por parte dos alunos, em sua maioria em grupos.

Um ponto a ser destacado foi a participação efetiva dos alunos, os quais foram estimulados a atuarem de forma curiosa, criando e refletindo na realização das atividades propostas. Sobretudo, evidenciou-se que as atividades estruturadas que elaboramos foi de fundamental importância para promover um ensino sobre Ternos Pitagóricos compreensivo, significativo e dinâmico para os alunos, conforme constatamos nos dados obtidos no decorrer e no final da intervenção pedagógica.

Posto que a avaliação é um processo contínuo, levamos em consideração os dados obtidos no questionário, na discussão promovida no segundo encontro e na prova escrita. Os dados obtidos no questionário e na discussão inicial nos mostraram que os alunos apresentavam falta de conhecimento de alguns conceitos envolvidos, como por exemplo, dos Ternos Pitagóricos, bem como seu desenvolvimento histórico.

Em contrapartida, a análise dos dados coletados da prova escrita, de modo geral mostrou que os alunos assimilaram com relativa compreensão os conceitos abordados no módulo de ensino, apontando para uma diferença qualitativa na aprendizagem com relação aos dados obtidos no questionário e na discussão coletiva realizada no início da intervenção pedagógica.

Com relação aos níveis de compreensão, concluímos que a maioria dos alunos atingiu um nível relacional de compreensão, sendo capazes de ultrapassarem as mecanizações propostas nos livros didáticos, apresentando uma compreensão significativa acerca dos três números inteiros que satisfazem o Teorema de Pitágoras, baseada no desenvolvimento histórico. No mais, é válido ressaltar que até nos casos onde a nosso ver se enquadram no nível de compreensão instrumental, houve um aumento significativo quanto à compreensão dos Ternos Pitagóricos e do Teorema de Pitágoras.

Diante do exposto, ressaltamos a importância pedagógica dos Ternos Pitagóricos ao passo que eles simplificaram os exemplos, possibilitando uma discussão contextualizada e mais interessante, por se tratarem de números inteiros positivos. Acreditamos que a compreensão apresentada, não mecanizada, é conseqüência da atuação dos alunos como artistas, refletindo e criando durante a própria ação.

Os alunos foram capazes de tomar decisões que o levaram a criar situações para suprir certas necessidades inerentes da futura prática docente, o que nos leva a acreditar que através das atividades estruturadas levando em consideração o Uso Manipulativo da História da Matemática enfocando o Teorema de Pitágoras e os Ternos Pitagóricos proporcionamos aos alunos, futuros professores de Matemática, condições melhores para atuarem de forma mais eficaz e prazerosa em sua futura prática docente.

Por fim, destacamos como contribuição da nossa pesquisa, a viabilidade de se elaborar atividades que sejam aplicadas não só na formação inicial dos professores, mas como também na formação continuada, as quais implicam em uma melhor compreensão acerca do conteúdo matemático em tela, a partir da obra de Bahier (1916) e da História da Matemática. Com isso, em anexo[19], apresentamos como resultado da nossa pesquisa, o material elaborado para o módulo de ensino, com o intuito de contribuir para com a formação inicial e continuada de professores de Matemática.

[19] Anexo G.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A; BASTIAN, I.V. O Teorema de Pitágoras: Uma abordagem enfatizando o caráter necessário/suficiente. In: *Educação Matemática em Revista*. SBEM, 2003. Ano 10, n. 14, p. 45-53.

ALVES-MAZZOTTI, A. J, O método nas Ciências Sociais. In: ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. *O método nas Ciências Naturais e Sociais: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 1998. p. 107 – 188.

BAHIER, E. *Recherche méthodique et propriétés des triangles rectangles en nombres entiers*. France: A. Hermann et fils, 1916.

BORBA, M. de C; ARAÚJO, J. L. Construindo pesquisas coletivamente em Educação Matemática. In: BORBA, M. de C; ARAÚJO, J. L. (orgs). *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. 2.ed. Belo *Horizonte* : Autêntica, 2006, 27-48.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. 2. Ed. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blücher, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental: Matemática.* Brasília: MEC / SEF, 1998.

D'AMBROSIO, U. *Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade*, Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

D'AMBROSIO, U. Prefácio. In: BORBA, M. de C. ; ARAÚJO, J. L. (orgs). *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. 2.ed. Belo Horizonte : Autêntica, 2006, 11-22.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. 2. ed. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, 1997.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da Matemática no Brasil. *Revista Zetetiké*: Ano 3 – nº 4 . Campinas: FE – CEMPEM, 1995. p. 1-37 .

FOSSA, J. A. *Teoria intuicionista da Educação Matemática*. Natal: EDUFRN, 1998.

FOSSA, J. A. *Ensaios sobre a Educação Matemática*. Belém: EDUEPA, 2001.

FOSSA, J. A.; ERICKSON, G. W. O Algoritmo da Linha Dividida e a Matemática Pitagórica. In: John A. Fossa. (Org.). *Presenças Matemáticas*. Natal: Editora da UFRN, 2004, v., p. 241-253.

FOSSA, J. A. *Os Primórdios da Teoria dos Números*. Natal: EDUFRN, no prelo.

GIL, A. C. *Como elaborar projetos de pesquisa*. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GÓMEZ-GRANELL, C. Rumo a uma epistemologia do conhecimento escolar: o caso da educação matemática. In: ARNAY, J; RODRIGO, M. J. *Domínios do conhecimento, prática educativa e formação de professores: A construção do conhecimento escolar*. v. 2. São Paulo: Ática, 1998. p. 15-41.

GUTIERRE, L. S. *Inter-relações entre História da Matemática, a Matemática e sua aprendizagem*. 2003. 261 p. il. Orientador: Bernadete Barbosa Morey. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2003.

LORENZONI, C. A.; SILVA, C. M. S. O velho conhecido Teorema de Pitágoras e suas demonstrações. In: *Revista História & Educação Matemática*. Rio Claro: SBHMat, 2002. v.2, n.2, p. 112-122.

MARTÍ, E. Construtivismo e pensamento matemático. In: ARNAY, J; RODRIGO, M. J. *Domínios do conhecimento, prática educativa e formação de professores: A construção do conhecimento escolar*. v. 2. São Paulo: Ática, 1998. p. 43-74.

MENDES, I. A. . O uso da história da matemática em sala de aula: uma opção produtiva para a matemática escolar. In: *XV Encontro de Pesquisa Educacional das regiões Norte e Nordeste* - XV EPENN, 2001, S. Luís, MA. XV EPENN - Educação, Desenvolvimento humano e Cidadania.

MENDES, I. A. *Matemática e Investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem*. Natal: Flecha do Tempo, 2006.

MIGUEL, A.; BRITO, A. J. A História da Matemática na Formação do Professor de Matemática. In: *Cadernos CEDES-História e Educação Matemática*. Campinas: Papirus, nº 40, 1996, p.47-61.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. *História na Educação Matemática: propostas e desafios*. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

MIORIM, M. A. O Teorema de Pitágoras em Livros Didáticos. In: *Revista Educação Matemática*. São Paulo: SBEM/SP, 1998. Ano 6, n.4, p.5-14.

NOBRE, S. Alguns "Porquês" na História da Matemática e suas Contribuições para a Educação Matemática. In: *Cadernos CEDES- História e Educação Matemática*. Campinas: Papirus, nº 40, 1996, p.29-35.

NOBRE, S. A; BARONI, R. L A Pesquisa em História da Matemática e suas relações com a Educação Matemática. In: Bicudo, M.A.V. *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas*. 1. ed. São Paulo: Editora da UNESP, 1999, v.1, p.129-136.

SKEMP, R. *Psicologia del aprendizaje de las matemáticas*. Trad. Gonzalo Gonzalvo Mainar. Madrid: Ediciones Morata, S. A. 1980.

TOLCHINSKY, L. Construtivismo em educação: consensos e disjuntivas. In: ARNAY, J; RODRIGO, M. J. *Domínios do conhecimento, prática educativa e formação de professores: A construção do conhecimento escolar*. v. 2. São Paulo: Ática, 1998. p.103 – 123.

ANEXOS

ANEXO A - Questionário

A. Dados Pessoais

Nome:

Idade:

B. Histórico Escolar

Ensino Fundamental

Estado (UF):

Público: ( ) SIM ( ) NÃO

Ensino Médio

Estado (UF):

Público: ( ) SIM ( ) NÃO

Graduação

Qual semestre você estar cursando?

Por que optou pelo curso em Matemática Licenciatura?

C. Prática Docente

1. Você já leciona? Caso sim, a quanto tempo?

2. Quais são suas expectativas sobre sua futura prática docente?

3. Para você, quais são os problemas a serem enfrentados pelos futuros professores de Matemática em sua atividade docente?

4. Em sua opinião, o que é um bom ensino de Matemática?

5. O que você entende por Educação Matemática?

6. Você conhece metodologias que auxiliam no ensino de Matemática? Caso sim, cite-as.

7. Em relação ao uso da História da Matemática, para você ela é necessária no ensino de Matemática? Por quê?

D. Teorema de Pitágoras

1. O que você conhece sobre o desenvolvimento histórico do Teorema de Pitágoras?

2. Em sua opinião, qual a importância do estudo do Teorema de Pitágoras?

3. Você conhece alguma aplicação? Qual?

4. Imagine que você está em uma sala de aula, ensinando sobre o Teorema de Pitágoras. Suponhamos que com o intuito de exemplificar triângulos que satisfazem o Teorema de

Pitágoras, ao olhar para suas anotações, você percebe que sua irmã mais nova pintou de esmalte preto, os números correspondentes aos catetos e as hipotenusas dos três triângulos que você havia copiado do livro didático que você esqueceu em cima da sua cama. Considerando que o professor é um artista, que necessita de criatividade para agir de acordo com sua necessidade, o que você faria? Imediatamente, você seria capaz de dar valores aos números que sua irmã pintou? Quais seriam esses valores?

E. Ternos Pitagóricos

1. O que você sabe sobre ternos pitagóricos?

2. Você considera importante o estudo dos ternos pitagóricos para os futuros professores de Matemática? Justifique sua resposta.

ANEXO B - Avaliação Escrita

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - CCET

Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática

Mestranda: Georgiane Amorim Orientador: John A. Fossa

Público Alvo: Alunos do curso de Matemática Licenciatura matriculados na disciplina Teoria dos Números - 2008.2

Avaliação Escrita

1. Para você, o estudo dos ternos pitagóricos para o ensino do Teorema de Pitágoras, é importante? Justifique sua resposta.

2. Em relação ao desenvolvimento do módulo de ensino Ternos Pitagóricos: uma ferramenta pedagógica no ensino do Teorema de Pitágoras, qual momento você considerou mais importante?

3. Quais são suas expectativas sobre sua futura prática docente? Nota: Essa pergunta é destinada aos alunos do curso de Matemática Licenciatura.

4. Em relação ao uso da História da Matemática, para você ela é necessária no ensino de Matemática? Por quê?

5. Historicamente, como os Ternos Pitagóricos e o Teorema de Pitágoras estão inter-relacionados?

6. Com o módulo de ensino, o que você aprendeu sobre Ternos Pitagóricos?

7. Qual a definição de TRIÂNGULO PRIMITIVO e de TRIÂNGULO SECUNDÁRIO?

8. Porque no desenvolvimento do módulo de ensino enfatizamos mais os triângulos primitivos?

9. Vimos que $(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^2 + y^2)^2$ é uma importante relação no estudo dos ternos pitagóricos. Suponhamos que um colega seu faltou no dia em que essa relação foi exposta e desenvolvida em classe, o que você diria para explicá-lo sobre:

a. A importância dessa relação;

b. O procedimento necessário para chegarmos a essa relação;

c. Quais são as condições dos termos x e y;

10. Imagine que você está em uma sala de aula, ensinando sobre o Teorema de Pitágoras. Suponhamos que com o intuito de exemplificar triângulos que satisfazem o Teorema de Pitágoras, ao olhar para suas anotações, você percebe que sua irmã mais nova pintou de esmalte preto, os números correspondentes aos catetos e as hipotenusas dos três triângulos primitivos que você havia copiado do livro didático que você esqueceu em cima da sua cama. Considerando que o professor é um artista, que necessita de criatividade para agir de acordo com sua necessidade, o que você faria? Imediatamente, você seria capaz de dar valores aos números que sua irmã pintou? Quais seriam esses valores?

Nota: Os triângulos deverão ser primitivos!

11. De acordo com a tábua que construímos em classe, responda as perguntas relacionadas a cada uma das colunas.

x	y	$(x-1)+x$	$2(x-1)x$	$b+1$
		a	b	c
Qual seqüência é representada?	Qual seqüência é representada?	Qual seqüência é representada?	Que relação possui com os números geradores x e y?	Que relação possui com o número b?

ANEXO C - Cronograma

13.10.2008: Encontro I

27.10.08: Encontro II

29.10.08: Encontro III

31.10.08: Encontro IV

03.11.08: Encontro V

05.11.08: Encontro VI

10.11.08: Encontro VII

ANEXO D - Plano Pedagógico

Módulo de ensino - Ternos Pitagóricos: uma ferramenta pedagógica no ensino do Teorema de Pitágoras

Duração: 7 encontros de duas horas aula cada

Público Alvo: Alunos da disciplina Teoria dos Números, ministrada pelo professor John Fossa

Conteúdo: Ternos Pitagóricos

Objetivos

Geral

Oferecer aos futuros professores de matemática, uma prática que possibilite a reflexão da utilização dos Ternos Pitagóricos como uma ferramenta pedagógica no ensino do Teorema de Pitágoras.

Específicos

Espera-se que os futuros professores sejam capazes de:

- ✓ Compreender o desenvolvimento histórico do Teorema de Pitágoras;
- ✓ Refletir sobre a importância do Teorema de Pitágoras no Ensino de Matemática, bem como suas aplicações;
- ✓ Definir os Ternos Pitagóricos;
- ✓ Compreender o desenvolvimento histórico dos Ternos Pitagóricos;
- ✓ Refletir sobre a importância do estudo dos Ternos Pitagóricos para a futura prática docente;

✓ Entender o uso da História da Matemática como recurso pedagógico, e não apenas como elemento motivador.

Metodologia

Para o desenvolvimento do módulo de ensino, proporcionaremos três momentos.

No momento I, será aplicado um questionário, que nos servirá como parâmetro (a priori), ao analisarmos a eficácia do módulo de ensino. Em outras palavras, esse questionário será o instrumento inicial, que teremos para verificar o alcance dos nossos objetivos. Os outros instrumentos posteriores, a serem comparados com o questionário, serão o desenvolvimento das atividades propostas e uma avaliação escrita a ser realizada no final. Com o questionário, queremos identificar as concepções dos futuros professores de Matemática, alunos da disciplina Teoria dos Números, sobre:

1. Teorema de Pitágoras: desenvolvimento histórico, aplicação e importância para o ensino;

2. Ternos Pitagóricos: definição, importância do seu estudo, desenvolvimento histórico;

3. A História da Matemática como recurso pedagógico.

Além disso, iremos realizar algumas perguntas pessoais, tais como: Por que Licenciatura em Matemática? Já leciona? Expectativas?

O momento II consiste no desenvolvimento dos seguintes conteúdos:

✓ Desenvolvimento histórico, interrelacionando os Ternos Pitagóricos com o Teorema de Pitágoras;

✓ O uso da História da Matemática como recurso pedagógico;

✓ Necessidade/importância do estudo dor Ternos Pitagóricos;

Ternos pitagóricos: definição, fórmula paramétrica, construir a tabela, estudar o comportamento, alguns teoremas. Para esse item, iremos utilizar como referência, a obra

Recherche méthodique et propriétés des triangles rectangles en nombres entiers, do francês Eugène Bahier.

O momento II consiste na aplicação didática do módulo de ensino. Com o intuito de não só uma boa produtividade individual, como também coletiva, as atividades a serem realizadas nos seis encontros, tais como, exercícios por escrito, participação oral, exposição na lousa, sempre serão realizadas em duplas (permutáveis). Entretanto, na medida em que for solicitada a entrega por escrito das atividades, cada aluno deverá entregar o seu.

No decorrer dos encontros, iremos fornecer algumas dicas de dinâmicas e metodologias que podem ser úteis à futura prática docente dos alunos.

No momento III, aplicaremos uma avaliação escrita, com o intuito de registrar por escrito as respostas dadas pelos alunos, à atividades relacionadas ao que foi apresentado no desenvolvimento do módulo de ensino.

Avaliação

Considerando que a avaliação não é algo que acontece depois do ato de conhecer, e sim contínua, os alunos serão avaliados durante todo o decorrer do módulo de ensino, através de: dinâmica, participação, posições, registros e comentários da produção coletiva e individual, freqüência, realização e desenvolvimento das atividades propostas. Além disso, consideraremos como instrumento avaliativo, uma avaliação escrita.

ANEXO E - Roteiro do encontro V

TEMA: Pesquisa metódica dos triângulos primitivos por meio da relação fundamental

I. GENERALIDADE DESSA RELAÇÃO

A todo número inteiro maior que dois, tomado por valor de a ou de b, sempre corresponde ao menos um triângulo retângulo em números inteiros, ou seja, um grupo de três números inteiros ligados pela relação $a^2 + b^2 = c^2$ (I).

II. TRÊS CASOS PARTICULARES

- 1° caso particular: Em (III), fazendo y = 1, temos: ________________________________

Exemplos numéricos para os três primeiros números pares:

para x = 2: _______________________

para x = 4: _______________________

para x = 6: _______________________

Reflexão: Nesse caso, todo valor par atribuído à x, estará associado à valores de a, b e c, primos entre si, dois a dois, fornecendo assim, um triângulo primitivo.

- 2° caso particular: Em (III), fazendo y = 2, temos: ______________________________ .

Exemplos numéricos para os três primeiros números ímpares a partir de x=3:

para x = 3: _______________

para x = 5: ________________

para x = 7: ________________

Reflexão: Nesse caso, todo valor ímpar atribuído à x (a partir de x=3), estará associado à valores de a, b e c, primos entre si, dois a dois, fornecendo assim, um triângulo primitivo.

- 3° caso particular: Em (III), fazendo x = y + 1 (ou seja, dois números consecutivos, sendo x o sucessor de y), temos que a = _________ = ________.

Reflexão: Com isso, observamos que os valores sucessivos de a, quando relacionados à valores de y pertencentes à seqüência natural dos números inteiros, corresponde a seqüência dos números ímpares, à partir de 3, e por conseqüência, todos os triângulos assim obtidos, são primitivos. Nesse caso, os valores correspondentes obtidos para b e c, podem ser verificados através das relações $c = b + 1$ e $b + c = a^2$ .Através dessa relação, temos que: c = ___________, b = __________.

IV. REFLEXÕES

1. Pode-se determinar rapidamente, os números a, b e c, em função de x, tomando todos os valores inteiros a partir de 2. Os valores de a são os números ímpares sucessivos, a partir do 3.

2. A partir da relação fundamental (III) $(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^2 + y^2)^2$, esses três casos particulares, nos conduzem a justificativa/necessidade/possibilidade de construir uma Tábua que agrupa valores associados de a, b e c, em função do número gerador x.

3. Diante do exposto, surge uma importante ferramenta pedagogógica: a construção de uma tábua, agrupando os valores associados de a, b e c, em função de x, permitindo calcular facilmente, os sucessores, considerando $1 \leq x \leq 25$.

4. Tendo os primitivos, é um bom e ótimo começo. Uma vez que, a partir dos primitivos, chegamos aos secundários.

ANEXO F -Tábua a ser preenchida

x	y = ___	2(x – 1)	___	___	___
			a	b	c

ANEXO G - Contribuição da nossa investigação

Material didático - Ternos Pitagóricos: uma ferramenta pedagógica no ensino do Teorema de Pitágoras

Público Alvo: pesquisadores, professores, educadores e estudantes de Matemática e demais interessados que utilizam a Educação Matemática como trabalho;

Responsável: Georgiane Amorim

Conteúdo: Ternos Pitagóricos

I. Noções Básicas

Problema: as propriedades dos conjuntos dos três números inteiros positivos que satisfazem a relação $a^2 + b^2 = c^2$.

Definições e propriedades fundamentais

TRIÂNGULO RETÂNGULO EM NÚMEROS INTEIROS: todo triângulo retângulo cujos três catetos são mensuráveis conforme uma unidade convenientemente escolhida, podendo ser expressa por números inteiros e que traduzindo em linguagem aritmética, retoma oferecer a consideração das soluções através dos números inteiros da relação $\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$ **(I),** que existe entre os três lados de um triângulo retângulo;

Condições dos termos de $\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$ (I): a, b e c são inteiros, primos entre si, dois a dois;

RELAÇÃO PRIMITIVA OU TRIÂNGULO PRIMITIVO: toda relação (I), nas quais a, b e c são números inteiros primos entre si, dois a dois;

RELAÇÃO SECUNDÁRIA OU TRIÂNGULO SECUNDÁRIO: toda relação da forma (I) que pode ser reconduzida a uma relação primitiva, dividindo os três termos por seu máximo divisor comum, que é, portanto, um número maior que a unidade;

II. TEOREMA: "Se entre três números inteiros a, b, c, primos entre si, dois a dois existe a relação $a^2 + b^2 = c^2$, os números a e b são sempre de paridades diferentes, e número c é sempre ímpar".

DEMONSTRAÇÃO

Para começar, a e b não podem ser todos os dois pares, se não eles não seriam primos entre si. Eles não podem ser todos os dois ímpares, sendo o quadrado de todo número ímpar é múltiplo de 8 aumentado de uma unidade.

Tem-se, portanto: $a^2 = 8p + 1$ e $b^2 = 8q + 1$.

A soma $a^2 + b^2$ seria um múltiplo de 8 aumentado de 2. O número c^2 seria então simplesmente par, ou seja, não múltiplo de 4, o que é impossível, pois todo número quadrado par é múltiplo de 4.

Portanto, os números a e b são de paridades diferentes. Logo, a soma de seus quadrados, ou seja, c^2 sempre será ímpar. Com isso, o número c é ímpar.

Com isso, podemos considerar, por conveniência, que é sempre possível supor que na relação primitiva$a^2 + b^2 = c^2$ *(I)*, o número a é ímpar; Logo, b será sempre par.

III. IDENTIDADE

Dado a identidade $(X - Y)^2 + 4XY = (X + Y)^2$ (II), ao compararmos $X - Y = a$ e $X + Y = c$, temos: $X = c + a / 2$ e $Y = c - a / 2$; $4XY = c^2 + a^2$.

Portanto, nota-se que se a relação (I) existe entre três números inteiros a, b, c, primos entre si, dois a dois, sempre é possível determinar os valores de X e Y em função dos números a, b e c.

IV. RELAÇÃO FUNDAMENTAL

A partir da identidade II $(X - Y)^2 + 4XY = (X + Y)^2$, surge a identidade III $\boldsymbol{(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^2 + y^2)^2}$, considerando x e y primos entre si e de paridades diferentes, podemos obter para a,b, c, valores inteiros para as relações: $a = (x^2 - y^2)^2$ (IV); $b= (2xy)^2$ (V); $c= (x^2 + y^2)^2$ (VI); sendo que esses valores verificam a relação primitiva da forma $a^2 + b^2 = c^2$.

Pode servir para estabelecer todas as relações primitivas da forma I: $(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^2 + y^2)^2$

*Ela foi indicada por Euclides!

Exemplo: Se $x = 3$ e $y = 2$, temos que o terno pitagórico correspondente é o (5,12, 13).

Generalidade da relação fundamental: "A todo número inteiro maior que dois, tomado por valor de a ou de b, sempre corresponde ao menos um triângulo retângulo em números inteiros, ou seja, um grupo de três números inteiros ligados pela relação $a^2 + b^2 = c^2$ (I)".

V. TRÊS CASOS PARTICULARES

1° caso particular: Se substituirmos y = 1 na relação fundamental $(x^2-y^2)^2+(2xy)^2 = (x^2+y^2)^2$ (III), obtemos a relação $(x^2-1)^2+(2x)^2 = (x^2+1)^2$.

Exemplos numéricos para os três primeiros números pares:

Para $x = 2$, o triângulo correspondente é $3^2+4^2 = 5^2$ (menor triângulo retângulo em números inteiros);

Para $x = 4$, o triângulo correspondente é $15^2+8^2 = 17^2$;

Para $x = 6$, o triângulo correspondente é $35^2+12^2 = 37^2$.

Nesse caso, todo valor par atribuído à x, estará associado à valores de a, b e c, primos entre si, dois a dois, fornecendo assim, um triângulo primitivo.

2° caso particular: Se substituirmos $y = 2$ na relação fundamental $(x^2-y^2)^2+(2xy)^2 = (x^2+y^2)^2$ (III), obtemos a relação $(x^2-4)^2+(4x)^2 = (x^2+4)^2$. Seguindo o mesmo procedimento do primeiro caso, os exemplos numéricos para os três primeiros números ímpares a partir de x=3, são os seguintes:

Para $x = 3$, o triângulo correspondente é $5^2+12^2 = 13^2$;

Para $x = 5$, o triângulo correspondente é $21^2+20^2 = 29^2$;

Para $x = 7$, o triângulo correspondente é $45^2+28^2 = 53^2$.

Nesse caso, todo valor ímpar atribuído à x, a partir de x=3, estará associado à valores de a, b e c, primos entre si, dois a dois, fornecendo assim, um triângulo primitivo.

3° caso particular: Se fizermos $x = y+1$, ou seja, dois números consecutivos, sendo x o sucessor de y, obtemos assim, $a = x^2-y^2 \rightarrow a = 2y+1$.

Com isso, observamos que os valores sucessivos de a, quando relacionados a valores de y pertencentes à seqüência natural dos números inteiros, corresponde a seqüência dos números ímpares, à partir de 3, e por conseqüência, todos os triângulos assim obtidos, são primitivos.

VI. ALGUMAS REFLEXÕES

1. Pode-se determinar rapidamente, os números *a*, *b* e *c*, em função de *x*, tomando todos os valores inteiros a partir de 2. Os valores de a são os números ímpares sucessivos, a partir do 3.

2. A partir da relação fundamental (III) $(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^2 + y^2)^2$, esses três casos particulares, nos conduzem a possibilidade de construir uma Tábua que agrupa valores associados de *a*, *b* e *c*, em função do número gerador *x*.

3. Diante do exposto, surge uma ótima ferramenta pedagogógica: a construção de uma tábua, agrupando os valores associados de *a*, *b* e *c*, em função de *x*, permitindo calcular facilmente, os sucessores, considerando $1 \leq x \leq 25$.

4. Tendo os primitivos, é um bom e ótimo começo. Uma vez que, a partir dos primitivos, chegamos aos secundários.

VII. TÁBUA QUE PODE SER CONSTRUÍDA

x	y = x -1	2(x – 1)	(x – 1) + x	2(x-1)x	b+1
			a	b	c
1	0	0	1	0	1
2	1	2	3	4	5
3	2	4	5	12	13
4	3	6	7	24	25
5	4	8	9	40	41
6	5	10	11	60	61
7	6	12	13	84	85
8	7	14	15	112	113
9	8	16	17	144	145
10	9	18	19	180	181
11	10	20	21	220	221

12	11	22	23	264	265
13	12	24	25	312	313
14	13	26	27	364	365
15	14	28	29	420	421
16	15	30	31	480	481
17	16	32	33	544	545
18	17	34	35	612	613
19	18	36	37	684	685
20	19	38	39	760	721
21	20	40	41	840	841
22	21	42	43	924	925
23	22	44	45	1012	1013
24	23	46	47	1104	1105
25	24	48	49	1200	1201

VIII. DISCUSSÃO DA TÁBUA

i: As duas primeiras colunas são constituídas pela seqüência dos números naturais, a primeira a partir de 1, e a segunda a partir de 0;

ii: A terceira coluna é constituída pela seqüência dos números pares, a partir de 0. Portanto, os números dessa coluna são o dobro dos correspondentes da segunda coluna;

iii: A quarta coluna apresenta os valores sucessivos do número *a*: essa é a seqüência dos números ímpares;

iv: A quinta coluna apresenta os valores correspondentes de *b*. O número de cada linha é o produto dos dois números situados sob a mesma linha nas colunas 1 e 3;

v: A sexta coluna apresenta os valores correspondentes de *c*, obtidos adicionando uma unidade aos valores de *b* que se encontram na mesma linha;

vi: Os valores atribuídos ao número *a*, formados pela seqüência natural dos números ímpares, são terminados por 1, 3, 5, 7, 9, sucessivamente. Com isso, o valor das unidades se repetem por períodos de 5 números;

vii: Os valores atribuídos ao número *b*, nessa tábua, são terminados sucessivamente por 0, 4, 2, 4, 0 e os números *c* são sucessivamente terminados por 1, 5, 3, 5,1; Portanto, os números *b* e *c* se sucedem por períodos de 5, e esses períodos são simétricos em relação ao número médio das unidades;

viii: O número *b* sempre será terminado por 0, 2 ou 4, e que todo número *c* sempre será terminado por 1, 3 ou 5.

ix: A tábua em foco é fácil de ser construída, permitindo determinar rapidamente, todos os triângulos primitivos, para os valores ímpares de *a*. Com isso, através da multiplicação dos números *a*, *b* e *c* por um mesmo número inteiro, pode-se deduzir um número ilimitado de soluções secundárias.

IX. REFERÊNCIAS

BAHIER, Eugène. Recherche méthodique et propriétés des triangles rectangles en nombres entiers. France: A. Hermann et fils, 1916.

BOYER, Carl B. História da Matemática. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental: Matemática. Brasília: MEC / SEF, 1998. 148 p. bbe .

EVES, H. Introdução à História de Matemática. Campinas: Editora da UNICAMP, 1995.

FOSSA, J. A.; ERICKSON, G. W. O Algoritmo da Linha Dividida e a Matemática Pitagórica. In: John A. Fossa. (Org.). Presenças Matemáticas. Natal: Editora da UFRN, 2004, v., p. 241-253.

STRUIK, Dirk J. História Concisa das Matemáticas. Lisboa: Gradiva,1989