

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS
NATURAIS E MATEMÁTICA**

NANCI BARBOSA FERREIRA ARAÚJO

**NÚMEROS COMPLEXOS:
UMA PROPOSTA DE MUDANÇA METODOLÓGICA PARA UMA
APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA NO ENSINO MÉDIO**

**NATAL
2006**

NANCI BARBOSA FERREIRA ARAÚJO

**NÚMEROS COMPLEXOS:
UMA PROPOSTA DE MUDANÇA METODOLÓGICA PARA UMA
APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA NO ENSINO MÉDIO**

Dissertação apresentada como requisito à obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, área de ensino de Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

Orientadora: Profa. Dra. Marlúcia Oliveira de Santana Varela

Co-orientadora: Profa. Dra. Bernadete Barbosa Morey

**NATAL
2006**

Catálogo da Publicação na Fonte. UFRN / SISBI / Biblioteca Setorial
Especializada do Centro de Ciências Exatas e da Terra – CCET.

Araújo, Nanci Barbosa Ferreira.

Números complexos: uma proposta de mudança
metodológica para uma aprendizagem significativa no
ensino médio

/ Nanci Barbosa Ferreira Araújo. – Natal, 2006.

111f. : il.

Orientadora : Marlúcia Oliveira de Santana Varela.

Co-orientadora: Bernadete Barbosa Morey.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do
Norte. Centro de Ciências Exatas e da Terra. Programa de Pós-
Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática.

1. Números complexos – Dissertação. 2. Matemática – Educação – Dissertação. I. Varela,
Marlúcia Oliveira de Santana. II. Título.

NANCI BARBOSA FERREIRA ARAÚJO

NÚMEROS COMPLEXOS:
UMA PROPOSTA DE MUDANÇA METODOLÓGICA PARA UMA
APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada como requisito à
obtenção do grau de Mestre em Ensino de
Ciências Naturais e Matemática, área de
ensino de Matemática pela Universidade
Federal do Rio Grande do Norte.

Aprovada em: 18/12/2006

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Marlúcia Oliveira de Santana Varela (orientadora)
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Profa. Dra. Bernadete Barbosa Morey (co-orientadora)
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Profa. Dra. Cláudia Helena Dezotti (examinador externo)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Prof. Dr. Iran Abreu Mendes (examinador interno)
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Dedico a Antônio Araújo Sobrinho, companheiro querido, cúmplice na realização de meus ideais, e aos meus pais Joaquim Inocêncio Ferreira Filho e Dina Barbosa Ferreira pelo incentivo, apoio, compreensão e amor dedicados a mim , durante este trabalho.

AGRADECIMENTOS

- A DEUS, pela minha vida, pela minha família e por todas as pessoas que, de alguma forma, contribuíram na feitura e engrandecimento deste trabalho; em especial:
- A Profa. Dra. Marlúcia de Oliveira Santana Varela, pesquisadora exemplar, pela confiança, compreensão, acolhimento e ao seu inestimável apoio intelectual, moral e afetivo;
- A Profa. Dra. Bernadete Barbosa Morey, co-orientadora deste trabalho;
- Ao meu companheiro Antônio Araújo Sobrinho, pelo constante incentivo e carinho sempre presente;
- A Banca Examinadora composta pelos professores Doutores Bernadete Barbosa Morey e Iran Abreu Mendes, pelas valiosas sugestões, na época do Exame de Qualificação;
- A professora, Leonor de Araújo Bezerra Oliveira e ao professor Luis Ferdinando Patriota, pelas revisões de redação de texto em português e do Abstract em inglês, respectivamente;
- Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática da UFRN;
- Aos meus pais Joaquim e Dina, às minhas irmãs Nair, Nilza, Nailsa e Noilde;
- Aos alunos do 2º ano do Ensino Médio do CEFET-RN, pela participação tão significativa neste trabalho;
- À amiga Maria Suely Rodrigues, pelas contribuições tão necessárias;
- Aos colegas professores de Matemática do CEFET-RN, pelas contribuições dadas através da entrevista.

“Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real”.

(Lobachevsky)

RESUMO

Este trabalho apresenta uma proposta de mudança metodológica para o ensino-aprendizagem dos números complexos no ensino médio. É fundamentado nas indagações e dificuldades dos alunos, detectadas na sala de aula quanto ao ensino dos números complexos, uma problematização do contexto do ensino da matemática - motivo da investigação. Na busca de uma aprendizagem significativa e situando o trabalho enquanto pesquisa, é apresentada uma reflexão histórica da evolução do conceito dos números complexos, destacando seus enfoques mais relevantes, a saber: simbólico, numérico, geométrico e algébrico. Na seqüência, mostra a descrição do caminho da pesquisa fundamentado na metodologia da engenharia didática. Esta é desenvolvida a partir da utilização de suas quatro fases, onde na fase das análises preliminares são apresentados dois levantamentos de dados: o primeiro é com relação à forma de apresentação dos conteúdos dos números complexos nos livros didáticos de matemática e o segundo é com relação à entrevista realizada com professores do ensino médio que trabalham com números complexos no exercício de suas profissões. Na fase da análise *a priori* é apresentado o material preparado e organizado para ser utilizado na fase seguinte. Na fase da experimentação é apresentado o processo de realização, que foi operacionalizado com alunos do segundo ano do ensino médio do Centro Federal de Educação Tecnológica do Rio Grande do Norte – CEFET/RN. Ao final, apresenta, na fase da análise *a posteriori* e validação, a revelação dos resultados obtidos a partir das observações feitas na sala de aula quando da realização da seqüência didática, das falas dos alunos e da coleta de dados.

Palavras-Chave: Números Complexos. Matemática. Ensino-aprendizagem.

ABSTRACT

This work presents a proposal of a methodological change to the teaching and learning of the complex numbers in the Secondary education. It is based on the inquiries and difficulties of students detected in the classrooms about the teaching of complex numbers and a questioning of the context of the mathematics teaching - that is the reason of the inquiry of this dissertation. In the searching for an efficient learning and placing the work as a research, it is presented a historical reflection of the evolution of the concept of complex numbers pointing out their more relevant focuses, such as: symbolic, numeric, geometrical and algebraic ones. Then, it shows the description of the ways of the research based on the methodology of the didactic engineering. This one is developed from the utilization of its four stages, where in the preliminary analysis stage, two data surveys are presented: the first one is concerning with the way of presenting the contents of the complex numbers in math textbooks, and the second one is concerning to the interview carried out with High school teachers who work with complex numbers in the practice of their professions. At first, in the analysis stage, it is presented the prepared and organized material to be used in the following stage. In the experimentation one, it is presented the carrying out process that was made with the second year High school students in the *Centro Federal de Educação tecnológica do Rio Grande do Norte* – CEFET-RN. At the end, it presents, in the subsequent and validation stages, the revelation of the obtained results from the observations made in classrooms in the carrying out of the didactic sequence, the students' talking and the data collection.

Key-words: Complex numbers. Mathematics. Teaching and Learning.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Representação de um número complexo no plano cartesiano	29
Figura 2	Representação do par ordenado $(0,1)$ no lugar da $\sqrt{-1}$	29
Figura 3	Representação do plano de Argand - Gauss	30
Figura 4	Representação de um vetor	31
Figura 5	Representação de uma soma vetorial	31
Fotografia 1	Prédio atual do CEFET-RN	34
Fotografia 2	Distribuição do material	53
Figura 6	Quadrado mágico	58
Fotografia 3	Esclarecimentos finais sobre o quadrado mágico	59
Fotografia 4	Esclarecimentos aos grupos	61
Fotografia 5	Visita aos grupos para o registro das falas	67

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Conteúdos de matemática para o 2 ^o ano do ensino médio e distribuição do tempo	37
Tabela 2	Análise dos livros didáticos e suas relações com os números complexos	43
Tabela 3	Entrevista com professores sobre números complexos	47
Apêndice L	Cronologia da evolução dos números complexos	105

LISTA DE SIGLAS

CEFET-RN:	Centro Federal de Educação Tecnológica do Rio Grande do Norte
CNE:	Conselho Nacional de Educação
ETFRN:	Escola Técnica Federal do Rio Grande do Norte
IBEP:	Instituto Brasileiro de Edições Pedagógicas
INEP:	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
LDB:	Lei de Diretrizes e Bases
PCN:	Parâmetros Curriculares Nacionais
PPGECNM-UFRN:	Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte
SBPC:	Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência
UECE:	Universidade Estadual do Ceará
UFRN:	Universidade Federal do Rio Grande do Norte

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
2	OS NÚMEROS COMPLEXOS NO ENSINO MÉDIO	23
2.1	ALGUNS ENFOQUES PRESENTES NA EVOLUÇÃO DOS NÚMEROS COMPLEXOS	26
2.1.1	Enfoque Simbólico	27
2.1.2	Enfoque Numérico	28
2.1.3	Enfoque Geométrico	28
2.1.4	Enfoque Algébrico	31
3	OS CAMINHOS DA PESQUISA	33
3.1	DESCREVENDO O AMBIENTE, OS PARTICIPANTES E O PROGRAMA DE DISCIPLINA	33
3.1.1	A sala de aula	35
3.1.2	A turma	36
3.1.3	O programa de disciplina	36
3.2	DESCREVENDO A METODOLOGIA DA PESQUISA E OS SEUS INSTRUMENTOS TEÓRICOS	38
3.2.1	Engenharia didática	39
3.2.2	os números complexos nos livros didáticos	41
3.2.3	Entrevista com professores de matemática a respeito dos números complexos	44
3.3	DESCREVENDO A METODOLOGIA DE ENSINO	49
3.3.1	Implementando a engenharia didática	52
4	DISCUSSÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS DA PESQUISA	72
4.1	ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA COM RELAÇÃO AOS NÚMEROS COMPLEXOS	72
4.2	COMENTÁRIOS DAS RESPOSTAS DAS ENTREVISTAS	75
4.3	DISCUSSÃO DE ALGUNS RESULTADOS MAIS RELEVANTES DA EXPERIMENTAÇÃO EM CLASSE	77

5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	87
	REFERÊNCIAS	89
	APÊNDICES	92
	ANEXOS	109

1 INTRODUÇÃO

As reflexões que buscamos empreender neste trabalho referem-se à forma como o conteúdo dos números complexos e seu processo de ensino e aprendizagem são trabalhados no contexto educacional das escolas de Ensino Médio.

O ponto de partida para essas reflexões tem como referência a nossa experiência profissional, bem como as leituras e os estudos que vimos realizando em alguns cursos, inclusive nas disciplinas da Pós-graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, na Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

Desde 1986, quando iniciamos nossa vivência como professora de Matemática no Ensino Médio, observamos que nossos alunos do segundo ano apresentam notáveis dificuldades durante as aulas referentes ao conteúdo de números complexos. Estas dificuldades se acentuam mais quando aparecem números representados na forma trigonométrica e em questões que envolvem a primeira e a segunda fórmula de De Moivre.

As indagações dos alunos durante as aulas expositivas e as dificuldades demonstradas quando o assunto a ser estudado era números complexos chamaram nossa atenção. As dificuldades dos alunos para interagir com o citado conteúdo foram sendo observadas tanto no decorrer das aulas através das perguntas, quanto no desempenho nos trabalhos e na realização de provas, ou testes, nos quais o rendimento não era satisfatório.

Estas preocupações nos remetem a leituras que discutem estas questões no contexto amplo da educação e, particularmente, do ensino da Matemática.

Ao longo do Século XX, o notável desenvolvimento das ciências não foi acompanhado por um correspondente esforço educacional. O conhecimento científico não se disseminou em todos os setores profissionais e sociais, como era necessário, mas influenciou o repensar da História da Educação e, portanto, do ensino e da aprendizagem da Matemática. Numa visão mais ampliada sobre ensino de Matemática, os dados do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (INEP) sobre a qualidade do ensino de Matemática no Brasil, atestam que o nível de escolaridade do estudante continua refletindo baixo índice de aprendizagem. Isto não é diferente em

relação aos números complexos. Durante as nossas atividades como professora, tivemos a oportunidade de acompanhar a aprendizagem dos alunos e pudemos constatar o baixo índice de aproveitamento.

Nos debates sobre ensino de Matemática, autores como Fossa (2000) e Varela (2000) questionam, no trabalho com os alunos, entre outras coisas, a relevância dada às fórmulas e resultados e a enfoques conteudísticos, prontos para serem usados em sala de aula sem uma discussão mais contextualizada e compreendida pelo aluno; critica-se, portanto, a forma do trabalho em face da especificidade da disciplina. “Estas questões estão atreladas a uma visão tradicional para o ensino, porém a luta por uma educação matemática vem apontando novas alternativas.” (VARELA, 2000, p.11).

A Educação Matemática tem como fundamento facilitar a aprendizagem da matemática contrapondo-se à caracterização da Matemática como sendo um conhecimento a ser transferido, do professor ao aluno, através de técnicas didáticas apropriadas. Neste sentido, nossa preocupação será no sentido de desenvolver uma instrução mais compreensível, com base em seqüências didáticas, que motive o aluno a interagir com o conteúdo.

A tendência é de considerar a matemática como um processo e de estimular o aluno a participar neste processo por pensar matematicamente. Desta forma, o maior esforço é no sentido de delinear o referido processo e acompanhar o progresso do aluno – coisas que o aluno pode fazer para tornar a sua apreensão mais fácil. (FOSSA, 2000, p. 7).

No contexto atual, operam-se mudanças significativas no que se refere ao ensino de Matemática, as quais buscam considerar os múltiplos aspectos da formação e do desenvolvimento de conceitos na aprendizagem escolar. Essas preocupações, somadas às contribuições das propostas pedagógicas, são fatores que vêm influenciando novas formas de pensar o ensino.

No Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1999) de Matemática discutem a elaboração das propostas para o Ensino Médio e deixam claro que, na melhor das hipóteses, essas propostas são o início de um processo de transformação, de acomodação e de readaptação do ensino da matemática.

Do ponto de vista legal, tem-se buscado uma atualização, porém o caminho precisa ser efetivado na prática pedagógica do professor de Matemática. A Lei de Diretrizes e Bases – LDB nº 4024/61 orientou as escolas pelo caminho do ensino tradicional. No período subsequente, surge a Matemática moderna, centrada nos conteúdos da teoria de conjuntos e estruturas algébricas.

A década de 70 trouxe o conhecimento científico proposto para o cidadão comum, especialmente para o Ensino Médio, no entanto não teve o acompanhamento da formação docente. Embora proposto pela Lei nº 5.692/71, a perspectiva de formar profissionais de nível médio ainda hoje continua sendo perseguida.

As discussões pedagógicas se aprofundaram e tiveram como proposta um núcleo de diferentes correntes denominadas *construtivistas*, cuja idéia básica foi tomar a aprendizagem como resultado da construção do conhecimento pelo aluno, respeitando assim suas concepções prévias ao processo de aprendizagem.

No plano das leis e das diretrizes, a definição para o Ensino Médio, assim como seu detalhamento e encaminhamento apontam para uma revisão e para uma atualização na direção de instaurar a prática de uma educação matemática mais consciente do contexto de aplicabilidade do aluno (LDB/96; CNE/980). Muitos artigos dessa Resolução destinam-se a orientar o aprendizado para uma maior contextualização, uma efetiva interdisciplinaridade e uma formação humana mais completa (BRASIL,1999).

Nesse sentido, há alguns anos vem se discutindo a melhoria do ensino da Matemática. Associações de ensino de Matemática, Sociedades de Professores de Matemática têm se mobilizado, porém propostas concretas que atendam às necessidades do aluno ainda são insuficientes.

Esta carência aumenta mais ainda quando se trata dos números complexos: poucos trabalhos têm sido elaborados e aplicados. Nesta pesquisa, o levantamento bibliográfico confirma esta realidade, à medida que os livros continuam com aportes, predominantemente, formais.

A inclusão dos números complexos nos parâmetros curriculares para o Ensino Médio e suas relações com o conteúdo de outras disciplinas como a Física, a Engenharia, os Circuitos Elétricos, a Topografia, a Informática e a Cosmologia apontam

para a importância destes conteúdos na formação matemática do aluno, todavia vimos constatando que o aluno reclama da presença deste conteúdo no programa de Matemática e enfrenta dificuldades em aprender.

É importante ressaltar que, durante o exercício da nossa profissão, muitos questionamentos foram levantados nas aulas expositivas e chamaram nossa atenção, acontece que eles não se baseavam em perguntas ou dúvidas relativas aos conteúdos como por exemplo: conceitos, propriedades, operações, porém eles recaíam sobre a descontextualização do conteúdo, sua utilidade, a falta de relação com situações práticas e a aplicação na solução de problemas.

Dentre tantas questões, algumas passam a nortear este trabalho, quais sejam:

1. Que motivações são adequadas à aprendizagem do aluno em relação aos números complexos?
2. Que mudanças metodológicas podem favorecer a aprendizagem destes conteúdos?
3. Como implementar uma metodologia de ensino adequada?

Tomando como base as questões aqui apresentadas, decidimos utilizar, em nossa sala de aula, uma seqüência didática formada por atividades, como alternativa metodológica, substituindo a tradicional aula expositiva para trabalhar o conteúdo dos números complexos.

O uso de seqüências didáticas formada por atividades teve como referência os estudos realizados por Oliveira (2006) e Mendes (2001), os quais elaboraram, testaram e avaliaram suas propostas de ensino e aprendizagem também por meio de atividades.

O trabalho realizado por Oliveira (2006), foi um estudo de caso sobre o ensino de trigonometria no Ensino Médio, onde o autor realizou a pesquisa sobre a verificação do caráter e da especificidade das dificuldades sentidas pelos professores de matemática quando optam desenvolver suas aulas usando seqüências de atividades. Neste mesmo processo, Oliveira (2006) pesquisou as dificuldades dos alunos. Apesar de não discutir as vantagens do ensino-aprendizagem através de atividades, até porque esse não foi o objetivo de sua pesquisa, o autor reconhece que o ensino através de atividades produz resultados positivos para a aprendizagem e para o desenvolvimento de competências no educando.

Em relação ao trabalho de Mendes (2001), o autor discute algumas relações teórico-práticas entre a matemática, particularmente a trigonometria, sua história e o seu ensino. A partir de um estudo exploratório, percebe que os professores de matemática necessitam de um aprofundamento acerca do desenvolvimento histórico da trigonometria. E diante desse fato, desenvolve sua pesquisa buscando construir uma proposta pedagógica para o ensino de trigonometria apoiado em atividades, a qual tem como tema "o ensino da matemática por atividade: uma aliança entre o construtivismo e a história da matemática". Nessa perspectiva, a proposta foi testada com estudantes da 1ª série do ensino médio, em dois momentos, com a finalidade de obter dados norteadores para a elaboração final do referido módulo de ensino. Os resultados nas duas etapas foram alcançados e a partir de então, Mendes (2001) propõe o uso de história da matemática como alternativa metodológica no ensino de trigonometria através de atividades, as quais poderão ser alteradas sempre que possível pelo professor, desde que não modifique a estrutura metodológica defendida pelo autor.

Nesse sentido, mencionamos duas importantes citações dos autores, quando fazem argumentos teóricos favoráveis a essa metodologia: "[...] Certamente o uso de atividades no ensino produz resultados positivos para a aprendizagem e para o desenvolvimento de competências no educando." (OLIVEIRA, 2006, p. 50).

[...] O ensino através de atividades pressupõe uma interação mútua entre o professor e os estudantes e os próprios estudantes durante o processo gerativo da matemática escolar. Essa é uma das principais características da proposta, visto que os tópicos a serem aprendidos estão para serem experimentados, discutidos e representados simbolicamente pelos próprios aprendizes. A partir daí acreditamos que o conhecimento já está incorporado à estrutura cognitiva de quem aprende. Para que isso ocorra com plenitude é necessário estabelecermos certa estruturação às atividades a serem realizadas pelos alunos. (MENDES, 2001, p. 31).

Considerando a posição colocada pelos autores, acreditamos que o uso de atividades estimula o aluno a estabelecer uma interação maior na sala de aula tanto num raciocínio individual como na integração do conteúdo discutido em grupo. Esta metodologia caracteriza-se por priorizar a participação do aluno, procurando torná-lo foco principal no processo que o encaminhará ao alcance dos objetivos propostos.

Assim, definimos como objeto de estudo o ensino e a aprendizagem dos números complexos no Ensino Médio.

O nosso objetivo geral é verificar quais os possíveis benefícios que podemos obter com a mudança na metodologia do ensino de números complexos mediante a implementação de atividades encaminhadas para serem desenvolvidas pelo aluno na sala de aula.

Nesse caso, destacamos como objetivos específicos:

1. Discutir a apresentação dos conteúdos dos números complexos nos livros didáticos, utilizando-se de uma amostra representativa para verificar se a forma como são apresentados os conteúdos tem interferência com a dificuldade de aprendizagem dos alunos;
2. Preparar uma seqüência didática como parte de uma proposta de ensino de números complexos através de atividades para serem trabalhadas pelos alunos na sala de aula, com a pretensão de verificar através dos dados obtidos se a metodologia de ensino através de atividades surte efeitos positivos;
3. Implementar a proposta de ensino em uma turma do 2º ano do Ensino Médio;
4. Analisar as dificuldades e/ou facilidades apresentadas pelos alunos durante o processo de ensino de números complexos por atividades.

Nesse sentido, elegemos a metodologia da pesquisa referenciada na Engenharia Didática, objetivada em suas quatro fases, indicadas na citada teoria.

Na tentativa de contribuir para solucionar as questões apresentadas, o presente trabalho está constituído por cinco seções, conforme a exposição seguinte:

Na **primeira seção**, que nomeamos de *Introdução* apresentamos, ainda que sucintamente, os motivos que nos fizeram escolher o problema, descrevemos os objetivos da pesquisa e discutimos o contexto no qual se insere o ensino dos números complexos. Finalizamos situando a necessidade de efetivar na sala de aula alternativas metodológicas a partir das quais investigamos características que facilitam a aprendizagem dos números complexos pelos alunos.

A **segunda seção**, cujo título é *Os números complexos no ensino médio*, situa o trabalho enquanto uma pesquisa que articula a problemática do ensino de Matemática no Ensino Médio aos conteúdos de números complexos e presentes na sua evolução histórica, a partir dos enfoques: simbólico, numérico, geométrico e algébrico.

Na **terceira seção**, que teve por título *Os caminhos da pesquisa*, descrevemos o ambiente, os participantes, o programa de disciplina, a metodologia de ensino e os instrumentos da pesquisa, nos quais a engenharia didática foi a metodologia de pesquisa utilizada. Conforme Pais (2001) e Machado (1999), a engenharia didática, consiste em quatro fases: análises preliminares, concepção e análise *a priori* da sequência didática, experimentação através de sua aplicação, seguida de análise *a posteriori* e conclusão.

Através da realização da fase da análise preliminar, fizemos dois levantamentos de dados para subsidiar a situação do ensino em Natal, particularmente no CEFET-RN: O primeiro, foi com relação a dados quantitativos e qualitativos sobre o conteúdo dos números complexos nos livros didáticos de matemática utilizados no ensino médio; o segundo, foi com relação a dados coletados de entrevistas realizada com vinte professores que trabalham com esse conteúdo no ensino médio do CEFET-RN.

Nessa seção, descrevemos também todo o desenvolvimento da pesquisa vivenciado na interação professor, aluno e meio, através da realização da fase da experimentação, conforme a metodologia da pesquisa e das sequências didáticas na sala de aula.

Na **quarta seção**, intitulada por *Discussão e análise dos resultados da pesquisa*, apresentamos a análise do estudo feito com a amostra de dez livros didáticos da matemática em relação aos números complexos. Em seguida, apresentamos os comentários das respostas das entrevistas realizadas com os professores que trabalham com números complexos no exercício de suas profissões e, na sequência, apresentamos a discussão dos resultados mais relevantes da experimentação realizada com uma turma composta por quarenta e dois alunos, bem como uma análise ante a mudança na metodologia das aulas, discutindo a motivação dos alunos, expressos em seus depoimentos; características que evidenciem facilidades e dificuldades na aprendizagem do conteúdo, apresentadas através de observações, registros de algumas considerações e desempenho no desenvolvimento da sequência didática trabalhada.

Vale salientar que, no início da experimentação, encontramos resistência por parte dos alunos quanto à realização das atividades propostas, mas, com o decorrer do processo, conseguimos que os mesmos se interessassem e participassem de todas as intervenções. Os alunos tiraram suas dúvidas durante a correção e através dos comentários das respectivas atividades, tendo, dessa forma, acontecido a aprendizagem esperada, o que podemos comprovar na fala de um aluno participante do processo de investigação:

*“Professora, a minha avaliação sobre as atividades com todo o conteúdo dos números complexos pode ser descrita, resumidamente, como: muito chata no início, interessante no decorrer e muito proveitosa no final(...)”.*¹

Os resultados obtidos nos forneceram elementos úteis para concluirmos que nossa proposta de ensino-aprendizagem de números complexos através de atividades foi positivamente validada.

Na **quinta seção**, vislumbramos nossas *Considerações finais*, inserindo nosso olhar reflexivo e crítico sobre o ensino e a aprendizagem dos números complexos.

Seguindo-se as seções, apresentaremos as referências bibliográficas estudadas para a realização deste trabalho, os apêndices e os anexos.

¹ Informação colhida através da avaliação de um aluno participante ao final das atividades propostas em sala de aula

2 OS NÚMEROS COMPLEXOS NO ENSINO MÉDIO

Neste capítulo fazemos uma retomada breve da evolução histórica dos números complexos que visa subsidiar as atividades desenvolvidas pelos alunos na sala de aula na fase da experimentação desta pesquisa. Mediante a retomada histórica, nosso esforço é no sentido de articular o enfoque histórico com os enfoques: simbólico, numérico, algébrico e geométrico, visando contribuir para atingir nosso objetivo.

Os diversos significados atribuídos aos processos comparativos entre grandezas que expressam relações e fenômenos existentes caracterizam as noções numéricas e quantitativas.

Historicamente, várias civilizações vêm trabalhando diversas representações que possibilitaram a construção de um sistema com propriedades que expressam a mensurabilidade dos fenômenos, através de representação matemática.

A evolução das idéias incorporadas pela cultura matemática gerou classificações bem ordenadas para os fenômenos e foram organizadas e denominadas, conforme as suas particularidades, em: números naturais, inteiros, racionais e reais.

O avanço do conhecimento, porém, ressentiu-se de respostas a novos problemas e a Matemática, como ressaltamos anteriormente, expandiu a noção de número relacionando algebricamente o número real a um certo número imaginário - os números complexos.

Um número complexo é um número composto por uma parte real com formas de representações reais e uma parte concebida mentalmente.

A História da Matemática, particularmente a História do Conhecimento dos Números Complexos, foi sendo construída num processo de evolução muito longo, o qual não é objeto de nosso trabalho, embora sejam alguns dados que julgamos importantes para a compreensão dos números complexos pelos alunos. Nossa concepção é, portanto, de que a História da Matemática é um recurso motivador que serve para desenvolver raciocínios lógicos, mostrar a Matemática como uma forma de comunicação humana e ensinar conceitos matemáticos.

Os radicais com números negativos, nas equações do segundo grau, começaram a aparecer aproximadamente em 1700 a.C. nas tabuletas de argila da

Suméria, mas não foi através delas, em nenhum momento, que surgiu o uso dos números complexos.

Conforme os historiadores da Matemática, o primeiro exemplo de radical de número negativo foi publicado, aproximadamente, em 75 d.C. por Heron de Alexandria, num cálculo sobre o desenho de uma pirâmide, mas esse problema foi resolvido sem que fosse necessária a criação dos números complexos. “Esta parece ser a primeira ocasião na qual a raiz quadrada de um número negativo apareceu - um conceito não compreendido durante 1750 anos!” (GREEN, 1976 apud FABIANI, 1998, p. 36).

Os números complexos, na forma como são apresentados hoje, começaram a aparecer por volta de 1500, quando um pensamento corrente entre os matemáticos surgiu: “O quadrado de um número positivo, bem como o de um número negativo, é positivo. Não existe raiz quadrada de um número negativo, porque um número negativo não é quadrado de nenhum número”. (GREEN, 1976 apud FABIANI, 1998, p. 37). Foi o matemático italiano Girolamo Cardano, em 1545, que propôs o seguinte problema: “Dividir 10 em duas partes de modo que o seu produto seja 40”. Este problema é, inclusive, apresentado em vários livros e textos de História da Matemática. Na tentativa de resolver o problema, Cardano utilizou a igualdade $(a+bi) \cdot (a-bi) = a^2 + b^2$ que o levou a considerar as expressões $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$, isto é, números conjugados na forma $a \pm bi$ como soluções do problema. Porém, ele mesmo concluiu que esse problema era impossível e que essas expressões não tinham nenhum significado. Nessa época, outro grande matemático Nicolò Fontana, o Tartaglia, foi desafiado para um duelo matemático. Tal duelo consistia na apresentação recíproca de questões para serem resolvidas pelos participantes. Mas, antes do encontro, Tartaglia sentiu-se ameaçado, quando soube que seu oponente pretendia apresentar problemas envolvendo equações do 3º grau. Após vencer o desafio que o tornou mais famoso, Tartaglia resolveu escrever em suas memórias: “Mobilizei todo o entusiasmo, a aplicação e a arte de que fui capaz, objetivando encontrar uma regra para a solução daquelas equações, o que consegui a 10 de fevereiro de 1531” (GARBI, 2006, p. 121).

A partir daí, suas disputas com Cardano sobre as equações do 3º grau ficaram mais acentuadas. E, conseqüentemente, Tartaglia descobriu que o Campo Real é

insuficiente para o estudo da Álgebra, sendo indispensável trabalhar-se também com os chamados “números imaginários”.

Cardano já havia encontrado essas raízes ao resolver equações do 3º grau, como por exemplo: $x^3 - 15x - 4 = 0$. E, aplicando uma regra que ele mesmo publicara, encontrou como raiz dessa equação: $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. Isso o deixava diante do seguinte dilema: sabia ele que, por um lado, $\sqrt{-121}$ não existia e, pelo outro, que 4 era solução da equação. Cardano não encontrou explicação. O grande mérito de Cardano foi chamar atenção para esse problema. O passo seguinte foi dado por outro algebrista italiano, Raphael Bombelli (1560), que, em seu livro *L'Algebra Parte Maggiore dell'Arithmetica* foram feitas as primeiras operações com números, contendo a raiz quadrada de -1. Bombelli conseguiu mostrar que as raízes cúbicas achadas por Cardano eram respectivamente, iguais a: $2 + \sqrt{-1}$ e $2 - \sqrt{-1}$ e que somadas dão 4. (GARBI, 2006, P. 123).

Raízes quadradas de números negativos continuaram sendo trabalhadas, não só no estudo de equações algébricas. O que mais perturbava os matemáticos era que essas raízes, manipuladas de acordo com as regras usuais da álgebra, forneciam resultados corretos que, às vezes, não podiam ser obtidos de outra maneira. É importante ressaltar que foram as equações do 3º grau e não as do 2º que levaram à criação do Campo Complexo.

Estes progressos motivaram outros matemáticos a realizar mais pesquisas no campo da Álgebra e, no final do século XVIII, o norueguês Gaspar Wessel publicou um trabalho em que mostrava uma representação geométrica para números complexos, relacionado biunivocamente, ao conjunto dos pares ordenados de números reais (a, b) , e o conjunto desses pares, por sua vez, pode ser relacionado, biunivocamente, ao conjunto de pontos de um plano, através de um sistema cartesiano de eixos. Desse modo, cada ponto (a, b) do plano cartesiano passa a representar o número complexo $a + bi$, e, portanto, a representação geométrica do conjunto dos complexos C , é um plano.

Alguns anos depois, o matemático Jean Robert Argand, sem conhecer o trabalho de Wessel, criou a mesma representação geométrica para os números complexos. A glória dessa criação ficou ligada ao seu nome “Argand”.

Continuando os estudos sobre o tema, um outro grande matemático e filósofo chamado Gottfried Wilhelm Von Leibniz, usou as mesmas expressões de Cardano em cálculos tais como $\sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}} = \sqrt{6}$. Ou seja, um exemplo de que expressões como “ $f(a+\sqrt{-1}\cdot b) + f(a-\sqrt{-1}\cdot b)$ dão números reais, se $f(z)$ é um polinômio real”. (BOYER, 1996, p. 196-198).

Relacionando a Geometria com a Álgebra, os dois matemáticos que merecem destaque pela contribuição dada foram: René Descartes, por ser o primeiro a empregar os termos: real e imaginário, e Willian Rowan Hamilton, por desenvolver a formalização completa dos números complexos como pares ordenados de números reais, idéia que estava indicada nas representações gráficas de Wessel, Argand e Gauss.

Com a interpretação geométrica, para as operações da adição e da multiplicação dos símbolos, a existência dos números complexos ficou definitivamente estabelecida (BOYER, 1996, p. 402-405).

Após esta revisão bibliográfica, a discussão com os autores nos levou a retomar as várias interpretações trabalhadas por eles, a partir das quais achamos adequado planejar para a sala de aula uma organização, conforme apresentamos no tópico a seguir.

2.1 ALGUNS ENFOQUES PRESENTES NA EVOLUÇÃO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Mediante o enfoque histórico dos números complexos aqui apresentado, decidimos trabalhar esses conteúdos em nossa sala de aula, articulando as linguagens que denominamos: simbólica, numérica, algébrica e geométrica. Nossa intenção foi propiciar aos alunos algumas noções matemáticas nelas contidas, buscando facilitar a aprendizagem em relação aos diferentes significados que conceituam os números complexos.

2.1.1 Enfoque Simbólico

A mais forte característica identificada com os números complexos, conforme Gauss, foram os símbolos. Estes forneciam resultados reais e úteis, o que justificava sua existência; supriam métodos e soluções para problemas que, sem esta característica, tornavam-se intratáveis, conforme pudemos observar no exemplo, anteriormente, apresentado.

Atualmente, Dante, Giovanni e outros apresentam, em seus livros didáticos, este assunto, articulando o conhecimento de potência com a unidade imaginária. Assim, achamos interessante tratar do assunto como a seguir.

À unidade i tal que $i^2 = -1$, chamamos unidade imaginária e observamos que ela não pertence ao conjunto dos números reais.

As potências de i apresentam um comportamento interessante. Observemos abaixo o uso das propriedades apresentadas anteriormente, no cálculo das sete primeiras potências:

$$\begin{array}{ll} i^0 = 1; & i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1 \\ i^1 = i; & i^5 = i^4 \cdot i^1 = 1 \cdot i = i \\ i^2 = -1; & i^6 = i^4 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = -1 \\ i^3 = i^2 \cdot i = -i; & i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i \end{array}$$

Verificamos que estas potências se repetem em ciclos de 4. Dessa forma, $i^{n+4} = i^n \cdot i^4 = i^n \cdot 1 = i^n$; com $n \in \mathbb{N}$. Isso nos permite estabelecer uma regra para o cálculo de potências de i .

Regra: Para calcular i^n , divida n por 4; se r é o resto dessa divisão, temos $i^n = i^r$. De fato, se q é o quociente da divisão, $i^n = i^{4q+r} = (i^4)^q \cdot i^r = 1^q \cdot i^r = i^r$.

2.1.2 Enfoque Numérico

Do ponto de vista dos conjuntos numéricos, consideramos significativo iniciar retomando o conjunto dos números naturais: $N = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$.

Para definir a subtração, a idéia aplicada foi estender o conjunto N e obter o conjunto dos números inteiros: $Z = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$.

Para definir a divisão, estendemos este último e obtivemos o conjunto dos números racionais, que podem ser escritos na forma de fração, com numerador e denominador inteiros: $Q = \{x = \frac{a}{b}, \text{ com } a, b \in Z, \text{ sendo } b \neq 0\}$.

Trabalhamos no conjunto Q onde a equação $x^2 = 3$ não pode ser resolvida, ou seja, as soluções $x = \sqrt{3}$ e $x = -\sqrt{3}$ não podem ser representadas por uma fração $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$ e a e b pertencentes a Z . $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$ são exemplos de números chamados de irracionais (I).

Prosseguindo com este raciocínio, vemos que, da união do conjunto dos números racionais com os irracionais, surgem o conjunto dos números reais (R): $R = Q \cup I$.

Dessa forma, identificamos N como uma parte de Z , Z como uma parte de Q e Q como uma parte de R e escrevemos: $N \subset Z \subset Q \subset R$.

Considerando $x \in R$, com $x^2 \geq 0$, a equação $x^2 + 1 = 0$ não tem solução em R , pois: $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1}$, e não existe um número real x que elevado ao quadrado resulte -1 . Por isso, temos de estender o conjunto dos números reais para obter um novo conjunto chamado conjunto dos números complexos (C).

2.1.3 Enfoque Geométrico

A importância do pensamento de Gauss consistiu em olhar para os números que representamos por a e b do símbolo $a + b\sqrt{-1}$, como coordenadas de um ponto em um

plano cartesiano e, assim, associar a cada um desses símbolos um único ponto P do plano, dando com isto um enfoque geométrico. Ex. $3+2i \Leftrightarrow (3, 2)$. Vide figura 1.

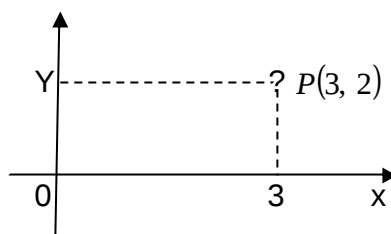


Figura 1 - Representação de um número complexo no plano cartesiano

O símbolo $\sqrt{-1}$ passou a ser representado pelo par ordenado $(0, 1)$. E por causa da sua importância, esse par é representado por um símbolo especial, i , e conserva seu nome histórico: unidade imaginária (desde o tempo de Euler²). A introdução desse símbolo i permite a chamada representação algébrica dos números complexos: $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, b) \cdot (0, 1) = a + b\sqrt{-1}$. Todo esse desenvolvimento foi necessário para que os símbolos se tornassem bem definidos. Ex. $\sqrt{-1} = i \Leftrightarrow (0, 1)$. Vejamos a representação deste exemplo na figura 2.

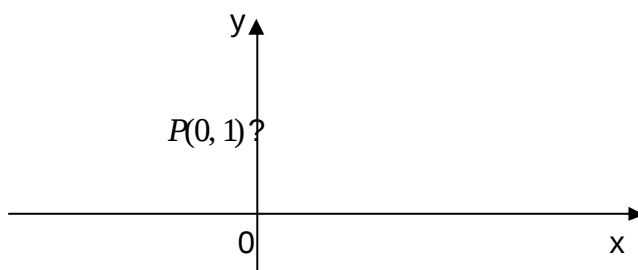


Figura 2 - Representação do par ordenado $(0, 1)$ no lugar da $\sqrt{-1}$

² Euler foi um dos matemáticos mais importantes do século dezoito e de toda a história da matemática. Nasceu em Basiléia, Suíça, em 1707. Durante a sua vida, foram publicados quase 900 trabalhos de sua autoria. Embora a maioria das suas obra tenha sido sobre Matemática pura, contribuiu ainda para a Astronomia e a Física. As significativas contribuições de Euler para a Matemática abrangem vastas áreas como o cálculo diferencial, a análise matemática e a teoria dos números. Foi ele quem introduziu símbolos como “e”, “i” e “f(x)”. Investigou também diversos tópicos em Geometria. Trabalhou, por exemplo, na Matemática que está por trás do conceito grego de “Corpos Perfeitos”. Euler relacionou o número de faces (F), vértices (V) e arestas (A) de um poliedro, através da equação $F + V = A + 2$. Esta fórmula é válida para qualquer poliedro, independentemente da sua forma. Ganhou o prêmio da Academia de Paris 12 vezes.

Do fato dos números complexos serem representados também por pares ordenados (a, b) , conclui-se que se pode representar graficamente qualquer número complexo z num sistema de coordenadas cartesianas, bastando marcar a parte real a no eixo das abscissas (horizontal) e a parte imaginária b no eixo das ordenadas (vertical). Neste caso, o eixo horizontal é chamado eixo real e o eixo vertical é chamado eixo imaginário. O plano cartesiano passa a ser denominado de plano de Argand-Gauss, conforme mostra a figura 3. O ponto que representa o número complexo z denomina-se afixo de z , o ângulo formado pelo vetor $\overrightarrow{OP}$ e o eixo x , no sentido anti-horário é chamado de argumento de z , $\arg(z)$.

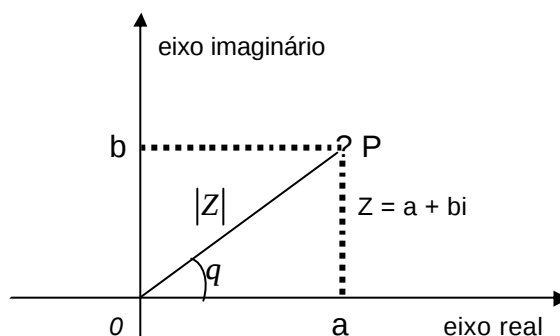


Figura 3 - Representação do plano de Argand-Gauss

Da representação geométrica dos números complexos, ainda há alguns elementos que merecem destaque:

Módulo de um número complexo: $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Argumento de um número complexo: $\cos(q) = \frac{a}{|Z|}$ e $\sin(q) = \frac{b}{|Z|}$

Forma trigonométrica ou Polar: $Z = |Z| \cdot [\cos(q) + i \cdot \sin(q)]$

Em relação à interpretação vetorial, um número complexo $Z = a + bi$ pode ser considerado como um vetor $\overrightarrow{OP}$, conforme mostra a figura 4, onde a origem deste vetor é a origem do plano cartesiano $0 = (0, 0)$ e a extremidade é o ponto $P(a, b)$, sendo a e b as coordenadas desse vetor. A figura 5 mostra a representação de dois números

complexos: Z_1 e Z_2 , e a soma deles: $Z_1 + Z_2$ (diagonal do paralelogramo formado por Z_1 e Z_2).

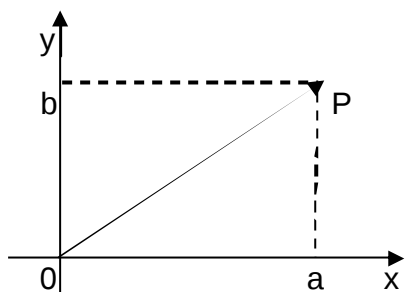


Figura 4 - Representação de um vetor

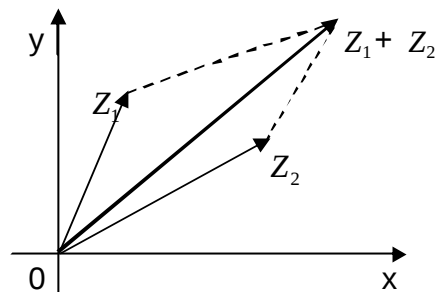


Figura 5 - Representação de uma soma vetorial

As regras do paralelogramo para a soma e subtração de vetores também se aplicam para soma e subtração de números complexos. Nesse sentido, a correspondência existente entre os números complexos e os vetores, permite que seu uso seja aplicado nos mais diversos campos nos quais as grandezas são vetoriais. Um exemplo disso é o estudo da eletricidade, onde os números complexos aparecem nos assuntos relacionados à corrente elétrica, voltagem, impedância, etc.

2.1.4 Enfoque Algébrico

A partir do tratado de Álgebra, publicado em 1572 por Raffaelli Bombeli, o conjunto dos números complexos, representado por C , surgiu. Nele, seus elementos devem ser tais que possam ser somados e multiplicados, e também possibilitem a extração da raiz quadrada de um número negativo. Logicamente, os números reais precisam ser elementos desse conjunto C , e as operações de adição e multiplicação feitas sobre os números reais no conjunto C devem ser as mesmas já conhecidas. Se isso não fosse possível, o conjunto R não seria um sub-conjunto de C .

Assim, para estruturar este conjunto matematicamente, precisamos defini-lo, e respaldá-lo de operações e propriedades.

Definição: Todo número complexo escrito na forma de par ordenado de números reais $Z = (a, b)$ pode ser escrito na forma algébrica ou forma binomial de maneira única:

$Z = a + bi$. Essa forma $a + bi$ é chamada forma padrão de um número complexo, sendo a e b números reais e $i^2 = -1$.

Todo número complexo escrito nessa forma tem duas partes, quais sejam:

$$a = \text{parte real de } Z = \text{Re}(Z)$$

$$bi = \text{parte imaginária de } Z = \text{Im}(Z).$$

Observamos também que, se $b = 0$, temos $Z = a$ que se identifica como número real; se $a = 0$ e $b \neq 0$, então $Z = bi$, que chamamos de imaginário puro, e se $a = b = 0$, o número complexo $Z = 0$, é nulo.

Usando a forma algébrica, as operações de adição, subtração e multiplicação são mais intuitivas do que com a representação por pares ordenados. Na multiplicação, por exemplo, basta aplicar a mesma propriedade distributiva usada na multiplicação de binômios, porém observando que i^2 é um número real e vale -1 . Não há necessidade alguma de decorar fórmulas.

Considerando os limites deste texto, deixaremos de apresentar aqui outras definições sequenciais que ampliam os conteúdos, bem como as propriedades e as operações a serem estudadas e que não estão aqui transcritas porque estão expostas na maioria dos livros didáticos e, portanto, de fácil acesso. Outras informações que julgamos necessárias, como as operações na forma trigonométricas, a primeira e a segunda fórmula de De Moivre, estão no anexo A.

3 OS CAMINHOS DA PESQUISA

Dando continuidade ao processo da investigação, percorreremos, nesta seção, os caminhos da pesquisa. Inicialmente, descreveremos o ambiente onde foi realizado o trabalho para o qual pudemos contar com a participação dos alunos da turma 2.00.1M (caracterização da turma no CEFET-RN: segundo ano, turma um, turno matutino) e o programa de disciplina. Na sequência, veremos a metodologia da pesquisa e a descrição de seus instrumentos teóricos, dentre os quais, apresentamos dois levantamentos de dados: o primeiro em relação aos números complexos nos livros didáticos e o segundo em relação a entrevista realizada com professores de matemática a respeito dos números complexos. Finalmente, relatamos a metodologia de ensino e como se deu o processo das aulas realizadas a partir da implementação da Engenharia Didática.

3.1 DESCREVENDO O AMBIENTE, OS PARTICIPANTES E O PROGRAMA DE DISCIPLINA DA PESQUISA

Nosso trabalho foi realizado no CEFET-RN. Trata-se de uma escola pública de grande porte, funcionando nos três turnos: matutino, vespertino e noturno.

O prédio do CEFET-RN foi construído na década de 1940. São 90 mil m² de área. A obra teve início em 1947 e levou vinte anos para ser concluída. Vide fotografia 1.



Fotografia 1 - Prédio atual do CEFET-RN

O CEFET-RN funciona com uma média de seiscentos servidores, sendo estes formados por professores e técnico-administrativos, atendendo mais de seis mil alunos matriculados regularmente entre os níveis: básico, médio, técnico e tecnológico.

Seu caminhar na linha do tempo teve início em 1909, como Escola de Aprendizes Artífices. Sua finalidade era de proporcionar um ensino profissional aos filhos de trabalhadores carentes que os habilitasse a exercer uma profissão com dignidade. Em 1910, a escola iniciou as atividades de funcionamento das oficinas de: marcenaria, sapataria, alfaiataria, serralharia e funilaria, em regime de semi-internato. A partir daí, muitas transformações foram realizadas no ensino profissionalizante. Quatro anos depois, o estabelecimento de ensino passou a denominar-se Liceu Industrial e, com a publicação da Lei Orgânica do Ensino Industrial, foi designado Escola Industrial de Natal, incorporando o Ginásio Industrial aos cursos de Eletricidade, Mecânica, Cerâmica, Madeira, Metais e Marcenaria. Com seu ensino industrial, a escola é reestruturada e elevada ao grau técnico, passando a se chamar Escola Industrial Federal do Rio Grande do Norte. Posteriormente, o ensino técnico obtém equivalência com ensino secundário e passa a oferecer além dos cursos do Ginásio Industrial, os cursos técnicos de mineração e estradas. Em 1968, recebeu a denominação de Escola Técnica Federal do Rio Grande do Norte - ETFRN.

Quase trinta anos depois, a ETFRN transformou-se em Centro Federal de Educação Tecnológica do Rio Grande do Norte. Nessa nova fase, o CEFET-RN é estruturado para atuar nos três níveis da educação profissional (básico, técnico e tecnológico) e no Ensino Médio.

Esta dimensão técnica que acompanha toda a história do CEFET hoje nos faz atentar para a necessidade de buscar relacionar os conteúdos matemáticos aos conhecimentos técnicos, tendo em vista que, na grade curricular de quase todos os cursos oferecidos atualmente, existem as disciplinas técnicas que requerem conhecimentos dos números complexos.

Nos sub-itens seguintes, falamos um pouco a respeito da sala de aula onde foi realizada a experimentação, da turma escolhida para participar deste trabalho, e dos conteúdos trabalhados.

3.1.1 A sala de aula

A sala de aula escolhida foi a C-7, isto significa sua localização, onde C representa o terceiro pavimento e 7 representa o número da sala. Nesta sala temos problemas de calor, pois ela recebe diretamente os raios solares da manhã. Dentro dela, existem quarenta e duas mesas pequenas, quarenta e três cadeiras, uma mesa para o professor, uma televisão a cores de 24 polegadas, um suporte fixo na parede para o retro projetor, um cesto para lixo, vários janelões de vidro na parede que fica de frente para a porta, dois ventiladores quebrados e fixos na parede, um quadro verde grande e um quadro branco de fórmica com encaixe móvel na parte superior e inferior do quadro verde. A largura do quadro branco corresponde a um terço da largura do quadro verde e como o encaixe é móvel, o quadro branco pode ser arrastado horizontalmente, um apagador, uma pequena caixa com giz e um quadro dos “5s”³.

³ “5s”: Trata-se de cinco palavras em japonês que começam pela letra S e foi criado com a intenção de melhorar o ambiente de trabalho, reduzir os custos através da eliminação de desperdícios e incentivo a criatividade de prevenção de acidentes, além de tornar o dia-a-dia das pessoas mais alegre e saudável. Em Português, a melhor maneira para expressar o sentido dos “5s” foi acrescentar a tradução à expressão “senso de” que significa: senso de utilização, senso de organização, senso de limpeza, senso de saúde e senso de autodisciplina.

3.1.2 A turma

Esta proposta de trabalho foi realizada em uma turma do 2º Ano do Ensino Médio, do turno matutino. Tratava-se de uma turma de com quarenta e dois alunos regularmente matriculados, sendo vinte e cinco do sexo masculino e, dezessete do sexo feminino. Dentre esses, dois são bastante faltosos, três são repetentes. A turma era formada por adolescentes com a idade variando numa faixa etária de quinze a dezoito anos. A maioria demonstrava interesse pelo curso. Eram muito curiosos e apresentavam algum comportamento inquieto típico da faixa etária. Ao nosso ver, a maior parte destes tinham uma situação financeira razoável, todos tinham endereço eletrônico, embora isso não signifique que todos tinham computador com Internet, mas que eles tinham acesso à informática. No CEFET, todos os estudantes cursam uma disciplina de informática e, portanto, têm oportunidade de se familiarizar com o computador. Quanto ao local da moradia, eles moravam em diferentes bairros de Natal, sendo que, alguns deles eram das cidades vizinhas, caracterizando-se assim a turma predominantemente como alunos de classe média baixa ou pobre.

3.1.3 O programa da disciplina

No CEFET, a duração do período escolar diário em cada turno compreende quatro horas e meia, distribuídas em 6 aulas de 45 minutos. O programa anual para o ensino da disciplina de Matemática no 2º ano do ensino médio tem a carga horária semanal de três aulas.

O planejamento de ensino de matemática para esta pesquisa adequou-se ao planejamento da escola. Portanto foi elaborado pelo grupo de professores do segundo ano. A distribuição dos conteúdos e do tempo para concluir cada assunto são feitas por bimestre e em função de 40 semanas anuais (equivalente a 90 horas) conforme mostra a tabela 1, seguinte:

TABELA 1 - Conteúdos de matemática para o 2º ano do ensino médio e distribuição do tempo

BIMESTRE	ASSUNTO	SEMANAS	HORAS AULA	HORAS
1º	Relações métricas no triângulo retângulo	4	12	9
	Trigonometria no triângulo retângulo	4	12	9
2º	Trigonometria no ciclo trigonométrico	8	24	18
3º	Números complexos	4	12	9
	Matrizes	5	15	11,25
	Determinantes	3	9	6,75
4º	Sistemas lineares	4	12	9
	Polinômios	4	12	9
	Equações polinomiais	4	12	9

Como vimos na tabela 3, a pesquisa concentrou-se no 3º bimestre, pois nessa etapa encontra-se o assunto dos números complexos, com uma carga horária de 9 horas, onde os conteúdos dos números complexos trabalhados foram:

- a) Representação geométrica;
- b) Forma algébrica;
- c) Potências da unidade imaginária;
- d) Operações na forma algébrica;
- e) Forma trigonométrica;
- e) Operações na forma trigonométrica.

Durante a pesquisa os horários de aulas da turma escolhida para a experimentação era o seguinte: segunda-feira (terceiro e quarto horários) e terça-feira (terceiro horário) do turno matutino.

Assim, procuramos nos adequar ao período letivo escolar para realizar nossa experimentação com as atividades propostas e inseridas nos procedimentos de investigação; e não houve necessidade de alterar o tempo previsto de quatro semanas para concluir o assunto de números complexos.

3.2 DESCREVENDO A METODOLOGIA DA PESQUISA E OS SEUS INSTRUMENTOS TEÓRICOS

Com a finalidade de descrever os instrumentos metodológicos de nossa pesquisa - qual seja: verificar quais os benefícios que podemos obter com a mudança na metodologia do ensino de números complexos através de atividades para serem desenvolvidas pelo aluno na sala de aula, buscamos subsídios teóricos em alguns estudiosos e pesquisadores da Educação Matemática, até porque a Educação Matemática é constituída de estudos e pesquisas com a finalidade de desenvolver, testar e divulgar métodos inovadores de ensino, elaborar e implementar mudanças curriculares, além de desenvolver e testar materiais de apoio para o ensino da matemática.

Superando a compreensão clássica do conhecimento como um ato que envolve teorias e práticas, percebemos o conhecimento como um fenômeno que abrange várias dimensões. Além do aspecto cognitivo e instrumental, o conhecimento insere-se também na área cultural e social. Neste sentido, é preciso que se busque no processo de ensino-aprendizagem formas de socializar os conhecimentos matemáticos através de metodologias adequadas aos conteúdos, quer sejam conceituais, procedimentais e atitudinais.

Concordamos com Menezes (2005, p.17) em *A matéria, uma aventura do espírito*, quando fala:

O pragmatismo⁴ exacerbado, que só preza o que sirva para alguma coisa, e as verdades oficiais, que vetam interpretações não autorizadas dos fatos são alguns dos freios do conhecimento. O pragmatismo quer obter de todo o lance uma vantagem; as verdades oficiais querem vencer a partida por decreto. Talvez se compreenda assim que o período romano, com sua lógica imperial, e o período medieval, com sua lógica eclesiástica, não tenham sido tão pródigos para a criação intelectual quanto a Grécia Clássica que os precedeu ou a Renascença que os sucedeu.

⁴ Pragmatismo: Termo originário do grego (pragma = “ação”) e que se refere a um movimento filosófico iniciado pelo filósofo e lingüista Charles Sanders Peirce (1839 - 1914), que postulava que o valor de uma teoria deve ser dado pelas suas consequências práticas.

Entendemos que, pelo fato de não se observar uma aplicação imediata do conhecimento matemático, este seja desnecessário na vida educativa do estudante e da sociedade.

Entre os obstáculos para a disseminação efetiva dos conhecimentos está a complexidade matemática desses. Entretanto, a importância do conhecimento científico para a cultura contemporânea, como uma visão geral do mundo e instrumento da moderna tecnologia justifica um esforço para contornar essas dificuldades.

Todo o processo de investigação é gerado basicamente pela interação do ser humano com o mundo. Nesse sentido, entendemos que nossas ações, enquanto bases têm a responsabilidade de produzir novos conhecimentos em sua dimensão processual, no entanto, o que acontece muitas vezes é a disjunção e a fragmentação desses conhecimentos por se tratar de um assunto que abrange todos os ramos do saber.

Na área de pesquisa em Educação Matemática, há encaminhamentos alternativos como a Engenharia Didática, que se coloca como um programa de ação pedagógica e que encontra em Artigue (1988), Douady (1990) e Waldegg (1997), respaldo para um enfoque metodológico que privilegia dados da realidade com os conhecimentos matemáticos e, também por entendermos que tal processo facilita o ensino-aprendizagem, tornando a atividade educativa mais significativa.

3.2.1 Engenharia Didática

A Engenharia Didática é vista como uma das metodologias de pesquisa em didática da matemática. Foi desenvolvida na França e caracteriza-se por ser um esquema experimental baseado em “realizações didáticas” em sala de aula, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de seqüências de ensino-aprendizagem. O termo engenharia didática é usado desde os anos 80 e segundo Artigue (1988):

[...] Este termo foi ‘cunhado’ para o trabalho didático que é aquele comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto preciso, se apóia sobre conhecimentos científicos de seu domínio, aceita submeter-se a um controle de tipo científico, mas, ao mesmo tempo, se vê obrigado a trabalhar sobre objetos bem mais complexos

que os objetos depurados da ciência e, portanto a enfrentar praticamente, com todos os meios que dispõe, problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta (MACHADO, 1999, p. 198).

A analogia feita pelo autor entre o trabalho do pesquisador em didática e o trabalho do engenheiro deixa claro que o educador depende de um conjunto de conhecimentos sobre os quais ele exerce o seu domínio profissional, no entanto, o modelo teórico não é suficiente para suprimir todos os desafios da complexidade do objeto educacional.

Já Douady (1990), explicou a engenharia didática como sendo:

[...] Uma seqüência de aula(s) concebida(s), organizada(s) e articulada(s) no tempo de forma coerente, por um professor-engenheiro para realizar um projeto de aprendizagem para uma certa população de alunos. No decurso das trocas entre professor e alunos, o projeto evolui sob as reações dos alunos e em função das escolhas e decisões do professor (MACHADO, 1999, p. 198).

Considerando a explicação de Douady e o que, na realidade, se entende pelo termo engenharia didática, foi se construindo, na didática da Matemática, uma dupla função, na qual ela pode ser compreendida tanto como um produto resultante de uma análise *a priori*, (no caso da metodologia de pesquisa específica), quanto como uma produção para o ensino.

De acordo com Waldegg (1997), pesquisa didática é um processo empírico⁵, no sentido que se devem extrair os dados da realidade e compará-los às hipóteses. A engenharia didática é usada para a construção das ferramentas de ensino e aprendizagem.

Deste modo, é possível considerar tal metodologia de pesquisa também como uma metodologia para produção de materiais, ou ainda, como uma metodologia que o professor pode adotar ao preparar suas aulas.

Dessa forma, procuramos nos apoiar na metodologia da engenharia didática, por acreditar na eficiência, tão bem trabalhada pelos pesquisadores já citados: Artigue (1988), Douady (1990) e Waldegg (1997).

⁵ Empírico: que advém da experiência e da observação da realidade. Contrasta-se com teórico.

Resumidamente, a engenharia didática é constituída por quatro fases consecutivas, que são: análises preliminares; concepção e análise *a priori* das situações didáticas; experimentação; análise *a posteriori* e validação. As quais estão descritas abaixo e diante do exposto de cada fase, estamos apresentando o que fizemos para desenvolver a nossa pesquisa.

PRIMEIRA FASE DA ANÁLISE PRELIMINAR

Consiste na análise epistemológica dos conteúdos que se pretende trabalhar no desenvolvimento dos materiais junto ao aluno. Nesse contexto, são importantes os estudos sobre os processos educacionais desenvolvidos em classe (o meio, os instrumentos, a mediação do professor). Em suma, pretende-se dar subsídios ao desenvolvimento da análise *a priori*.

Assim, para desenvolver a nossa pesquisa, fizemos dois levantamentos de dados: os números complexos nos livros didáticos e entrevista com professores de matemática a respeito dos números complexos. Nossa preocupação foi conseguir subsídios que nos ajudassem responder perguntas do tipo:

- Qual é mesmo a questão central da nossa pesquisa?
- Que meios temos para respondê-la?
- Os livros têm interferência na dificuldade apresentadas pelos alunos?
- Qual o programa de números complexos que será trabalhado?
- Algum dos professores entrevistados trabalha o conteúdo dos números complexos de forma diferente da tradicional?
- Qual a reação dos alunos diante da metodologia de ensino utilizada?

3.2.2 Os números complexos nos livros didáticos

Fazem parte do universo da cultura escolar, os livros didáticos. Esse material é portador relevante dos conteúdos que compõem a grade curricular responsável pela construção de conhecimento na vida dos nossos alunos. É uma "poderosa fonte de

conhecimento” que atua como mediador, servindo de referência tanto para professores quanto para alunos.

Nesse sentido, e na tentativa de encontrar alternativas para a aprendizagem dos números complexos, resolvemos partir para uma investigação relativa a esse material, pesquisando dados relacionados a dois aspectos: quantitativos e qualitativos.

Portanto, para desenvolver esta pesquisa, dentre vários livros didáticos da matemática adotados pelas instituições de Ensino Médio, selecionamos uma amostra representativa de dez livros, os quais têm edições publicadas num período de até quinze anos e são indicados como referência de estudo pelo grupo de professores de matemática do CEFET-RN para acompanhamento dos estudos. Dessa forma, os livros didáticos escolhidos para análise do conteúdo dos números complexos foram:

- BARRETO, B.; SILVA, C. X. **Matemática aula por aula**. São Paulo: FTD, 2000.
- BEZERRA, M. J. **Matemática para o ensino médio**. São Paulo: Scipione, 2001.
- BIANCHINI, E.; PACCOLA, H. **Curso de Matemática**. São Paulo: Moderna, 1995.
- DANTE, L. R. **Matemática**. São Paulo: Ática, 2005. (Série Novo Ensino Médio).
- GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JÚNIOR, J. R. **Matemática fundamental: 2º grau**. São Paulo: FTD, 1994.
- MARCONDES, C. A.; GENTIL, N.; GRECO, S. E. **Matemática**. São Paulo: Ática, 2003. (Série Novo Ensino Médio).
- PAIVA, M. R. **Matemática 3**. São Paulo: Moderna, 1996.
- SILVA, J. D.; FERNANDES, V. **Matemática**. São Paulo: IBEP, 1991.
- YOUSSEF, A. N.; FERNANDEZ, V. P.; SOARES, E. **Matemática para o 2º Grau**. São Paulo: Scipione, 1998.
- ZÖLD, H. H.; CÖRREA, S. **Tudo para o Vestibular: Matemática**. São Paulo: Nova Cultural, 1993.

Nossa preocupação foi verificar a forma como seus autores exploram os conteúdos relacionados aos números complexos.

Em relação aos aspectos quantitativos, estabelecemos previamente os seguintes critérios:

- existência de páginas do livro destinadas ao conteúdo dos números complexos;

- quantidade de exercícios referentes aos números complexos.

Assim, para representar os resultados da análise dos aspectos quantitativos dos livros citados acima, criamos a tabela 2, onde seus dados resumem informações que mostram a importância dos números complexos conforme cada autor em relação a sua obra. Vejamos:

TABELA 2 - Análise de livros didáticos e sua relação com os números complexos

Nº	Autor(es)	Editora	Ano de Publicação	Nº de páginas	Sobre N ^{os} Complexos	Nº de exercícios	Sobre N ^{os} Complexos
01	Barreto, B. Filho e Silva, C. Xavier da Silva	FTD	2000	671	20 $\Leftrightarrow$ 2,98%	1725	85 $\Leftrightarrow$ 4,92%
02	Bezerra, M. Jairo	Scipione	2001	495	11 $\Leftrightarrow$ 2,22%	1500	55 $\Leftrightarrow$ 3,66%
03	Bianchini, E. e Paccola, H.	Moderna	1995	558	15 $\Leftrightarrow$ 2,68%	1372	42 $\Leftrightarrow$ 3,06%
04	Dante, L. Roberto	Ática	2005	672	14 $\Leftrightarrow$ 2,08%	1578	38 $\Leftrightarrow$ 2,40%
05	Giovanni, J.R.; Bonjorno, J. R. e Giovanni Jr., J. R.	FTD	1994	560	18 $\Leftrightarrow$ 3,21%	2236	110 $\Leftrightarrow$ 4,91%
06	Marcondes, Gentil e Sérgio	Ática	2002	606	8 $\Leftrightarrow$ 1,32%	1265	31 $\Leftrightarrow$ 2,45%
07	Paiva, M. R.	Moderna	1996	656	45 $\Leftrightarrow$ 6,86%	977	77 $\Leftrightarrow$ 7,88%
08	Silva, J. D. e Fernandes, V. dos S.	IBEP	*	368	11 $\Leftrightarrow$ 2,98%	579	13 $\Leftrightarrow$ 2,24%
09	Youssef, A. Nicolau; Fernandez, V. Paz e Soares, Elizabeth	Scipione	1998	477	21 $\Leftrightarrow$ 4,40%	1206	69 $\Leftrightarrow$ 5,72%
10	Zöld, H. H. e Côrrea, S.	Nova Cultural	1993	256	7 $\Leftrightarrow$ 2,73%	1282	52 $\Leftrightarrow$ 4,05%

- O texto didático do autor da linha 08 não cita o ano de publicação. Consideramos isto como falha. Contudo, utilizamos o livro na análise do conteúdo dos números complexos.

Em relação aos aspectos qualitativos, os critérios estabelecidos para a análise dos livros didáticos mencionados acima foram:

- a forma de apresentação do conteúdo;
- os tipos de exercícios.

Na análise relacionada à forma de apresentação teórica, foi observada a existência de contextos significativos, ou seja, contextos que sejam de interesse do aluno, nos quais ele se sinta motivado para interagir, tais como:

- operações com interpretação vetorial; porque estas operações se relacionam diretamente com a geometria, com a representação no plano cartesiano, entre outros.
- problemas envolvendo a primeira e a segunda lei de De Moivre; problemas considerados relevantes em outras disciplinas de interesse do aluno;
- os aspectos históricos, porque possibilitam uma melhor compreensão do conceito;
- aplicações dos números complexos em outras áreas de conhecimento, porque ajudam a responder as indagações do aluno do tipo: *para que serve?*

Em relação à análise dos exercícios, buscamos reconhecer os seguintes tipos apresentados:

- exercícios tradicionais, aqueles que são resolvidos usando, diretamente, a definição ou a fórmula;
- exercícios abertos são aqueles que apresentam várias estratégias de solução;
- exercícios contextualizados são aqueles relacionados ao conhecimento da vida do aluno.

3.2.3 Entrevista com professores de matemática a respeito dos números complexos

A prática pedagógica do professor de matemática é seu principal contexto para que se investigue e se percebam problemas e/ou soluções quanto ao trabalho com os conteúdos de no que diz respeito à aprendizagem destes pelos alunos. Nesse sentido, entendemos que investigar como o professor trabalha determinado conteúdo possibilita que se encontrem aspectos essenciais para uma análise metodológica do conteúdo em questão, a saber: números complexos.

A investigação pode ser realizada através de entrevistas. Dessa forma, a entrevista “consiste no desenvolvimento de precisão, focalização, fidedignidade e validade de um certo ato social comum à conversação”. (MARCONI; LAKATOS, 2004, p. 279).

Uma outra citação que julgamos importante, diz que “Os dados da realidade investigada recebem um tratamento qualitativo baseado em uma abordagem etnográfica da prática escolar”. (MENDES, 2001, p. 37).

De acordo com as duas citações anteriores, entendemos que a investigação através da entrevista se constitui como relevante, porque estabelece o diálogo com a realidade.

Diante do exposto e respaldando nosso trabalho, resolvemos realizar uma entrevista estruturada com os colegas profissionais que trabalham com números complexos no exercício de suas profissões e no contexto social como um todo.

O objetivo dessa entrevista foi investigar como os números complexos são trabalhados por esses professores. Queríamos também descobrir através destes, se seus alunos também apresentavam as mesmas dificuldades de descontextualização do conteúdo, de metodologia, entre outras, que foram apresentadas pelos nossos ex-alunos. Para isso, elaboramos sete questões relacionadas com o ensino e suas aplicações, as quais tiveram a finalidade de colher dos entrevistados informações que nos ajude a confirmar nossa problemática. Vejamos:

- 1 - Você acha importante o conhecimento de números complexos? Justifique sua resposta.
- 2 - Onde você acha que os números complexos têm aplicação prática?
- 3 - Como você inicia suas aulas sobre o conteúdo de números complexos?
- 4 - Quais as dificuldades que você encontra para ensinar números complexos?
- 5 - Quais as dificuldades dos alunos para aprender números complexos?
- 6 - Você acha importante falar sobre a história dos números complexos na sala de aula? Justifique sua resposta.
- 7 - Você acha que números complexos é um conteúdo atual para ser trabalhado nas escolas? Justifique sua resposta.

A realização desta entrevista aconteceu durante o mês de maio de 2005 (ver no apêndice A) e contou com a participação de vinte pessoas, sendo dezesseis professores do CEFET e quatro de outras instituições. Destes vinte professores

entrevistados, doze são licenciados em matemática e oito são engenheiros. Todos têm pós-graduação, sendo dois doutorandos, doze mestres e seis especialistas (dentre estes, dois são mestrandos). Quanto ao tempo de docência, dois deles possuem dez anos na profissão, três professores possuem dezesseis anos e os outros possuem mais de vinte anos de docência.

Após a realização desta entrevista, coletamos os dados e para apresentar com mais clareza os resultados obtidos, resolvemos organizar as informações das respostas por significado, e na ordem decrescente da quantidade de respostas dadas pelos professores, conforme mostra a tabela 3 seguinte:

TABELA 3 - Entrevista com professores sobre números complexos

Assunto da entrevista	Respostas dadas pelos professores participantes	Nº Professores	Em %
1. Quanto à importância do conhecimento	Devido as suas aplicações nas áreas do conhecimento científico	10	50
	Auxilia no ensino de Física e outras disciplinas ligadas à eletricidade	07	35
	Aumenta o conhecimento sobre conjuntos Numéricos	02	10
	Serve para resolver equações polinomiais	01	05
2. Quanto à aplicação prática	Geometria, Física, Engenharia Elétrica, Análise de fasores e Circuito de corrente elétrica contínua e alternada	17	85
	Topografia	01	05
	Cosmologia e Astrofísica	01	05
	Informática	01	05
3. Quanto ao início da aula	Revisando conjuntos numéricos	11	55
	Propondo uma situação com resposta complexa	06	30
	Fazendo uma contextualização histórica	02	10
	Contextualizando no plano cartesiano	01	05
4. Quanto às dificuldades do professor para ensinar	Encontrar nos livros didáticos problemas interessantes e abertos	08	40
	Os alunos sentem dificuldade em conhecimentos anteriores (trigonometria)	06	30
	1ª e 2ª Fórmulas de De Moivre	05	25
	Não sente dificuldade	01	05
5. Quanto às dificuldades dos alunos em aprender	A forma trigonométrica e suas aplicações	09	45
	Entender que $\sqrt{-1} = i$	05	25
	A forma de escrita $Z = a + bi$	03	15
	1ª e 2ª Fórmulas de De Moivre e Operações sem significado contextualizado	03	15
6. Quanto à importância da história	Oferece uma contextualização e uma visão de sua evolução	11	55
	Mostra sua necessidade prática	06	30
	É uma maneira de motivar o aluno	02	10
	Na há necessidade de falar nesse assunto	01	05
7. Se o conteúdo é atual para ser trabalhado nas escolas	Oportunidade de o aluno perceber o desenvolvimento dos números e discutir o imaginário	13	65
	Auxilia cálculos de problemas de aplicabilidade e explica as raízes de números negativos	03	15
	Serve de suporte para a evolução de outros conhecimentos científicos	03	15
	Não existe conteúdo atual	01	05

SEGUNDA FASE DA ANÁLISE *A PRIORI*

Consiste na preparação de seqüências didáticas e do esquema experimental para a ação em classe, onde serão delimitadas variáveis de controle que possibilitem conhecer o que se pretende experimentar. Seu objetivo é determinar que seleção de variáveis melhor permitirá controlar o comportamento dos alunos, no caso do projeto de pesquisa trata-se do processo de construção e elaboração de material e atividades. Em síntese, a análise *a priori* comporta dois aspectos: o descritivo e o previsivo e está centrada nas características de uma situação a-didática que se quis criar e que se quer aplicar aos alunos visados pela experimentação.

Na nossa pesquisa, preparamos atividades para a intervenção na sala de aula, selecionando perguntas, problemas e situações em ordem crescente de dificuldade. O esquema experimental consistiu de nove seqüências didáticas, incluindo o conteúdo dos números complexos e uma avaliação no final dos trabalhos, os quais encontram-se no apêndice deste trabalho.

Nesta fase, fizemos um levantamento das hipóteses de estudo em relação aos dois aspectos: descritivo e previsivo.

TERCEIRA FASE DA EXPERIMENTAÇÃO

É a realização dos processos desenvolvidos nas análises *a priori* e preliminar, ou seja, a realização de cursos pilotos em que se recorre à pesquisa-ação experimental em educação. Ainda nesta fase, deve-se observar o envolvimento dos professores e alunos através de filmagens desenvolvidas no decorrer do curso. Neste caso, o material produzido na análise preliminar e *a priori* é testado e analisado mediante uma seqüência didática, e após o experimento (e em certos casos durante), se inicia a análise *a posteriori*.

Na nossa pesquisa, fizemos a inter-relação entre os elementos definidos nas fases anteriores. Aplicamos as seqüências didáticas, com base nas questões levantadas na análise preliminar e conforme as seqüências elaboradas na fase da análise *a priori*. Durante todo o desenvolvimento dos trabalhos, registramos, através de

anotações, fotografias e gravação em fita cassete todos os acontecimentos que surgiram quando da intervenção nas aulas. Acompanhamos diretamente o desenvolvimento das questões por cada aluno.

QUARTA FASE DA ANÁLISE *A POSTERIORI* E VALIDAÇÃO

Refere-se a compreensão e a interpretação dos resultados da experimentação e seu objetivo é oferecer um *feedback* para o desenvolvimento de uma nova análise *a priori* para uma nova experimentação, concebendo o desenvolvimento das atividades como uma atualização dos processos em questão.

Em relação a nossa pesquisa, coletamos os dados de todas as atividades realizadas pelos alunos em classe e com base nas observações registradas no decorrer de todo o processo, tivemos condições de buscar respostas para perguntas do tipo:

- Como os alunos reagiram diante da diferente metodologia de ensino de números complexos a que estavam acostumados?
- Quais as indagações surgidas na sala de aula de números complexos?
- Quais as dificuldades apresentadas diante das questões propostas?

Finalmente, confrontamos as análises *a priori* com as análises *a posteriori* e verificamos, através dos resultados obtidos, a validação das hipóteses levantadas no início da pesquisa.

3.3 DESCREVENDO A METODOLOGIA DE ENSINO

A partir de agora, apresentaremos como as aulas de matemática relacionadas ao conteúdo dos números complexos foram desenvolvidas.

Na tentativa de buscar soluções favoráveis a nossa pesquisa, trabalhamos de forma diferente da que estávamos acostumadas, isto é, trabalhamos através de uma seqüência didática, composta de nove atividades e uma avaliação, que se encontram no apêndice deste trabalho. Seqüência didática significa neste trabalho uma série de tarefas ordenadas e organizadas com a finalidade de serem atribuídas aos alunos, para que os mesmos resolvam com a supervisão e acompanhamento do professor. Na

nossa pesquisa chamamos “tarefa” de questão. Todas as atividades foram numeradas e compostas por uma ou duas questões, onde cada questão teve seu título e seu objetivo, conforme a apresentação padronizada do modelo abaixo:

	Nome completo da escola
	Nome da diretoria e da gerência
	Nome da disciplina, série e bimestre
	Nome do professor, turma e data
	Nome dos alunos: 1 _____
	2 _____
	3 _____
<u>TÍTULO</u>	
<u>Atividade nº</u>	
<u>Questão nº</u>	
Objetivo: _____	

Das doze aulas consecutivas, duas foram destinadas à atividade extra-classe. Dessa forma, tentamos propor uma atividade para cada aula. Com base nas fases da análise preliminar e da análise *a priori* da engenharia didática, fizemos nossas escolhas em relação aos dois aspectos: descritivo e previsivo .

I) Quanto ao aspecto descritivo, delimitamos nove considerações, sendo as quatro primeiras destinadas aos alunos participantes e as outras cinco destinadas ao professor, vejamos:

- Com exceção da primeira atividade e da avaliação no final das atividades, todas as outras foram propostas para serem feitas em grupo de dois ou três alunos. Onde esses grupos foram formados pelos próprios alunos;

- Todas as atividades foram feitas em sala de aula, num tempo de vinte minutos, no máximo. Após esse tempo, as atividades foram recolhidas para futuras apreciações;
- Também deixamos claro que, “qualquer dúvida que surgisse”, fora do que foi informado, eles deveriam nos comunicar, para que pudéssemos orientá-los na medida do possível;
- Antes que eles comessem a resolver as questões propostas de cada atividade, informamos a eles sobre as três considerações descritas a cima;
- Algumas atividades foram trabalhadas com os alunos antes do assunto estudado, e outras foram trabalhadas após a explanação de algumas noções básicas;
- As atividades, mesmo depois de analisadas, não foram devolvidas ao aluno;
- As atividades propostas não tiveram a pretensão de uma avaliação formal, mas apenas de analisar como os alunos iriam reagir diante da mudança metodológica de ensino;
- Após a devolução de todas as atividades realizadas pelos alunos, fizemos os comentários, respondendo às indagações surgidas e resolvemos todas as questões;
- Durante a resolução das questões contidas nas atividades, demos oportunidade para que os alunos fizessem suas intervenções, de modo a eliminar as dúvidas existentes.

II) Quanto ao aspecto previsivo, antevemos possíveis respostas a questões do tipo:

- Como nossos alunos irão reagir à mudança de metodologia de ensino?
- Quais as indagações que poderão surgir na sala de aula, sobre os números complexos?
- Que tipo de dificuldade os alunos apresentarão diante das questões propostas?
- Quais os possíveis benefícios que poderemos obter com a nova metodologia de ensino implementada através de atividades?

Durante a realização das atividades estivemos fotografando, gravando e anotando todas as falas e atitude dos alunos, também percorremos todos os grupos para ajudá-los no que fosse necessário e a avaliação dos conhecimentos adquiridos foi feita no momento da discussão com a turma e da intervenção dos alunos.

3.3.1 Implementando a engenharia didática

Baseado nas questões levantadas na análise preliminar e a priori, passaremos agora a apresentar como se procedeu a experimentação na sala de aula. Nossa exposição com o conteúdo dos números complexos consta de doze aulas consecutivas, distribuídas da seguinte forma: duas aulas para atividade extra classe, nove para realizar a experimentação implementada através de nove atividades e uma aula para os alunos fazerem as avaliações das atividades realizadas, onde todas essas atividades mais a avaliação proposta encontram-se no apêndice deste trabalho. Nos dias que tivemos dois horários seguidos, apresentaremos as duas aulas seqüenciadas.

PRIMEIRA E SEGUNDA AULAS

No dia cinco de dezembro, após um período de cento e doze dias de greve, iniciamos nossas atividades normais referentes ao segundo semestre. Após saudarmos a turma e registrarmos os presentes e os faltosos, verificamos que dos quarenta e dois alunos da turma, seis estavam ausentes. Informamos sobre o conteúdo que iríamos começar a estudar. Tratávamos de números complexos. Informamos também que o procedimento das aulas relacionadas a esse conteúdo seria diferente do que vínhamos trabalhando no primeiro semestre. Nesse momento, os alunos, que nos ouviam atentos, perguntaram:

- E como serão essas aulas?

Respondemos que seriam através de nove seqüências didáticas, isto é, nove atividades, de modo a cumprir todo conteúdo proposto na programação. Ainda informamos que, essas seqüências didáticas faziam parte do nosso trabalho de mestrado que estávamos desenvolvendo e, por isso, gostaríamos que eles não faltassem às aulas e nem chegassem atrasados, tivessem atenção nas explicações que antecedessem algumas dessas seqüências didáticas e aproveitassem ao máximo o momento em que fizéssemos a resolução das atividades para interagir, de forma participativa no sentido de minimizar ou eliminar as dúvidas existentes.

Após essa intervenção inicial, propusemos a **primeira atividade** da sequência didática composta por três questionamentos, veja Apêndice B, a qual teve como título: *Questionamentos a respeito dos números complexos e suas aplicações*. Vejamos os questionamentos:

- a) O que você entende por número?
- b) Você já ouviu falar em número complexo? Como você entende o que vem a ser número complexo?
- c) Onde você acha que são aplicados os números complexos?

O objetivo de tais questionamentos foi verificar a reação dos alunos diante da mudança da metodologia de ensino e nos informar sobre o nível de conhecimento dos alunos a respeito dos números, bem como os seus interesses em relação aos complexos e suas aplicações no mundo real. Nesse sentido, nenhuma explicação que antecederesse essa primeira atividade foi dada.

No momento em que fizemos a distribuição do material para cada aluno, demos todas as informações necessárias e previstas na fase da análise *a priori* da Engenharia Didática. Ver fotografia 2.



Fotografia 2 - Distribuição do material

Durante a realização dessa atividade, observamos uma rejeição por parte de quase metade dos alunos que estavam acostumados com a metodologia trabalhada anteriormente. Com a ajuda de um gravador, conseguimos registrar as reclamações e também as indagações. Vejamos:

- *Ih! Só tem perguntas, nenhuma continha para fazer, afinal de contas, estamos em uma aula de Português ou Matemática?*
- *Não estou gostando dessa atividade.*
- *Me desculpe, mas não quero participar dessa atividade.*
- *Vale nota?*
- *Se eu não souber responder, posso deixar em branco?*
- *Como posso definir uma coisa que nunca estudei?*
- *É obrigado colocar o nome para se identificar?*
- *Pode fazer em casa?*
- *É obrigado responder os três questionamentos?*
- *Professora, a direção da escola e a equipe pedagógica estão sabendo que a senhora está fazendo da gente cobaia?*

Confesso que esse acontecimento nos deixou meio tristes. No entanto, a reação dos alunos já era esperada, até porque conhecemos nossos alunos, só não esperávamos que fosse no sentido de ameaças como se pode ver na última fala. Para diminuir essa resistência inicial, procuramos conversar, esclarecendo as perguntas na medida do possível. Essa conversa informal possibilitou a continuidade dos trabalhos que, a princípio, chegamos a pensar que não íamos conseguir contar com a participação deles. De todos os alunos presentes, apenas um deixou de participar, por apresentar problemas de saúde. Após o tempo previsto, solicitamos a devolução das tarefas respondidas.

Na sequência, observamos que ainda tínhamos vinte minutos, tempo suficiente para a realização da próxima atividade, decidimos portanto fazer os comentários da primeira atividade na próxima aula, e, nesse momento, propomos a **segunda atividade** composta por duas questões e intitulada por: *Representação dos números complexos no plano cartesiano e problema histórico*, veja Apêndice C.

No início desta atividade, informamos aos alunos que todas as informações dadas para a primeira atividade também eram válidas para as demais, porém com um

acrécimo: que a partir da segunda até a nona atividade, os alunos poderiam se reunir em grupo de dois ou três. Mas, antes de concluir nossa fala, um dos alunos perguntou:

- É a senhora que vai formar os grupos? ou é a gente?

Respondemos: Fiquem à vontade para formar os grupos.

Nesse momento, percebemos que eles ficaram bastante satisfeitos. Os grupos foram formados rapidamente.

Vejamos agora as duas questões da atividade 2 proposta:

1) Represente graficamente os números dados abaixo

a) 1

b) -3

c) $\sqrt{4^{-1}}$

d) $5\sqrt{-1}$

e) $2 + \sqrt{-4}$

f) $(4, -1)$

2) Divida 10 em duas partes de modo que seu produto seja 40.

Para esta atividade, deixamos para fazer a explanação do conteúdo após a realização feita pelos alunos, até porque o objetivo desta questão 1, foi verificar qual intenção do aluno para representar os números complexos no plano e o objetivo da questão 2 foi verificar a intenção do aluno ao desenvolver o problema e encontrar raiz quadrada de um número negativo.

Durante a realização da questão 1, os alunos não tiveram nenhuma dificuldade para representar os números dos itens “a”, “b”, “c” e “f”. A maior dificuldade apareceu no momento de representar os números dos itens “d” e “e”. Esta afirmação pode ser confirmada através da fala gravada dos alunos quando comentam:

- Os números que estão nos itens “d” e “e” são muito difíceis.

- Durante toda minha vida de estudante, eu nunca me deparei com esse tipo de questão que pede para representar graficamente a raiz quadrada de um número negativo.

A questão 2 refere-se a um problema simples do segundo grau, de fácil resolução, mas que tem como resposta uma raiz quadrada de um número negativo, e foi selecionada para a experimentação por trata-se de um problema histórico trabalhado

por Girolamo Cardano⁶ em 1542. Decorrido o tempo previsto, recebemos dos alunos as atividades resolvidas.

Na segunda aula, fizemos uma breve discussão, a respeito dos comentários feitos pelos alunos na primeira atividade. Em seguida, resolvemos as duas questões propostas na aula anterior, dando oportunidade para os alunos interagirem no sentido de minimizar as dúvidas e começar entender a necessidade de utilizar os complexos. No momento da resolução, explicamos que os números naturais, os inteiros, os racionais e os reais são representados graficamente na reta real e que um número complexo na forma algébrica $Z = a + bi$ também tem a forma de par ordenado $Z = (a, b)$, assim sendo, os complexos são representados graficamente no plano de coordenadas cartesianas, chamado de plano complexo ou plano de Argand -Gauss em homenagem aos matemáticos responsáveis pela sua criação, de modo que a cada número complexo corresponda um único ponto no plano e reciprocamente. Nesse contexto, chamamos a atenção dos alunos para os diferentes significados que conceituam os números complexos, mostrando o enfoque algébrico e o enfoque geométrico, conforme se encontra descrito na segunda seção deste trabalho. Em seguida, informamos que no século XVI, bem antes da existência dos números complexos, já existiam problemas semelhantes ao proposto na questão 2, gerando nos matemáticos da época muita dificuldade para solucioná-los, uma vez que por tentativas, eles conseguiam a solução, mas não encontravam explicação. Tomando como referência a resposta encontrada no problema da segunda questão: $x_1 = 5 + \sqrt{15}i$ e $x_2 = 5 - \sqrt{15}i$, mostramos sua representação na forma algébrica, sua parte real e sua parte imaginária, bem como as condições necessárias para que um número complexo seja imaginário puro ou simplesmente um número real.

Na sequência, fizemos uma retomada dos conjuntos numéricos, chamando a atenção dos alunos para o enfoque numérico dos números complexos, também descrito na segunda seção deste trabalho. Nesse contexto lembramos que, a solução de uma equação depende do conjunto em que estamos trabalhando. Assim, mostramos para o

⁶ Girolamo Cardano: Foi um cientista italiano, muito sábio na Matemática, na Filosofia e na Medicina. Vale ressaltar que na Matemática escreveu várias obras e publicou diversos trabalhos, entre eles está o problema anunciado na questão 2 da segunda atividade proposta neste trabalho. Foi também o primeiro a introduzir as idéias gerais da teoria das equações algébricas.

aluno a necessidade de mais um conjunto numérico, sendo C a representação do conjunto dos números complexos.

TERCEIRA E QUARTA AULAS

Não aconteceu com a ajuda do retro-projetor como planejamos. A escola determinou que passássemos uma atividade extra-classe. Acontece que, nessa época, estávamos repondo aulas no sábado por causa da greve dos professores. Dessa forma, entregamos aos alunos no final da segunda aula a tabela 4 com a cronologia dos números complexos, com o objetivo de tomarem conhecimento de como foi formado o conceito dos números complexos e, ao mesmo tempo, se prepararem para a próxima atividade da seqüência didática. Essa tabela está no apêndice L.

QUINTA E SEXTA AULAS

Nestas duas aulas, contamos com a participação de trinta e cinco alunos. Continuamos o trabalho iniciado anteriormente, propondo a **terceira atividade** da seqüência didática, veja Apêndice D, intitulada por: *Evolução do conceito de números complexos*, na qual constava a seguinte tarefa: “Baseado na leitura da cronologia sobre a evolução do conceito dos números complexos, faça uma análise, dando sua opinião a respeito do que você entendeu”.

O objetivo dessa aula foi mostrar para o aluno que, para se formar um conceito matemático, é necessário a participação de vários estudiosos, resultando dessa forma em um processo de desenvolvimento muito longo, que pode demorar muito tempo a fim de ser bem compreendido e aceito.

Essa aula ocorreu normalmente, sem muita interferência, apenas dois alunos se pronunciaram com as seguintes indagações:

- Professora, quantas linhas devemos escrever?
- Quem faltou, pode fazer em casa e entregar depois?

Respondemos: Escrevam quantas linhas vocês precisarem. Quanto à outra indagação, respondemos que todas essas seqüências didáticas propostas deveriam ser

feitas em sala de aula, conforme informamos no início das primeiras atividades. No final do tempo previsto, recebemos dos alunos todas as atividades respondidas. Na seqüência, comentamos sobre o desenvolvimento do conceito dos números complexos, os matemáticos envolvidos e suas principais contribuições. Em seguida, fizemos uma ligeira revisão sobre o estudo das potências e suas propriedades. Logo após essa fala, propomos a **quarta atividade** da seqüência didática, veja Apêndice E, composta por apenas uma questão, com o título: *Potências da unidade imaginária*, a qual foi retirada da prova de Matemática do vestibular 2003/RN. Nessa questão, temos o conceito de quadrado mágico, onde os elementos formadores desse quadrado mágico são as potências da unidade imaginária, conforme pode-se observar na figura 6. Vejamos a atividade:

Um quadrado mágico é um quadriculado com n^2 quadrados menores que contêm números de forma que a soma desses números em cada linha, em cada coluna e nas duas diagonais é a mesma.

Para responder às solicitações propostas, considere o número complexo $i = \sqrt{-1}$ e o quadrado abaixo:

i	i^2	i^3	i^4
i^5	i^6	i^7	i^8
i^9	i^{10}	i^{11}	i^{12}
i^{13}	i^{14}	i^{15}	i^{16}

Figura. 6 - Quadrado Mágico

- Calcule: $i^2, i^3, i^4, \dots, i^{16}$
- Verifique se o quadrado acima é mágico
- Calcule a soma de todos os números

Essa atividade teve como objetivo: verificar se os alunos após participarem da aula sobre potências, seriam capazes de determinar o valor de qualquer potência de i e também verificar se eles seriam capazes de interpretar o conceito de quadrado mágico dado na questão para responder corretamente o item “b” acima.

Durante o tempo disponível para a realização dessa questão surgiram as seguintes indagações:

- Professora, é preciso fazer os cálculos de cada potência?
- Por que só uma questão e tão fácil?
- Para responder o item "c" posso somar os resultados de cada linha ou de cada coluna?
- Existe alguma fórmula que some todos os números do quadrado mágico, sem precisar somar de um em um?

Após respondermos aos alunos, que a atividade proposta deveria ser feita de acordo com a interpretação deles, um aluno ainda insistiu indagando:

- Professora, não estou conseguindo interpretar direito o conceito de quadrado mágico. A senhora pode me ajudar?

Falamos então que ele deveria reler, concentrar-se e discutir com o seu grupo.



Fotografia 3 - Esclarecimentos finais sobre o quadrado mágico

Essa atividade foi realizada antes do tempo previsto. Assim, após recebermos todas as atividades dos alunos, fizemos a resolução e paralelamente chamamos a atenção dos alunos para o enfoque simbólico representado através das potências da unidade imaginária, conforme pode ser observado na segunda seção deste trabalho. No final da aula, os alunos que sentiram dificuldade de interpretar o conceito do

quadrado mágico e não perguntaram na hora da resolução da atividade porque sentiram-se constrangidos em relação aos colegas de classe, procuraram-nos para os esclarecimentos finais, conforme mostra a fotografia 3.

Vale ressaltar que esta atividade fez parte de um trabalho intitulado por: NÚMEROS COMPLEXOS - Resolução de um problema envolvendo um novo conceito em seu enunciado. Esse trabalho foi apresentado por duas vezes, sendo a primeira na XVI Semana da Matemática da UFRN, na modalidade de Comunicação Oral, e a segunda na 57^a Reunião Anual da SBPC realizado na UECE, na modalidade de Pôster.

SÉTIMA AULA

Nesta aula, pudemos contar com a participação de trinta e seis alunos, então, no início, explicamos sobre operações com números complexos na forma algébrica, abrindo um colchete para explicar sobre a igualdade, o oposto, o conjugado e também sobre o inverso de um número complexo. Finalmente, propomos a **quinta atividade** da sequência didática composta por duas questões, veja Apêndice F, sob o título: *Operações com números complexos na forma algébrica*. Vejamos suas questões:

1) Efetuar:

a) $2\sqrt{-1} + 5\sqrt{-1}$

b) $(1 + 3\sqrt{-1}) - (2 - 7\sqrt{-1})$

c) $(3 + 2\sqrt{-1}) \cdot (4 - 2\sqrt{-1})$

d) $(3 - 2\sqrt{-1}) \div (-2 + \sqrt{-1})$

e) $(2 + 5\sqrt{-1})^3$

f) $\frac{(1+i)^{103}}{(1-i)^{100}}$

2) Resolva as questões abaixo:

a) Determine o inverso do número $Z = (2; 1)$.

b) Dada a equação: $\frac{Z}{3+i} - \frac{Z-3}{i} = 0$, encontre o conjugado de Z .

O objetivo da questão 1 foi trabalhar as operações básicas e adquirir habilidade para trabalhar seus pré-requisitos. E o objetivo da questão 2 foi verificar se após a explanação feita na aula, se o aluno seria capaz de distinguir conjugado de inverso, além de revisar as operações básicas.

Durante a realização dessa atividade, passamos pelas carteiras dos alunos e observamos que a maior parte dos alunos preferiu trabalhar cada item da primeira questão substituindo a $\sqrt{-1}$ por i . Entendemos que eles assimilaram bem a aula sobre potências da unidade imaginária. A comprovação dessa observação se justifica quando ouvimos a fala de um dos alunos argumentando o seguinte:

- Prefiro resolver os itens “a”, “b”, “c”, “d” e “e” da primeira questão substituindo $\sqrt{-1}$ por “i”, acredito que posso errar menos.

No decorrer dessa atividade, fizemos esclarecimentos aos grupos conforme podemos observar na fotografia 4 seguinte. Alguns alunos aproveitaram esse momento e fizeram as seguintes perguntas:

- Inverso é a mesma coisa que conjugado?*
- Conjugado é o sinônimo de oposto?*
- O valor de $(-i)^2$ é o mesmo de $-i^2$?*



Fotografia 4 - Esclarecimentos aos grupos

- No item “b” da segunda questão devo começar substituindo Z por $a - bi$ que é o conjugado de Z ?

- Como vou fazer para resolver a equação dada na segunda questão? substitui-se Z por $a + bi$ e tira-se o mínimo múltiplo comum dos denominadores? ou resolve-se por parte fazendo a divisão de cada termo?

Diante de todas estas indagações, fizemos as anotações necessárias e falamos para eles discutirem com os colegas do grupo. Lembramos também aos alunos todas as informações dadas quando no início das primeiras atividades da seqüência didática.

Vale ressaltar que, durante todo o horário, os alunos participaram de forma ativa, demonstrando interesse em resolver as questões propostas. Até pediram mais um tempo além do previsto.

OITAVA E NONA AULAS

Nessas duas aulas, estavam presentes trinta e quatro alunos que foi constatado após o registro que é de praxe. Na seqüência, resolvemos as duas questões, propostas na atividade anterior, também respondemos e comentamos as indagações surgidas de modo que todos os alunos que não conseguiram acertar ou deixaram em branco, tivessem oportunidade de esclarecer suas dúvidas ou minimizá-las. Em seguida, fizemos uma rápida revisão sobre expressões numéricas, como por exemplo: quais as operações que devemos realizar primeiro, no caso de haver sinais de associação; qual a seqüência que se deve utilizar para a eliminação desses sinais?

Revisamos também sobre a forma algébrica de um número complexo, lembrando aos alunos que esse assunto foi estudado na segunda aula quando resolvemos a questão 2 da segunda atividade proposta. Tal revisão foi feita com a intenção de preparar o aluno para a **sexta atividade** da seqüência didática, veja Apêndice G, a qual foi proposta logo após a revisão e teve como título: *Parte real e parte imaginária de um número complexo*. Vejamos:

- 1) Determine o real x para que o número complexo seguinte

$$Z = (13i - 6) + (2x + i) \cdot (3 - 2xi) \quad Z = (13i - 6) + (2x + i) \cdot (3 - 2xi)$$
 seja imaginário puro.
- 2) Sabendo que k é um número real e que a parte imaginária do número complexo $Z = (2 + i) \cdot (k + 2i)^{-1}$ é zero. Calcule o valor de k .

O objetivo de propormos essas duas questões foi oportunizar os alunos a trabalharem expressões com números complexos, através das operações já trabalhadas anteriormente e distinguir a parte real e a parte imaginária de um número complexo.

Os alunos trabalharam as duas questões no tempo estabelecido e durante a realização destas, dois alunos de um mesmo grupo nos chamaram e cada um fez uma pergunta:

- Professora zero é um número real?
- Vi num livro: Calcule x para que o número complexo Z seja simplesmente imaginário. Esse simplesmente imaginário é a mesma coisa que dizer imaginário puro?

Mas, antes de respondermos, eles foram logo dizendo:

- Se não puder responder agora, não faz mal, a gente vai aguardar a hora da resolução para tirar nossas dúvidas.

Esta última fala mostra claramente que o aluno já se adaptou às condições apresentadas no processo ensino-aprendizagem através das seqüências didática. Após o tempo previsto, recebermos dos alunos todas as atividades respondidas, e, a partir de então comentamos as dúvidas surgidas e fizemos a resolução das questões propostas. Nessa aula houve poucas indagações.

Dando seqüência à aula, desenhamos no quadro o plano cartesiano e explicamos que esse plano também é conhecido por plano complexo ou plano de Argand-Gauss em homenagem aos matemáticos responsáveis pela criação da representação geométrica para os números complexos na forma $Z = a + bi$, sendo a e b reais, explicamos que todo número dessa forma pode ser relacionado, biunivocamente, ao conjunto dos pares ordenados de números reais (a, b) , e o conjunto desses pares, por sua vez, pode ser relacionado, biunivocamente, ao conjunto de pontos de um plano. Desse modo, cada ponto $P(a, b)$ do plano cartesiano passa a representar o número complexo $a + bi$, e, portanto, a representação geométrica do conjunto C é um plano. Mostramos também as regras do paralelogramo na interpretação vetorial da soma e da subtração de números complexos. Ainda no plano de Argand-Gauss, mostramos que a distância da origem ao afixo (nome dado ao ponto

que representa o número complexo no plano) chama-se módulo, e que o ângulo formado, no sentido anti-horário, entre o eixo real e a reta que determina o módulo, é chamado de argumento. Na continuidade explicamos sobre a forma trigonométrica e ao concluir essa exposição, propomos a **sétima atividade**, veja Apêndice H, composta pelas duas questões abaixo, a qual teve como título: *Módulo e argumento de um número complexo*. Vejamos:

1) Calcular o valor de k de modo que o módulo do número complexo $Z = (1+i) \cdot (k+2i)$ seja igual a 4.

2) Determine o argumento do número complexo $Z = \sqrt{6} - \sqrt{2}i$.

O objetivo de propor essas duas questões foi trabalhar os conhecimentos prévios do aluno, bem como o seu raciocínio. Vale lembrar que as fórmulas necessárias para a realização das duas questões foram explicitadas no quadro, conforme a necessidade dos alunos. As duas questões são bastante interessantes.

A questão 1 força o aluno a trabalhar os conhecimentos previamente aprendidos como, por exemplo: as operações claramente visíveis na questão, bem como, as potências de i quando multiplicamos i por $2i$, a forma algébrica quando organizamos o número Z na sua forma $a+bi$ e o módulo quando substituímos os elementos de Z : “a” e “b” na fórmula do módulo $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Já a questão 2 exige mais do aluno em relação à questão 1: Como o aluno não percebe claramente na questão que procedimentos vai ter que fazer para encontrar a resposta, ele vai precisar usar além do raciocínio, uma série de pré-requisitos previamente estudados, como por exemplo: para encontrar o argumento de um número complexo, o aluno vai precisar ter conhecimentos de Trigonometria, principalmente no que diz respeito aos ângulos notáveis, ciclo trigonométrico, noções de seno e cosseno, propriedades e simplificação de radicais, redução ao primeiro quadrante e módulo.

Durante a realização das tarefas, ficamos atentos a qualquer atitude ou fala, dessa forma registramos todos os comentários e indagações que surgiram, vejamos:

- *Essas questões são muito fáceis, mas não sei se está certo.*
- *Com os comentários da aula de hoje, dá para ir fazendo.*
- *Acho que vou errar a primeira questão, porque tenho dificuldades em produtos notáveis.*

- *Esse assunto de números complexos na forma trigonométrica é muito chato.*
- *O tempo dado é muito pouco para questões desse nível.*
- *Professora, existe raiz quadrada de oito?*
- *Pode riscar a folha da atividade? Eu acho que errei.*
- *Professora, o que eu fiz está certo?*
- *Minha dificuldade é encontrar o argumento, posso fazer um rascunho do ciclo trigonométrico?*
- *Professora, estamos sendo cobaias, é?*

Através dessas falas, fomos percebendo que, apesar do interesse dos alunos em participar da atividade proposta, eles se mostraram bastantes inseguros em relação aos assuntos já estudados.

No final do tempo previsto para realização das tarefas, os alunos pediram mais tempo, “*pelo menos cinco minutinhos a mais*” falou uma aluna. Essa atitude, na nossa opinião foi muito positiva, os alunos mostraram-se claramente interessados, com vontade de acertar. Infelizmente, o pedido não pôde ser atendido, tendo em vista que devemos respeitar as escolhas previstas na descrição da segunda fase da engenharia didática. Nesse sentido, após o tempo previsto, recolhemos todas as atividades resolvidas e fizemos a resolução das duas questões, comentando e respondendo sobre todas as dúvidas existentes.

DÉCIMA AULA

Após cumprir com as obrigações preliminares e constatar trinta e um alunos presentes, iniciamos nossa décima aula lembrando alguns tópicos estudados durante a explanação da aula anterior e que íamos precisar para desenvolver a próxima atividade, como por exemplo: a representação geométrica de um número complexo no plano, sua relação biunívoca com o conjunto dos pares ordenados de números reais e a relação biunívoca destes, com o conjunto de pontos de um plano. Logo em seguida, propomos a **oitava atividade**, veja Apêndice I, intitulada por: *Problemas geométricos de números complexos do tipo aberto*. Vejamos agora suas duas questões:

1) Efetuar geometricamente a adição dos números complexos: $Z_1 = 1 + 2i$ e

$$Z_2 = 4 + i.$$

2) $ABCD$ é um quadrado. Se $A(1;2)$ e $B(2;5)$, então determine as coordenadas de C e D .

A questão 1 sobre a representação vetorial da soma de números complexos, foi proposta com o objetivo mostrar que, a representação da soma de dois complexos é um vetor que pode ser encontrado através de mais de um caminho de resolução. Quanto a questão 2 sobre a representação de números complexos na forma de par ordenado, teve como objetivo trabalhar o raciocínio geométrico do aluno e mostrar que existe alguns tipos de problemas que admitem mais de uma solução.

No início dos trabalhos, ouvimos os seguintes comentários entre eles:

- *Essa primeira questão é muito fácil.*
- *Dá para resolver as duas questões pela lógica.*
- *Eu gosto desse tipo de questões, são muito interessantes.*

Os comentários acima demonstram que os alunos se sentiram motivados no instante em que fizeram a leitura e tomaram conhecimento do que se tratava.

O enunciado das duas questões dá condições para o aluno decidir como quer fazer: com ou sem cálculos. Na questão 1, ele deverá usar os conhecimentos aprendidos na nona aula. A questão 2 por ser de fácil compreensão, desperta no aluno o interesse de resolver e acertar. Além de oferecer motivação, ela também conduz o aluno a raciocinar. Como se trata de uma questão geométrica, o aluno deverá representar os dois pontos A e B dados no plano. Ao ligar os pontos A e B , ele tem um lado do quadrado e percebe que evidentemente poderá formar o quadrado acima ou abaixo desse lado AB , assim o aluno terá duas soluções para construção do quadrado. Os outros pontos C e D procurados, ele poderá obter através de uma rotação de 90° .



Fotografia 5 - Visita aos grupos para registro das falas

Durante todo o tempo previsto para a realização das questões propostas, fizemos visitas aos grupos, conforme mostra a fotografia 5 e com a ajuda de um pequeno gravador conseguimos gravar as seguintes indagações entre os alunos:

- *Geometricamente é a mesma coisa que graficamente?*
- *Será que podemos considerar as coordenadas do ponto B sendo $(1;5)$?*
- *Na segunda questão o quadrado pode ser formado a direita ou à esquerda do lado AB. Dessa maneira, as coordenadas têm respostas diferentes. E agora? Para que lado a gente faz o quadrado?*
- *Existem duas possibilidades para fazer o quadrado, conseqüentemente duas respostas diferentes para a mesma questão. Isso pode ocorrer?*

Antes de finalizar o tempo previsto para a realização das tarefas, três alunos já haviam terminado, pedimos então que eles aguardassem a resolução das questões. Aceitaram e um deles fez o seguinte comentário:

- *A resolução dessas questões é a parte mais importante. Penso que acertei as duas, mas só terei a certeza depois que a professora resolver explicando.*

Ao final do tempo, recebemos as tarefas respondidas e, a partir desse momento, iniciamos a resolução das questões, respondendo todas as indagações surgidas e discutindo com os alunos sobre as possíveis alternativas de resolução para questão 2. Na sequência, explicamos sobre as operações com números complexos na forma

trigonométrica, fizemos exemplos, dando ênfase à primeira e à segunda Fórmulas de De Moivre. No final dessa aula, propomos aos alunos que revisassem em casa as operações que acabávamos de estudar, pois, na próxima aula, iríamos propor a última atividade da sequência didática, concluindo assim o conteúdo dos números complexos.

DÉCIMA PRIMEIRA E DÉCIMA SEGUNDA AULAS

Iniciamos a décima primeira aula com a presença de trinta e três alunos. Dessa forma, pedimos para que eles formassem onze grupos de três alunos e então propomos a **nona atividade**, veja Apêndice J, contendo as duas questões abaixo:

1) Dado o número complexo $Z = 1 + \sqrt{3}i$, calcule o valor de Z^9 .

$$\text{Dado: } Z^n = |Z|^n [\cos(nq) + i \cdot \text{sen}(nq)]$$

2) Determine as raízes cúbicas de 8 e interprete geometricamente.

$$\text{Dado: } w_k = \sqrt[n]{|Z|} \left(\cos \frac{q + 2kp}{n} + i \cdot \text{sen} \frac{q + 2kp}{n} \right)$$

Essa atividade teve como título: *Potenciação e radiciação de números complexos* e foi proposta com o objetivo de trabalhar as fórmulas de De Moivre por estas serem consideradas relevantes em outras disciplinas de interesse do aluno.

A vantagem do uso das fórmulas de De Moivre nos problemas de Potenciação e radiciação de números complexos é tornar o processo de resolução mais rápido, além de diminuir as chances de errar.

A questão 1 refere-se à potenciação dos números complexos e, para o aluno calcular a nona potência, não é necessário que ele faça Z vezes Z , o resultado obtido multiplicar novamente por Z , isso nove vezes. E se ele tiver que calcular Z^n com $n=1000$ por exemplo? Além de ser um processo muito demorado e cansativo, esse aluno corre o risco de se atrapalhar, diminuindo assim suas chances de acertar. Nesse sentido, foi dada a primeira fórmula de De Moivre: $Z^n = |Z|^n [\cos(nq) + i \cdot \text{sen}(nq)]$ e para calcular Z^9 o aluno deverá fazer $n=9$, para encontrar o módulo deverá usar a forma

$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e para encontrar o argumento q , deverá usar as formas: $\cos q = \frac{a}{|Z|}$ e $\operatorname{sen} q = \frac{b}{|Z|}$.

Na questão 2, o aluno deve encontrar três raízes de modo que, elevando-se cada uma dessas raízes ao cubo, tem-se como resultado 8. Esse é um tipo de problema que, se o aluno decidir fazer por tentativa, é óbvio que ele vai perder muito tempo, até porque ele vai ter que testar. Em se tratando de raízes complexas, ele provavelmente não conseguirá adivinhar. Nesse sentido, será necessário usar a segunda fórmula de De Moivre: $w_k = \sqrt[n]{|Z|} \left(\cos \frac{q + 2kp}{n} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{q + 2kp}{n} \right)$ Como a raiz é cúbica, o aluno deve fazer $n = 3$ e $k = 0, 1$ e 2 . Sendo que, para encontrar o módulo e o argumento, ele deverá usar as formas apresentadas na questão anterior. Substituindo esses valores na segunda fórmula de De Moivre, ele encontrará as três raízes cúbicas e, então, poderá interpretá-las geometricamente no plano, onde essas raízes deverão estar sobre uma circunferência de modo a formar um triângulo equilátero de vértices w_0, w_1 e w_2 .

Durante todo o tempo destinado à realização da atividade, fizemos visita aos grupos para acompanhar de perto e gravar todos os acontecimentos.

A primeira indagação foi de uma aluna que, ao tomar conhecimento das questões contidas na atividade, nos chamou em sua carteira e num tom baixinho perguntou o seguinte:

- Professora, Para resolver essas duas questões propostas temos que usar as fórmulas de De Moivre? Isso é muito difícil.

Em um outro grupo ouvimos os dois comentários abaixo:

- De Moivre que me desculpe, mas de todo o conteúdo dos números complexos, eu só não gostei das suas fórmulas.

- Esses tipos de questões que envolvem formas trigonométricas são sempre muito complicados.

Baseado em experiências vivenciadas nos anos letivos anteriores, esses tipos de intervenções dos alunos já eram de se esperar. A dificuldade do aluno na maioria das vezes refere-se à falta de conhecimento do conteúdo anterior, no caso, a trigonometria.

Em relação à questão 1, ouvimos o seguinte comentário entre os alunos:

- Na primeira questão, encontrei o resultado de Z^9 negativo e fiquei inseguro porque não entendi qualquer número positivo elevado a qualquer expoente positivo tem como resposta um número positivo.

E em relação à questão 2, percebemos que as dificuldades demonstradas foram bem maiores comparadas à questão 1. Nessas condições podemos mencionar mais dois comentários que ouvimos de um dos grupos no momento da discussão:

- Essa segunda questão é muito difícil.

- Sei que uma raiz cúbica de oito é 2, as outras duas só podem ser números complexos.

Ainda em relação à questão 2, uma aluna nos chamou e perguntou o seguinte:

- Professora, gostaria de saber se na interpretação geométrica das raízes cúbicas de 8 é obrigado ligar os pontos representados por essas raízes?

Respondemos: Pense e discuta com o seu grupo.

Faltando poucos minutos para finalizar o tempo destinado à realização da atividade proposta, um grupo de alunos que estava terminando falou o seguinte:

- Professora, gostaria que nossas atividades fossem devolvidas. Isso é possível?

A fala dos alunos mostra claramente o seu interesse em relação ao conteúdo e como não seria possível a devolução das atividades, por serem destinadas ao nosso trabalho de pesquisa, resolvemos deixar uma cópia de cada uma delas na gráfica para os interessados.

Ao final do tempo previsto, recebemos o material dos alunos e, então, iniciamos a resolução das questões, respondendo às indagações registradas durante a realização da atividade e as que surgiram no momento da resolução. Na ocasião, discutimos sobre a importância das duas questões propostas, até porque o uso dos números complexos na forma trigonométrica, bem como suas operações, têm facilitado bastante os cálculos nas outras áreas de interesse dos alunos.

Finalizando o processo experimental da sequência didática, aqui exposta, ainda tínhamos tempo suficiente para uma outra atividade. Aproveitamos esse tempo para propor aos alunos participantes uma avaliação, veja Apêndice K, a qual teve como finalidade saber o posicionamento deles em relação à forma do ensino e da aprendizagem do conteúdo dos números complexos. Para facilitar esta avaliação, oferecemos aos alunos a seguinte orientação:

"Caro aluno, a presente avaliação tem por objetivo, colher algumas informações a respeito do processo ensino aprendizagem dos números complexos realizado através das atividades seqüenciadas. A sua sinceridade será de grande importância para o trabalho que estamos desenvolvendo. Desde já agradecemos sua colaboração. Caso aceite o roteiro, expresse sua opinião em relação à forma de apresentação do conteúdo, a organização, a quantidade de atividades, a qualidade das questões selecionadas, a aprendizagem, o tempo proposto e etc."

Essa avaliação foi individual e como só tínhamos vinte minutos para o término do horário, esse foi o tempo máximo proposto para a sua realização. É oportuno ressaltar que a participação dos alunos foi muito significativa. Todos quiseram participar.

Após essa avaliação, a turma participante solicitou-nos uma lista de exercícios com todo o conteúdo dos números complexos para reforçar o assunto que acabara de estudar, dando como justificativa a necessidade de praticá-la mais por causa do vestibular. A motivação e o interesse demonstrado pela tal atitude foi, na nossa opinião, muito importante. Nesse sentido, procuramos atender à solicitação da turma, oferecendo a lista de exercícios que se encontra no apêndice M.

4 DISCUSSÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS DA PESQUISA

Nesta seção, apresentaremos os resultados obtidos quando da realização do estudo feito com os livros didáticos relacionados aos números complexos, na sequência faremos os comentários das respostas obtidas pelos professores com relação à entrevista realizada e, em seguida, faremos a discussão de alguns resultados da experimentação em classe que consideramos relevantes para a nossa pesquisa, bem como a análise ante a mudança na metodologia das aulas a que os alunos estavam acostumados. Desta forma, chegamos a última fase da Engenharia Didática, a saber: *Análise a posteriori* e validação.

4.1 ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA COM RELAÇÃO AOS NÚMEROS COMPLEXOS

Analizando os livros didáticos, descritos na tabela 1 (ver p. 42), verificamos que todos os autores concordam sobre a importância do estudo dos números complexos, à medida que observamos a presença do conteúdo em todos. Entretanto, percebemos através das quantidades apresentadas pelos dados expostos, que eles não exploram, satisfatoriamente, estes conteúdos.

Ainda com base na amostra, verificamos que a partir de 1996, as páginas e os exercícios referentes aos conteúdos dos números complexos nos livros didáticos têm diminuído.

Em geral, nos livros analisados, o citado conteúdo é apresentado antes do estudo de equações polinomiais. Além disso, nenhum dos autores faz referência aos polinômios como uma aplicação para os números complexos, tendo em vista que estes surgiram para resolver equações do 3º grau. O que percebemos é que os autores estudados introduzem o conteúdo, tentando resolver uma equação do 2º grau com o discriminante negativo. Na sequência, falam que o conjunto dos números reais foi ampliado para o conjunto dos complexos para resolver problemas com esse tipo de equações. Nesse sentido, eles substituem a raiz quadrada de -1 pelo símbolo i e apresentam o conteúdo dos números complexos.

Os citados livros omitem-se em relação aos contextos significativos, conforme nos referimos anteriormente, no que diz respeito às operações com interpretação vetorial, aos problemas envolvendo a primeira e a segunda Lei de De Moivre, aos aspectos históricos e a suas aplicações em outras áreas do conhecimento.

Quanto aos aspectos históricos alguns autores dos textos mais recentes, a partir de 2001, têm se esforçado para utilizá-lo na introdução do conteúdo. No livro de Bezerra, por exemplo, ele tenta introduzir o conteúdo a partir de um pequeno resumo histórico, mas só consegue citar os matemáticos da época: Raphael Bombelli, Euler, Gauss e Argand e apontar a principal contribuição de cada um deles para a formalização dos números complexos, porém não há uma motivação ligada ao conteúdo. E no livro de Marcondes, o autor consegue citar apenas um matemático da época: Raphael Bombelli e informa que ele publicou um tratado de Álgebra falando sobre raízes quadradas de números negativos.

A maior parte dos autores citados omite-se de representar os números complexos na forma de par ordenado, com exceção dos dois autores: Barreto e Dante que definem o conjunto dos números complexos como sendo um conjunto de pares ordenados de números reais, para os quais as definições de igualdade, adição e multiplicação de pares ordenados são válidas.

É importante ressaltar que apenas o livro de Dante (2005), adotado no CEFET-RN, aparece como sendo o mais completo, é o único que apresenta duas aplicações dos números complexos: uma na Engenharia Elétrica e a outra na Geometria. Somente esse autor apresenta a soma de dois complexos com interpretação vetorial, no entanto omite-se de citar a multiplicação representada por vetores.

Quanto aos exercícios de números complexos nos livros citados, verificamos que todos os autores exploram o tipo tradicional, onde os exercícios são apresentados para verificação de fórmulas de forma repetitiva e voltados para treinamento de cálculos. Assim, observamos na maioria dos textos que não há preocupação em focar a relação entre o conteúdo já conhecido e o conteúdo que se quer estudar e assim buscar uma apresentação significativa para motivar aluno.

Os autores, em sua maioria, não exploram exercícios do tipo abertos e contextualizados. No entanto, o livro de Dante (2005) é apresentado como uma

exceção, pois o autor busca inovar a apresentação dos tipos de exercícios e propõe um exercício tipo contextualizado com apenas três questões semelhantes ao problema das duas aplicações citada anteriormente. É importante ressaltar que, quase todos os livros apresentados omitem-se de apresentar as Fórmulas de De Moivre, principalmente a fórmula da radiciação. Nesse contexto, não encontramos nenhum problema envolvendo esse tipo de operação.

Os autores não deixam claro o contexto histórico necessário e, dessa forma, muitos deles apresentam o conteúdo dos números complexos a partir da representação do símbolo i , conduzindo os alunos a usarem suas regras operacionais sem entendê-las. Faltam contextos importantes que poderiam ser explorados como, por exemplo: a evolução do conceito de números complexos, aplicações em outras áreas do conhecimento, problemas envolvendo a interpretação vetorial, problemas contextualizados envolvendo as Leis de De Moivre e exercícios do tipo aberto.

A maior parte desses livros não atende a nossas expectativas, pois não oferece condições para o professor elaborar e organizar suas aulas, nem tão pouco oferece motivações para o aluno desenvolver seus conhecimentos prévios.

A tabela mostra que a partir destes últimos quatro anos, a quantidade de páginas dedicadas ao conteúdo, continua em média mantendo o percentual; enquanto o percentual em média, de páginas reservadas para os exercícios, vem diminuindo. Isso pode indicar uma tendência de ênfase para um enfoque mais conceitual, tendo em vista a necessidade de aplicar estes conteúdos em outras áreas.

Tudo isso nos leva a refletir que falta clareza no conteúdo apresentado para que o aluno possa melhor compreender o assunto e seu significado nos textos didáticos, uma vez que, os números complexos foram criados para atender a determinados propósitos. Eles têm seus significados os quais são muitos bem definidos.

Tomando como fundamento o levantamento feito pela análise apresentada, entendemos que os livros didáticos não têm motivado a aprendizagem do nosso aluno, em relação aos números complexos.

4.2 COMENTÁRIOS DAS RESPOSTAS DA ENTREVISTA

Na primeira pergunta, todos responderam que o conhecimento de números complexos é importante. E, como justificativa, tivemos a sua aplicabilidade, conforme podemos observar na tabela 2 (ver p. 46). Na segunda pergunta sobre a aplicação prática dos números complexos, a maior parte dos entrevistados reforçou suas respostas dadas à primeira pergunta, porém o que nos chamou atenção foi que quase todos os professores de Matemática nos deram como resposta: Geometria e Física, enquanto que a maior parte dos professores engenheiros nos deu como resposta: Engenharia Elétrica, Análise de fasores, Circuito de corrente elétrica contínua e alternada. Isso nos leva a refletir que o conhecimento de cada professor está voltado para sua área de formação e, por esse motivo, tivemos as respostas dos professores de Matemática diferentes das respostas dos professores engenheiros.

Em relação à resposta da terceira pergunta, também notamos uma diferença entre as respostas dos professores de Matemática e as respostas dos professores engenheiros. Os entrevistados da Matemática escolheram iniciar suas aulas a partir de uma revisão dos conjuntos numéricos. Alguns deles falaram que essa revisão é uma forma de motivar os alunos. No entanto, essa forma não é a mais adequada, ela deixa transparecer para o aluno que os números complexos foram criados a partir de uma equação do 2º grau com discriminante negativo e, na verdade, sabemos que foram as equações do 3º grau que deram origem à criação dos Complexos. Já as respostas dos engenheiros foram mais lógicas quando optaram em propor uma situação problema dentro de sua área de atuação com uma resposta complexa, fazer uma contextualização histórica e contextualizar no plano cartesiano.

Quanto às respostas dos entrevistados, relacionadas as suas próprias dificuldades de ensinar números complexos, constatamos que a maior parte deles (os Matemáticos) apontam os livros didáticos como principal responsável pelas suas dificuldades, até porque os professores fazem suas pesquisas e preparam suas aulas com base nos livros didáticos. De acordo com o estudo realizado no item 4.1, chegamos à conclusão que os livros didáticos não têm ajudado muito a atender nossas expectativas. Em relação às respostas dos engenheiros, eles colocam que sua

difficuldade está em ter que atrasar o conteúdo por causa das dificuldades apresentadas pelos alunos em relação aos conhecimentos anteriores, no caso a Trigonometria.

Com relação às dificuldades dos alunos em aprender, apontadas pelos professores, verificamos que existe uma ligação com as dificuldades do professor em ensinar. Na tabela 2 (ver p. 46), verificamos essa informação, quando os professores citam: as Fórmulas de De Moivre como uma das dificuldades para ambas as partes, por exemplo.

Quanto à questão da importância histórica nas aulas de Matemática, quase todos os entrevistados consideram essa ideia pertinente e entendem que essa história contribuirá como explicações nas respostas das indagações dos alunos. Isso nos levou a refletir com mais atenção, pois quando perguntamos sobre como iniciavam suas aulas, apenas dois citaram que faziam uma contextualização histórica, conforme podemos ver na tabela 2. Essa contradição nos leva a crer que os professores são conscientes de que poderiam fazer suas aulas mais interessantes, até porque a História da Matemática é uma forma de motivação e oferece uma melhor visão de como se forma um conceito matemático, não só a história dos números complexos, mas a de qualquer conteúdo que seja trabalhado em sala de aula.

Por último, procuramos saber dos entrevistados se o conteúdo dos números complexos é atual para ser trabalhado nas escolas. Quase todos responderam que “sim” e as justificativas foram bem variadas, conforme a tabela. Essas afirmações favorecem a necessidade do ensino-aprendizagem dos números complexos na nossa escola, até porque se trata de uma instituição de educação tecnológica onde os alunos cursam disciplinas profissionalizantes, e a aplicação dos números complexos se faz presente, desempenhando um papel sumamente importante. No entanto, é óbvio afirmar que a base de qualquer conhecimento tem como obrigação gerar condições para a produção de novos conhecimentos. Dessa forma, os professores engenheiros que trabalham com as disciplinas de formação profissional e necessitam fazer aplicações dos números complexos na sua área de atuação recebem os alunos com a base adquirida em Matemática. Isso facilita a aprendizagem do aluno, até porque a função do engenheiro é trabalhar a aplicabilidade dentro de sua área.

Embora, avaliemos que na entrevista houvésssemos omitido uma pergunta diretamente ligada com à metodologia utilizada pelos professores, é importante ressaltar que nenhum deles teceu comentários a respeito do uso de qualquer metodologia de ensino-aprendizagem diferente da tradicional. Com base nas respostas dadas, e conhecendo a realidade das dificuldades enfrentadas pelos colegas professores através do diálogo diário, confirmamos que nenhum dos professores entrevistados trabalha o conteúdo dos números complexos através de atividades. Neste sentido, consideramos que as repostas dos entrevistados fortaleceram a utilização das seqüências didáticas como alternativa metodológica para motivar a aprendizagem dos números complexos.

4.3 DISCUSSÃO DE ALGUNS RESULTADOS MAIS RELEVANTES DA EXPERIMENTAÇÃO EM CLASSE

Nossa exposição dos resultados da experimentação em classe segue a ordem das seqüências didáticas realizadas e tem como base: as atitudes dos alunos expressas em seus depoimentos durante a realização das atividades; a coleta de dados⁷ obtida a partir dos resultados das questões resolvidas pelos alunos, características que evidenciem facilidades e dificuldades na aprendizagem do conteúdo, apresentadas através de observações, registros de algumas considerações e desempenho no desenvolvimento das seqüências trabalhadas.

Dos três questionamentos da primeira atividade (ver p.52), os alunos não sentiram nenhuma dificuldade para expressar o que entendiam por número, todos os participantes foram unânimes em responder, cada um a sua maneira, como sendo algo que está relacionado à quantidade. O problema maior aconteceu em relação ao segundo e terceiro questionamentos, quando perguntamos o que entendiam por números complexos e suas aplicações. A dificuldade para responder a tais questionamentos causou uma reação de rejeição e houve muita reclamação quanto à mudança da metodologia, conforme já comentamos anteriormente (ver p. 53). Vejamos uma das reclamações que mais nos chamou a atenção:

⁷ “coleta de dados”: Ato através do qual recolhemos informações necessárias para a pesquisa.

- A senhora não vai explicar primeiro? Dar as definições e nos informar onde podemos aplicar, para que a gente tenha condições de responder corretamente?

De acordo com o exposto, entendemos que nossos objetivos foram alcançados, a reação dos alunos nos mostra uma acomodação em relação a metodologia de ensino tradicional em que o professor resolve alguns exercícios que servem de modelo e, em seguida, cobra uma lista de exercícios semelhantes. Entendemos também a concepção de nossos alunos, os quais pensam que todas as atividades fornecidas pelo professor devem ser devolvidas somente com a resposta certa.

Durante a segunda atividade, também ouvimos o desabafo de um dos alunos com o colega de seu grupo a respeito da metodologia:

- Não gosto quando o professor inventa de mudar a forma de ensinar, prefiro estudar da maneira como eles têm feito até agora: Dá a definição, faz vários exemplos e depois passa o exercício pra gente treinar. Os meus pais estudaram assim e aprenderam.

Esta reclamação confirma nosso comentário anterior a respeito da metodologia tradicional.

Através da coleta de dados, pudemos constatar que a maior parte dos alunos já tinha ouvido falar em números complexos, mas sentiu muita dificuldade para expressar o que entendia, mais da metade da turma deixou as questões em branco, alguns alunos repetiram a resposta dada por outros alunos, e outros justificaram, afirmando nunca ter estudado esse assunto, as respostas repetidas foram:

- São números não reais, que servem para fazer cálculos impossíveis.*
- São números sem valor significativo ou sem especificação exata que, na Matemática básica, são considerados inexistentes.*

As respostas dadas nos mostram claramente que o aluno ainda não tem o conhecimento do assunto dos números complexos.

Em relação à questão da aplicação, a dificuldade também aconteceu. Vejamos:

- Não sei, não tenho a mínima idéia.*
- Se não for na Matemática, não sei responder.*
- Em cálculos muito complexos.*

Como podemos observar, somente três alunos responderam, demonstrando pouco interesse em responder. Baseado nas dificuldades apresentadas, entendemos

que a ausência de pré-requisitos é evidente, mas como nosso objetivo era verificar que conhecimento eles tinham e o interesse em responder às questões, entendemos que tais objetivos foram alcançados.

Analisando as questões da segunda atividade proposta (ver p.54), percebemos que os alunos não apresentaram dificuldades para representar os números dos itens “a”, “b”, “c” e “f”. A dificuldade surgiu para representar os números $5\sqrt{-1}$ e $2+\sqrt{-4}$ referentes aos itens “d” e “e” respectivamente. Vale ressaltar que nenhum aluno conseguiu representar graficamente estes dois números. E a causa desse entrave foi a raiz quadrada do número negativo. Eles não tinham a mínima idéia de que a forma algébrica de um número complexo $Z = a + bi$ ou $Z = a + b\sqrt{-1}$ também tem a forma de par ordenado $Z = (a, b)$, e que, dessa forma, os complexos podem ser representados graficamente no plano de coordenadas cartesianas, ou seja, no plano de Argand-Gauss.

Na outra questão do problema histórico, verificamos que quase metade dos alunos conseguiu montar o problema e desenvolver chegando à forma $x = \frac{10 \pm \sqrt{-60}}{2}$. A partir daí, começou a dificuldade, a raiz quadrada de -60 foi para eles o entrave. E diante dessa situação conseguimos registrar as seguintes falas dos alunos:

- *Não estou conseguindo resolver esse problema, será que sou burro?*
- *O problema da segunda questão não tem solução.*
- *Esse problema está elaborado errado.*
- *Os números com raiz quadrada de número negativo são inexistentes.*

Os comentários acima já eram de se esperar, tendo em vista que até esse instante, os alunos ainda não estudaram o conteúdo dos números complexos. Dentre esses comentários, ouvimos um aluno falando em relação à mesma questão:

- *Não estou sentido muitas dificuldades para resolver as questões, aproveitei o período da greve para estudar o assunto de números complexos e fiz bastantes exercícios.*

O grupo desse aluno foi o único que conseguiu desenvolver todo o problema. No entanto, não conseguiu representar no gráfico a raiz quadrada dos números negativos da questão anterior. Diante do comentário acima e do desempenho do aluno demonstrado através do desenvolvimento das tarefas realizadas, chegamos à

conclusão de que, se todos os outros nossos alunos também tivessem aproveitado o período da greve dos professores para estudar, não teriam apresentado tanta dificuldade.

Em relação à terceira atividade (ver p.56), a respeito da cronologia da evolução do conceito dos números complexos, constatamos através das escritas dos alunos que o objetivo de propor essa questão foi alcançado. Conforme pudemos constatar numa das escritas que mais nos chamou atenção, porque além de atender as nossas expectativas, apresenta um conteúdo semelhante as escritas dos outros alunos, vejamos:

“Quando aprendemos algum assunto da matemática em sala de aula, não sabemos o quanto foi demorado e principalmente trabalhoso chegar a uma teoria que aprendemos em um dia, em uma aula ou, às vezes, em apenas alguns minutos. Percebi isso, ou melhor, refleti sobre isso através do texto da cronologia sobre o conceito dos números complexos e passei a perceber um pouco da importância de tais assuntos na matemática. Não devemos valorizar a matemática não só por sua grande utilidade em todos os ramos da ciência, mas, também por sua evolução histórica. É importante a quantidade de gênios por trás de uma simples teoria, a qual na maioria das vezes não são tão consideradas como deveria ser”.

A quarta atividade (ver p.57) sobre o conceito do quadrado mágico foi, na opinião dos alunos, a mais fácil. Através da coleta de dados, verificamos que quase todos os alunos conseguiram resolver, com exceção de três alunos que não acertaram porque não conseguiram interpretar o conceito dado. De um modo geral, percebemos que essa atividade foi muito bem aceita pela turma, como justificativa temos o comentário de um aluno que conseguimos captar com a ajuda de um gravador, vejamos:

- Já tinha ouvido falar em quadrado mágico, mas não sabia como é que era. Agora que eu aprendi, nunca mais vou esquecer. Gostei muito dessa questão, é muito interessante.

Este comentário mostra claramente a satisfação do aluno no momento que conseguiu entender o conceito dado sobre quadrado mágico. Isto para nós foi muito gratificante, até porque nossos objetivos foram alcançados.

Na quinta atividade (ver p.59), eles reclamaram muito do tempo, e a dificuldade apresentada foi mais em relação a questão $\frac{(1+i)^{103}}{(1-i)^{100}}$, onde podemos listar os erros que mais chamaram nossa atenção. Vejamos:

$$\begin{aligned}
1) \quad & \frac{(1+i)^{103}}{(1-i)^{100}} = \frac{(1+i)^3}{(1-i)^0} = \frac{1^3 + i^3}{1^0 - i^0} = \frac{1-i}{1-1} = \frac{1-i}{0} = 1-i \\
2) \quad & \frac{(1+i)^{103}}{(1-i)^{100}} = \frac{1^{103} + i^{103}}{1^{100} - i^{100}} = \frac{1+i}{1-1} = \frac{1+i}{0} = 0 \\
3) \quad & \frac{(1+i)^{103}}{(1-i)^{100}} = (1+i)^3 = 1^3 + i^3 = 1+i
\end{aligned}$$

Podemos observar que os erros cometidos pelos alunos foram com relação às propriedade da potenciação e a divisão por zero. Nos três casos de erros apresentados, eles elevaram cada termo da base ao expoente. Esse tipo de erro mostra a falta de compreensão dos alunos com relação as propriedades da potenciação que, geralmente, vem à tona quando os alunos precisam usá-lo para adquirir novos conhecimentos. Observamos também através da coleta de dados que, dos trinta e seis alunos participantes, sete acertaram, quatorze erraram e quinze deixaram de fazer. Ainda com relação a esta questão, ouvimos algumas falas que conseguimos registrar com a ajuda de um gravador, as quais vale a pena ser citada, até porque elas confirmam o que acabamos de expor:

- *Vou deixar de fazer o item “e” da questão 1, porque esqueci a fórmula do cubo da soma de dois termos.*
- *Sinto-me constrangido em mostrar meus erros, prefiro deixar em branco.*
- *O tempo dado foi muito pouco.*

Na outra questão dessa mesma atividade, os alunos se atrapalharam muito com a palavra inverso, fazendo o oposto ou o conjugado no lugar do inverso. Um dos erros mais graves foi dar como resposta cada número do par ordenado, invertido. Mas vale a pena informar que, no momento da resolução, eles interagiram bastante. Nessas condições, entendemos que nossos objetivos foram alcançados, pois o interesse dos participantes no esforço de aprender e na exigência de respostas para suas indagações foi altamente positivo.

A sexta atividade (ver p.61) composta por duas questões contendo expressões com números complexos foi bem aceita pelos alunos, que, durante a realização dos trabalhos na sala de aula, demonstraram bastante interesse a partir dos seguintes comentários:

- *As duas questões são muito fáceis.*
- *As duas questões são muito parecidas.*
- *Com as explicações dadas antes da atividade, a coisa ficou muito mais fácil.*
- *Esse número de questões deve ser repetido nas provas, apenas duas questões.*
- *Esse conteúdo é mais interessante e mais fácil do que Trigonometria.*
- *Estou gostando de estudar através dessas atividades; no início, pensei que não ia aprender nada.*
- *Esse -1 que aparece como expoente de Z na questão 2 está me atrapalhando. Vou aguardar a professora resolver para tirar minhas dúvidas.*
- *Não lembro direito das condições do imaginário puro, acho que vou errar, porque não prestei atenção na revisão, ainda bem que essa nova forma vai me dar oportunidade de rever.*

Através dos três últimos depoimentos, pudemos verificar o aceite dos alunos com relação a nossa mudança metodológica no processo ensino-aprendizagem desenvolvida através de atividades. Os resultados obtidos através da coleta de dados foram muito bons, dos trinta e quatro participantes, apenas oito alunos não conseguiram encontrar a resposta correta, errando justamente nas dificuldades apresentadas por eles em seus depoimentos acima. Nessa atividade, nenhum aluno deixou as questões em branco.

Ao trabalhar módulo e argumento na sétima atividade (ver p.63), observamos que a insegurança demonstrada pelos alunos participantes foi uma característica bastante evidente, conforme podemos constatar através dos comentários e das indagações registradas na página sessenta e três. Outro fator importante que dificultou a realização das tarefas propostas nessa atividade foi com relação a operacionalização com ângulos (argumentos), nas quais os alunos precisaram utilizar conhecimentos de Trigonometria. No entanto, a dificuldade para trabalhar essa parte da trigonometria já era esperada. Vale lembrar que os professores participantes da entrevista realizada para a investigação deste trabalho apontaram a Trigonometria como sendo uma das maiores dificuldades tanto para o professor ensinar quanto para o aluno aprender. Para sanar as dificuldades apresentadas, procuramos, no momento da resolução, lembrar o ciclo trigonométrico tão bem trabalhado no primeiro e segundo bimestres, quando cada aluno construiu o seu na sala de aula, (fazendo uso de: uma folha de papel A4, régua,

compasso, par de esquadros, lápis grafite e borracha) e trabalhou todos os ângulos múltiplos de 30 e 45 em graus e em radianos. Dos trinta e quatro participantes presentes, somente sete alunos conseguiram resolver as duas questões corretamente, onze acertaram somente a primeira questão e os outros dezesseis não conseguiram acertar nenhuma das duas questões. Esses dados que poderiam ter sido melhores, teve também como causa a displicência e a falta de atenção na hora das explicações que antecederam as atividades.

A oitava atividade (ver p.65) foi proposta com o objetivo de trabalhar raciocínio geométrico do aluno, e, ao mesmo tempo, mostrar para esse aluno que na matemática existe alguns tipos de tarefas (chamada de tarefas abertas) que admitem vários caminhos possíveis de resolução.

Segundo Pozo (1998, p. 64), isto é normal de se esperar dos estudantes.

[...] a maioria dos alunos acredita que existe somente uma forma possível de resolver as tarefas matemáticas. Eles consideram a matemática como uma ciência acabada e fechada em si mesma, na qual qualquer inovação é impossível.

A afirmação do pesquisador é uma alerta no que diz respeito ao tipo de questões que elaboramos para nossos alunos. Nesse sentido, trabalhamos duas questões, do tipo: abertas, sobre representação gráfica dos números complexos, dando condições para o aluno pensar e decidir, dentre mais de um caminho de resolução, qual o melhor para si. Vale ressaltar que, de todas as atividades propostas, essa foi a que mais motivou os participantes, o que podemos comprovar através de dois comentários que conseguimos registrar durante a realização das tarefas, vejamos:

- *Não sei nem por onde começar a fazer os cálculos para encontrar as coordenadas da questão 2, mas vou acertar pela lógica.*
- *É possível determinar as coordenadas da segunda questão sem precisar fazer cálculos, basta que o desenho do quadrado no plano cartesiano seja bem feito.*

Os dois comentários citados demonstram o interesse e o entusiasmo dos alunos, com o desejo de acertar. Esse tipo de questão é muito importante, além de fazer o aluno pensar, também o leva a tomar decisões, desenvolvendo portanto o seu raciocínio lógico. Com a ajuda da coleta de dados relacionada a esta atividade,

verificamos que mais da metade da turma acertou a questão 1, quando preferiu fazer os cálculos e, em seguida, a representação geométrica. No caso da questão 2, quase metade dos alunos conseguiu acertar quando optaram pela resolução no plano cartesiano, onde desenharam o quadrado bem caprichado para ter condições de determinar as coordenadas procuradas, sem fazer uso dos cálculos.

A nona atividade (ver p.67) foi considerada a mais complexa na opinião dos alunos, principalmente a questão da raiz quadrada de oito. Através da coleta de dados, pudemos constatar que, dos onze grupos formados por três alunos cada, apenas um grupo conseguiu resolver as duas questões corretamente. Quatro grupos conseguiram resolver somente a questão da potenciação e os outros seis grupos tentaram, mas não tiveram êxito. Examinando as atividades dos grupos que não conseguiram êxito, constatamos que muito deles desenvolveram os cálculos do módulo e organizaram os cálculos do argumento, conseguindo determinar o valor do seno e do cosseno do ângulo procurado. A partir desse ponto, eles não conseguiram ir mais adiante. Estas observações garantiram-nos afirmar que a maior dificuldade apresentada pelos alunos nesta atividade foi devido a falta de atenção nas explicações que antecederam a atividade e também a falta de conhecimento na operacionalização com ângulos, principalmente com a representação em radianos. Os alunos realmente têm muita dificuldade para trabalhar os assuntos que precisam usar os conhecimentos de Trigonometria. Vejamos a seguir, duas indagações que conseguimos gravar e que claramente exemplificam este nosso comentário:

- Quando o argumento dá uma volta completa, seu valor é zero ou 2π ?

- Na segunda fórmula de De Moivre: $e_k = \sqrt[n]{|Z|} \cdot \left[\cos\left(\frac{q + 2kp}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{q + 2kp}{n}\right) \right]$,

$k = n$?

Apesar das dificuldades explicitadas, não podemos negar que durante a realização das questões, todos os alunos se mostraram bastante interessados, fazendo questão de tentar até o final do tempo previsto. E no momento da resolução a participação foi bastante ativa, todos quiseram tirar suas dúvidas já anunciadas quando da realização das atividades em classe.

Com a coleta dos resultados da avaliação proposta aos alunos no final das atividades realizadas (ver p.70), constatamos que a concepção descrita por cada um

dos participantes estava direcionada em uma mesma linha. Nesse sentido, escolhemos uma que mais nos chamou atenção, pela sua espontaneidade, por representar a mesma idéia dos outros, e também por nos fazer acreditar na sua sinceridade. Vejamos:

“Professora, a minha avaliação sobre as atividades com todo o conteúdo dos números complexos pode ser descrita, resumidamente, como: muito chata no início, interessante no decorrer e muito proveitosa no final. As primeiras atividades traziam questionamentos que, para mim, não despertavam interesse algum em respondê-las, pois se tratava de perguntas muito introdutórias que demoram muito até atingir o ponto realmente inicial dos números complexos. Além disso, eu não tinha noção de como era e nem onde podia ser usado. Eu não tinha a mínima idéia de como se fazia para formar um conceito matemático. Com o desenvolvimento do assunto em fragmentos fixos e de maneira compassada fui conseguindo perceber como esse conteúdo é importante. Além disso, cada fragmento ter vindo seguido de uma atividade com questões interessantes que nos permite prender a nossa atenção e vontade de resolver para acertar (com grau de dificuldade adequado), promoveu ainda mais a fixação do conteúdo, o que significa que, essa casadinha: assunto e atividade ou atividade e assunto, e em seguida a resolução dessas atividades para que nossas dúvidas fossem retiradas, trata-se de uma ótima estratégia de ensino. Gostei muito, e aprendi muito que não sabia, tomara que nossos professores de outras disciplinas adotem estratégias semelhantes a essa, em que o ensino e a aprendizagem que parecem chatas e complexas se tornem simples e de fáceis aprendizagem. Parabéns e muito obrigado por esse espaço de poder opinar.”

Esta avaliação nos mostra que nossas expectativas foram alcançadas. Apesar das dificuldades enfrentadas na sala de aula no início da experimentação, conseguimos aos poucos superá-las. E a nossa tentativa de mudança metodológica das aulas de números complexos através de atividades, teve um resultado evidentemente positivo.

Confrontando os resultados aqui expostos com as previsões e descrições anunciadas na segunda fase da engenharia didática, podemos concluir que nossas hipóteses apresentadas foram validadas. Isto é, conseguimos trabalhar as aulas de números complexos de uma forma diferente da que estávamos acostumados e fazer nosso aluno se interessar participando de todas as intervenções tendo como consequência a aprendizagem.

Vale destacar que essa conclusão está baseada nas seguintes considerações:

- Todas as escolhas e deliberações da segunda fase foram respeitadas;

- Os comentários, as atitudes, as dúvidas, as observações e desempenho apresentado nas atividades feitas pelos alunos foram levados em consideração;
- Os resultados obtidos através da coleta de dados surtiram o efeito que esperávamos;
- Os objetivos de cada atividade proposta foram alcançados;
- A avaliação acima feita por um aluno participante é uma das maiores comprovações, até porque ele é considerado ator principal da nossa investigação.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Refletindo sobre o trabalho realizado, acreditamos que estávamos no caminho certo, quando decidimos investigar nossa problematização a partir de um levantamento bibliográfico de alguns livros didáticos da Matemática, os quais poderiam oferecer melhores condições de pesquisa aos que deles fazem uso. A investigação segundo Freire (2002) é um processo de busca, de conhecimento, de criação, de descobrimento onde está presente a preocupação pela problematização. Nesse sentido, buscamos a investigação estabelecendo o diálogo com a realidade, isto é: através de entrevistas com os professores que trabalham com números complexos no exercício de sua profissão. É importante mencionar que as respostas obtidas não foram diferentes do que imaginávamos. Por exemplo, quando perguntamos *quais as dificuldades para o professor ensinar números complexos*, tivemos como resposta *a falta de contextos significativos nos livros didáticos que poderiam nos ajudar em nossas tarefas de prática docente*. Essa resposta confirmou a análise que fizemos dos livros didáticos. E quando perguntamos *quais as dificuldades que o aluno tem para aprender números complexos*, tivemos como resposta *trigonometria*. Confrontando este último resultado com os resultados obtidos através da pesquisa realizada com os alunos na sala de aula, verificamos a validação dos fatos.

É importante ressaltar que as seqüências didáticas selecionadas com todo o conteúdo programático e, em ordem crescente de dificuldade, certamente é uma estratégia que oportuniza os alunos a familiarizar-se com o conteúdo de forma gradativa. Fazer resolução e comentar as atividades realizadas pelos alunos após a tentativa deles, resulta em vários pontos positivos na sala de aula: como por exemplo: atenção, interesse, participação, concentração, motivação, discussão, interação e, conseqüentemente, a aprendizagem. A mudança metodológica no processo ensino-aprendizagem dos números complexos através do uso de atividades é uma estratégia que surtiu resultados positivos. Nesse sentido, sugerimos o uso de atividades nas aulas de números complexos como um agente facilitador da aprendizagem.

Após a avaliação do bimestre, onde os números complexos fizeram parte desse bimestre, o aproveitamento foi muito bom: dos quarenta e dois alunos participantes,

apenas quatro alunos ficaram abaixo da média. Esses dados nos levam a concluir que houve aprendizagem, o que nos deixa bastante satisfeitos.

Ao avaliarmos um trabalho científico, é preciso analisar, além da qualidade dos resultados, as contribuições trazidas à sua área de conhecimento, particularmente no que diz respeito à continuidade e perspectivas de novas aplicações nessa área.

Somos conscientes de que nem tudo o que se leciona em sala de aula tem necessariamente uma aplicação imediata. Sabemos que a Matemática é uma ferramenta fundamental na ciência, todavia não se pode pensar num ensino em que, a cada momento, se possa visualizar sua aplicabilidade. Hoje, mais do que nunca, faz-se necessário pensar na formação do ser humano em sua integralidade e não apenas nos objetivos de aprendizagem. O docente precisa deixar claro na mente de seus estudantes essa realidade que caracteriza a Matemática.

Relativamente aos números complexos, hoje temos aplicações que não se fizeram presentes na história de sua criação, tais como: Topografia, Cosmologia, Informática, Física Moderna e Eletricidade. Os modelos matemáticos fornecem os fundamentos científicos que propiciam explicações para fenômenos que, sem sua utilização, não seriam possíveis obter respostas nas áreas da ciência e da tecnologia.

Isso reforça nossa responsabilidade na tarefa educativa, ao mesmo tempo em que nos faz sentir as limitações de nossa ação num mundo em constante transformação para o qual nunca estamos realmente preparados diante da rapidez com que as mudanças acontecem.

Entendemos que nosso trabalho certamente servirá para ampliar o horizonte de nosso conhecimento a respeito dos números complexos, na medida em que nos faz refletir sobre a contribuição em sala de aula com alunos do ensino médio, como um todo. No entanto, somos conscientes de que este poderá ser enriquecido a partir da realização de estudos posteriores.

Acreditamos que, desta forma, podemos contribuir de forma significativa em eventos ligados ao ensino de Matemática com grupos de debates, com novos integrantes do PPGECONM e com nossos professores, ou seja, como forma de interação, de maneira a contribuir mais efetivamente na melhoria do processo ensino-aprendizagem como um todo.

REFERÊNCIAS

- AMORA, A. A. S. **Minidicionário Soares Amora da língua portuguesa**. 5. ed. São Paulo: Saraiva, 1999.
- APPOLINÁRIO, F. **Dicionário de Metodologia Científica**: um guia para a produção do conhecimento científico. São Paulo: Atlas, 2004.
- ARAÚJO, N. B. F. Números complexos: resolução de um problema envolvendo um novo conceito em seu enunciado. In: REUNIÃO ANUAL PARA O PROGRESSO DA CIÊNCIA, 57. 2005. Fortaleza. Anais/resumos disponível em: <http://www.sbpnet.org.br/livro/57ra/>. 2005
- ARTIGUE, M. **Ingénierie didactique**: recherches en didactique des Mathématiques. France: Grenoble, vol. 9, 1988.
- BARRETO, B.; SILVA, C. X. **Matemática aula por aula**. São Paulo: FTD, 2000.
- BEKKEN, O. B. **Equações de Ahmes até Abel**. USU: GEPEM, 1994.
- BEZERRA, M. J. **Matemática para o ensino médio**. São Paulo: Scipione, 2001.
- BIANCHINI, E.; PACCOLA, H. **Curso de Matemática**. São Paulo: Moderna, 1995.
- BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias: Ensino Médio. Brasília, 1999.
- CHEVALLARD, Y. **La Transposition Didatique**. Paris: La Pensée Sauvage, 1991.
- DANTE, L. R. **Matemática**. São Paulo: Ática, 2005. (Série Novo Ensino Médio).
- DOUADY, R. A universidade e a didática da matemática: os IREM na França. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo v. 1. nº 1. 1990.
- FABIANI, F. S. **Números complexos via resolução de problemas**. 1998. 210 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Estadual de São Paulo, Rio Claro, 1998.
- FOSSA, J. A. (Org.). **Facetas do diamante**: ensaios sobre educação matemática e história da Matemática. Rio Claro, SP: SBHM, 2000.
- FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido**. 32. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2002.

GARBI, G. G. **A Rainha das Ciências**: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNIO, J. R.; GIOVANNI JÚNIOR, J. R. **Matemática fundamental**. São Paulo: FTD, 1994.

LAROUSSE, A. **Dicionário da Língua Portuguesa**. São Paulo: Ática, 2001.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Rio de Janeiro: SBM, 2001. v. 3.

MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação Matemática**: uma Introdução. São Paulo: EDUC, 1999.

MARCONDES, C. A.; GENTIL, N.; GRECO, S. E. **Matemática**. São Paulo: Ática, 2003.

MARCONI, M. M.; LAKATOS, E. M. **Metodologia científica**. São Paulo: Atlas, 2004.

MENDES, I. A. **Ensino da matemática por atividades**: uma aliança entre o construtivismo e a história da matemática. 2001. 283 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2001.

MENEZES, L. C. de. **A matéria uma aventura do espírito**: fundamentos e fronteiras do conhecimento físico. São Paulo: Livraria da Física, 2005.

MILIES, P. C. A emergência dos números complexos. **Revista do professor de Matemática**, São Paulo, n. 24, p. 5-15, jul./dez. 1993.

OLIVEIRA, F. C. de. **Dificuldades no processo ensino aprendizagem de trigonometria por meio de atividades**. 2006. 74 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2006.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PAIVA, M. R. **Matemática 3**. São Paulo: Moderna, 1996.

POZO, J. I. et al. (Org.). **A solução de problemas**. Porto Alegre: ARTMED, 1998.

SILVA, J. D.; FERNANDES, V. **Matemática**. São Paulo: IBEP, 1991.

VARELA, M. O. S. **O espaço matemático**: estudo de sua elaboração conceptual no 1º Ciclo do Ensino Fundamental. 2000. 301 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2000.

WALDEGG, G. **Histoire, épistémologie et méthodologie dans la recherche en didactiques**. V. 17, nº 1. Vancouver, FLM Publishing Association, 1997.

YOUSSEF, A. N.; FERNANDEZ, V. P.; SOARES, E. **Matemática para o 2º Grau**. São Paulo: Scipione, 1998.

ZÖLD, H. H.; CÖRREA, S. **Tudo para o Vestibular: Matemática**. São Paulo: Nova Cultural, 1993.

DESENVOLVENDO atividades: utilizando a engenharia didática como processo.
Disponível em: <http://rogesantana.vilabol.uol.com.br/textos_1/desenativ.htm>. Acesso em: 10 jun. 2005.

WATANABE, R. **Uma introdução ao estudo dos números complexos**. Disponível em: <<http://ucsnews.ucs.br/lavia/pro/complex.html>>. Acesso em: 26 abr. 2005.

APÊNDICES

APÊNDICE A - Entrevista feita com os professores que trabalham com números complexos

ENTREVISTA

Caro colega,

O objetivo desta entrevista é obter algumas informações que possam me ajudar no trabalho de mestrado que venho desenvolvendo sobre o ensino de NÚMEROS COMPLEXOS e suas aplicações. Sua colaboração e sinceridade nas respostas, com certeza serão de grande importância e desde já agradeço.

1. Nome: (Opcional): _____

2. Local de trabalho: _____

3. Profissão: _____

4. Escolaridade: _____

5. Tempo de trabalho: _____

6. Você acha importante o conhecimento de números complexos? _____

Justifique a sua resposta.

7. Onde você acha que os números complexos têm aplicação prática?

8. Se você ensina Matemática, favor responder

a) Como você inicia suas aulas sobre o conteúdo dos números complexos?

b) Quais as dificuldades que você encontra para ensinar este conteúdo?

c) Quais as dificuldades dos alunos em aprender este conteúdo?

d) Você acha importante falar sobre a história dos números complexos em suas aulas?

e) Você acha que números complexos é um conteúdo atual para ser trabalhado nas escolas? Justifique a sua resposta.

Natal, maio de 2005

Nanci

APÊNDICE B - Questionamentos a respeito dos números complexos e suas aplicações



CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DO RIO GRANDE DO NORTE

DIRETORIA DE ENSINO - GERÊNCIA DE FORMAÇÃO EDUCACIONAL

DISCIPLINA: MATEMÁTICA - 2º ANO DO ENSINO MÉDIO - 3º BIMESTRE

PROFESSORA: Nanci Araújo - TURMA: _____ - DATA: ____/____/____

ALUNO: _____ - Matrícula: _____

QUESTIONAMENTOS A RESPEITO DOS NÚMEROS COMPLEXOS E SUAS APLICAÇÕES

ATIVIDADE 1

QUESTÃO 1

OBJETIVO: Verificar a reação dos alunos diante da tentativa de mudança da metodologia de ensino e conseguir informações dos participantes a respeito dos seus conhecimentos e de seus interesses relacionados ao assunto dos números complexos

- a) O que você entende por número?
- b) Você já ouviu falar em número complexo? Como você entende o que vem a ser números complexos?
- c) Onde você acha que são aplicados os números complexos?

**APÊNDICE C - Representação dos números complexos no plano cartesiano
e problema histórico**



CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DO RIO GRANDE DO NORTE

DIRETORIA DE ENSINO - GERÊNCIA DE FORMAÇÃO EDUCACIONAL

DISCIPLINA: MATEMÁTICA - 2º ANO DO ENSINO MÉDIO - 3º BIMESTRE

PROFESSORA: Nanci Araújo - TURMA: _____ - DATA: ____/____/____

ALUNOS: 1 _____ - Matrícula: _____

2 _____ - Matrícula: _____

3 _____ - Matrícula: _____

REPRESENTAÇÃO DOS NÚMEROS COMPLEXOS NO PLANO E PROBLEMA HISTÓRICO

ATIVIDADE 2

QUESTÃO 1

OBJETIVO: Verificar como os alunos farão para representar os números complexos no plano

Represente graficamente os números dados abaixo:

a) 1

d) $5\sqrt{-1}$

b) -3

e) $2 + \sqrt{-4}$

c) $\sqrt{4^{-1}}$

f) $(4;-1)$

QUESTÃO 2

OBJETIVO: Conseguir desenvolver o problema até chegar na raiz quadrada de um número negativo

Divida 10 em duas partes de modo que seu produto seja 40

APÊNDICE D - Evolução do conceito de números complexos**CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DO RIO GRANDE DO NORTE****DIRETORIA DE ENSINO - GERÊNCIA DE FORMAÇÃO EDUCACIONAL****DISCIPLINA: MATEMÁTICA - 2º ANO DO ENSINO MÉDIO - 3º BIMESTRE**

PROFESSORA: Nanci Araújo - TURMA: _____ - DATA: ____/____/____

ALUNOS: 1 _____ - Matrícula: _____

2 _____ - Matrícula: _____

3 _____ - Matrícula: _____

EVOLUÇÃO DO CONCEITO DE NÚMEROS COMPLEXOS**ATIVIDADE 3****QUESTÃO 1**

OBJETIVO: Entender que a formação de um conceito matemático pode demorar muito tempo a fim de ser bem compreendido e aceito

“Baseado na leitura da cronologia sobre a evolução do conceito dos números complexos, faça uma análise, dando sua opinião a respeito do que você entendeu”.

APÊNDICE E - Potências da unidade imaginária



CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DO RIO GRANDE DO NORTE

DIRETORIA DE ENSINO - GERÊNCIA DE FORMAÇÃO EDUCACIONAL

DISCIPLINA: MATEMÁTICA - 2º ANO DO ENSINO MÉDIO - 3º BIMESTRE

PROFESSORA: Nanci Araújo - TURMA: _____ - DATA: ____/____/____

ALUNOS: 1 _____ - Matrícula: _____

2 _____ - Matrícula: _____

3 _____ - Matrícula: _____

POTÊNCIAS DA UNIDADE IMAGINÁRIA

ATIVIDADE 4

QUESTÃO 1

OBJETIVO: Determinar o valor de qualquer potência de i e conseguir interpretar o conceito de quadrado mágico

Um quadrado mágico é um quadriculado com n^2 quadrados menores que contêm números de forma que a soma desses números em cada linha, em cada coluna e nas duas diagonais é a mesma.

Para responder às solicitações propostas, considere o número complexo $i = \sqrt{-1}$ e o quadrado abaixo:

i	i^2	i^3	i^4
i^5	i^6	i^7	i^8
i^9	i^{10}	i^{11}	i^{12}
i^{13}	i^{14}	i^{15}	i^{16}

a) Calcule: i^2 , i^3 , i^4 , ..., i^{16} .

b) Verifique se o quadrado acima é mágico.

c) Calcule a soma de todos os números.

APÊNDICE F - Operações com números complexos na forma algébrica



CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DO RIO GRANDE DO NORTE

DIRETORIA DE ENSINO - GERÊNCIA DE FORMAÇÃO EDUCACIONAL

DISCIPLINA: MATEMÁTICA - 2º ANO DO ENSINO MÉDIO - 3º BIMESTRE

PROFESSORA: Nanci Araújo - TURMA: _____ - DATA: ____/____/____

ALUNOS: 1 _____ - Matrícula: _____

2 _____ - Matrícula: _____

3 _____ - Matrícula: _____

OPERAÇÕES COM NÚMEROS COMPLEXOS NA FORMA ALGÉBRICA

ATIVIDADE 5

QUESTÃO 1

OBJETIVO: Trabalhar as operações básicas e adquirir habilidade para trabalhar seus pré-requisitos

Efetue:

a) $2\sqrt{-1} + 5\sqrt{-1}$

d) $(3 - 2\sqrt{-1}) \div (-2 + \sqrt{-1})$

b) $(1 + 3\sqrt{-1}) - (2 - 7\sqrt{-1})$

e) $(2 + 5\sqrt{-1})^3$

c) $(3 + 2\sqrt{-1}) \cdot (4 - 2\sqrt{-1})$

f) $\frac{(1+i)^{103}}{(1-i)^{100}}$

QUESTÃO 2

OBJETIVO: Distinguir conjugado de inverso, além de revisar as operações básicas

Resolva as questões abaixo:

a) Determine o inverso do número $Z = (2; 1)$

b) Dada a equação: $\frac{Z}{3+i} - \frac{Z-3}{i} = 0$, encontre o conjugado de Z

APÊNDICE G - Parte real e parte imaginária de um número complexo



CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DO RIO GRANDE DO NORTE

DIRETORIA DE ENSINO - GERÊNCIA DE FORMAÇÃO EDUCACIONAL

DISCIPLINA: MATEMÁTICA - 2º ANO DO ENSINO MÉDIO - 3º BIMESTRE

PROFESSORA: Nanci Araújo - TURMA: _____ - DATA: ____/____/____

ALUNOS: 1 _____ - Matrícula: _____

2 _____ - Matrícula: _____

3 _____ - Matrícula: _____

PARTE REAL E PARTE IMAGINÁRIA DE UM NÚMERO COMPLEXO

ATIVIDADE 6

QUESTÃO 1

OBJETIVO: Distinguir a parte imaginária de um número complexo na forma $a + bi$, além de revisar as operações básicas

Determine o real x para que o número complexo abaixo seja imaginário puro.

$$Z = (13i - 6) + (2x + i) \cdot (3 - 2xi).$$

QUESTÃO 2

OBJETIVO: Distinguir a parte real de um número complexo na forma $a + bi$, além de revisar as operações básicas

Sabendo que k é um número real e que a parte imaginária do número complexo

$$Z = (2 + i) \cdot (k + 2i)^{-1}$$

é zero. Calcule o valor de k .

APÊNDICE H - Módulo e argumento de um número complexo**CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DO RIO GRANDE DO NORTE****DIRETORIA DE ENSINO - GERÊNCIA DE FORMAÇÃO EDUCACIONAL****DISCIPLINA: MATEMÁTICA - 2º ANO DO ENSINO MÉDIO - 3º BIMESTRE**

PROFESSORA: Nanci Araújo - TURMA: _____ - DATA: ____/____/____

ALUNOS: 1 _____ - Matrícula: _____

2 _____ - Matrícula: _____

3 _____ - Matrícula: _____

MÓDULO E ARGUMENTO DE UM NÚMERO COMPLEXO**ATIVIDADE 7****QUESTÃO 1**

OBJETIVO: Trabalhar os conhecimentos do aluno previamente aprendidos como: as operações básicas, potências de i , forma algébrica e substituição dos elementos de Z na fórmula do módulo $\sqrt{a^2 + b^2}$

Calcular o valor de k de modo que o módulo do número complexo $Z = (1+i) \cdot (k+2i)$ seja igual a 4.

QUESTÃO 2

OBJETIVO: Trabalhar raciocínio do aluno, além dos conhecimentos aprendidos anteriormente como: conhecimento de trigonometria (ângulos notáveis, ciclo trigonométrico, noções de seno e cosseno), propriedades e simplificações de radicais, redução ao primeiro quadrante e módulo

Determine o argumento do número complexo $Z = \sqrt{6} - \sqrt{2}i$

APÊNDICE I - Problemas geométricos de números complexos do tipo aberto



CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DO RIO GRANDE DO NORTE

DIRETORIA DE ENSINO - GERÊNCIA DE FORMAÇÃO EDUCACIONAL

DISCIPLINA: MATEMÁTICA - 2º ANO DO ENSINO MÉDIO - 3º BIMESTRE

PROFESSORA: Nanci Araújo - TURMA: _____ - DATA: ____/____/____

ALUNOS: 1 _____ - Matrícula: _____

2 _____ - Matrícula: _____

3 _____ - Matrícula: _____

PROBLEMAS GEOMÉTRICOS DE NÚMEROS COMPLEXOS DO TIPO ABERTO

ATIVIDADE 8

QUESTÃO 1

OBJETIVO: Mostrar que a representação da soma de dois números complexos é um vetor, e que podemos encontrar sua solução através de mais de um caminho de resolução.

Efetuar geometricamente a adição dos números complexos: $Z_1 = 1 + 2i$ e $Z_2 = 4 + i$.

QUESTÃO 2

OBJETIVO: Trabalhar raciocínio geométrico do aluno e mostrar que existe alguns tipos de problemas que admite mais de uma solução

$ABCD$ é um quadrado. Se $A(1;2)$ e $B(2;5)$, determine as coordenadas de C e D .

APÊNDICE J - Potenciação e radiciação de números complexos



CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DO RIO GRANDE DO NORTE

DIRETORIA DE ENSINO - GERÊNCIA DE FORMAÇÃO EDUCACIONAL

DISCIPLINA: MATEMÁTICA - 2º ANO DO ENSINO MÉDIO - 3º BIMESTRE

PROFESSORA: Nanci Araújo - TURMA: _____ - DATA: ____/____/____

ALUNOS: 1 _____ - Matrícula: _____

2 _____ - Matrícula: _____

3 _____ - Matrícula: _____

POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS

ATIVIDADE 9

QUESTÃO 1

OBJETIVO: Trabalhar com a primeira fórmula de De Moivre

Dado o número complexo $Z = 1 + \sqrt{3}i$, calcule o valor de Z^9

$$\text{Dado: } Z^n = |Z|^n [\cos(nq) + i \cdot \text{sen}(nq)]$$

QUESTÃO 2

OBJETIVO: Trabalhar com a segunda fórmula de De Moivre

Determine as raízes cúbicas de 8 e interprete geometricamente .

$$\text{Dado: } w_k = \sqrt[n]{|Z|} \left(\cos \frac{q + 2kp}{n} + i \cdot \text{sen} \frac{q + 2kp}{n} \right)$$

APÊNDICE K - Avaliação proposta aos alunos sobre as atividades**CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DO RIO GRANDE DO NORTE****DIRETORIA DE ENSINO - GERÊNCIA DE FORMAÇÃO EDUCACIONAL****DISCIPLINA: MATEMÁTICA - 2º ANO DO ENSINO MÉDIO - 3º BIMESTRE**

PROFESSORA: Nanci Araújo - TURMA: _____ - DATA: ____/____/____

ALUNOS: _____ - Matrícula: _____

AVALIAÇÃO PROPOSTA AOS ALUNOS SOBRE AS ATIVIDADES**AVALIAÇÃO**

"Caro aluno, a presente avaliação tem por objetivo, colher algumas informações a respeito do processo ensino aprendizagem dos números complexos realizado através das atividades seqüenciadas. A sua sinceridade será de grande importância para o trabalho que estamos desenvolvendo. Desde já agradecemos sua colaboração. Caso aceite o roteiro, expresse sua opinião em relação à forma de apresentação do conteúdo, a organização, a quantidade de atividades, a qualidade das questões selecionadas, a aprendizagem, o tempo proposto e etc."

APÊNDICE L - Tabela 4: Cronologia da evolução dos números complexos

ANO	LUGAR	NOME	CONTRIBUIÇÕES
75 d.C. (século I)	Grécia	Herón	Aparece o primeiro registro de um radical com número negativo na Estereometria de Herón.
275 d.C. (século III)	Grécia	Diophanto	Aparecem Equações de terceiro grau com raiz quadrada de números negativos na Arithmética de Diophanto.
850 d.C. (século IX)	Índia	Mahavira	Afirma que: "... como na natureza das coisas um negativo não é um quadrado, ele não tem, portanto, raiz quadrada".
(século XII)	Índia	Bhaskara	Escreve que: "O quadrado de um afirmativo é afirmativo e a raiz quadrada de um afirmativo é dupla: positiva e negativa. Não há raiz quadrada de um negativo; pois ele não é um quadrado".
1484	França	Nicolas Chuquet	Faz observações sobre "soluções impossíveis" num manuscrito não publicado.
1494	Itália	Luca Paccioli	Escreve na sua summa de aritmética, geométrica, proportioni et proportionalista a equação $x^2 + c = bx$ e diz que é solúvel se $\frac{1}{4}b^2 \geq c$.
1545	Itália	Cardano	Propôs o problema: "Divida 10 em duas partes de modo que seu produto seja 40". Ele próprio deu o resultado: $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$ e escreveu no Ars Magna que essas expressões chamadas raízes sofisticadas são "tão sutis quanto inúteis".
1560	Itália	Raphael Bombelli	Teve a idéia de operar com expressões que envolviam raízes quadradas de números negativos.
1572	Itália	Raphael Bombelli	Publicou seu tratado de Álgebra em três volumes. Foi o primeiro a operar e criar regras para os números complexos. Considerou a equação $x^3 = 15x + 4$ e ao encontrar uma raiz dessa equação diz: "... A princípio, a coisa toda me pareceu mais baseada em sofismas que na verdade, mas eu procurei até que achei uma prova ..."
1629	França	Albert Girard	Introduziu o símbolo $\sqrt{-1}$.
1673	Inglaterra	John Wallis	Publicou um tratado: "Álgebra" que discute a impossibilidade da existência de quantidades imaginárias e compara essa questão com a da existência de quantidades negativas.
1702	Alemanha	Leibniz	Trabalhou com os números na forma $a + b\sqrt{-1}$, mesmo intrigado por achar que $\sqrt{-1}$ não tinha sentido, mas, sempre obtinha resultados corretos.
1714	Inglaterra	Roger Cotes	Obteve um importante resultado, relacionado com a obtenção de raízes n-ésimas da unidade, como: $\log_e(\cos q + i \cdot \sin q) = iq$. Isso poderia ter levado à "relação de Euler": $\cos q + i \cdot \sin q = e^{iq}$ que, implica a "fórmula De Moivre": $(\cos q + i \cdot \sin q)^n = \cos nq + i \cdot \sin nq$, o que resolveria o problema de achar raízes.
1722	França	Abraham de Moivre	Utilizando fatos que já havia publicado em 1707, ele obteve um resultado que implicou a fórmula que leva seu nome embora tenha se limitado a casos particulares e nunca tenha enunciado ou demonstrado a fórmula geral.

1730	França	Abraham de Moivre	Desenvolveu a fórmula: $(\cos q + i \cdot \operatorname{sen} q)^n = \cos nq + i \cdot \operatorname{sen} nq$, que relaciona as funções trigonométricas com os números complexos.
1740	Suíça	Leonhard Euler	Ele afirma que $y = 2 \cdot \cos q$ e $y = e^{ix} + e^{-ix}$ são soluções da mesma equação diferencial, portanto, deviam ser iguais.
1747	França	Jean Le R. d'Alembert	Publicou "Refléxions sur la cause générale des vents", em que afirmou que toda expressão construída algebricamente a partir de um número complexo é da forma $a + b\sqrt{-1}$.
1748	Suíça	Leonhard Euler	Usou o símbolo i pela primeira vez para representar $\sqrt{-1}$, identificou o número complexo $(a, 0)$ com o número real a e redescobriu o resultado de Cotes, demonstrando a fórmula De Moivre e estendendo sua validade para todo expoente n real.
1799	Noruega	Caspar Wessel	Dá interpretações para os números complexos na forma $a + bi$ e formula uma representação geométrica para as operações com números complexos.
1806	Suíça	Jean-Robert Argand	Também dá interpretações para os números da forma $a + bi$ e para as operações com complexos, aplicando seus resultados à demonstração de teoremas de álgebra, geometria e trigonometria.
1815	Alemanha	Carl Friederich Gauss	Teve a brilhante idéia de substituir $a + b\sqrt{-1}$ por um par ordenado de números reais (a, b) , possibilitando, a partir daí, a visualização no plano cartesiano dos números "sofísticos", "sem sentido" ou "imaginários" e assim tornou a interpretação geométrica dos números complexos amplamente aceita.
1821	França	Agustin Cauchy	Introduziu os termos "conjugado" e "módulo".
1822	Alemanha	Carl Friederich Gauss	Introduziu o nome "número complexo".
1833	Irlanda	William Rowan Hamilton	Desenvolveu a formalização completa dos números complexos como pares ordenados e de números reais.
1841	Alemanha	Weierstrass	Introduziu a notação $ Z $ para módulo de números complexos.
1847	França	Agustin Cauchy	Deu um outro tipo de formalização aos números complexos.

APÊNDICE M - Lista de exercícios sobre números complexos



CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DO RIO GRANDE DO NORTE

DIRETORIA DE ENSINO - GERÊNCIA DE FORMAÇÃO EDUCACIONAL

DISCIPLINA: MATEMÁTICA - 2º ANO DO ENSINO MÉDIO - 3º BIMESTRE

PROFESSORA: Nanci Araújo - TURMA: _____ - DATA: ____/____/____

LISTA DE EXERCÍCIOS SOBRE NÚMEROS COMPLEXOS

1) Resolva as equações em $\mathbb{C}$

a) $x^2 + 25 = 0$ b) $x^2 + 2x + 2 = 0$ c) $x^2 - 2x + 2 = 0$ d) $2x^2 - 6x + 7 = 0$

2) Obtenha x e y para que o número complexo $Z = (x + 6) - (y^2 - 16)i$ seja:

a) um número real b) um número imaginário

3) Determine os números reais m e n tais que $(n + m) + (m - n)i = 4 + 2i$

4) Determine o valor de:

a) i^{81} b) i^{1533} c) $(-i)^{16}$ d) $3i^{15} - i^{24}$
 e) $16i^5 + 5i^{10} - (3i)^3$ f) $(1 - 2i)^5$

5) Dados dois números complexos $Z_1 = 2 + 3i$ e $Z_2 = 1 - 5i$, determine o que se pede:

a) $Z_1 + Z_2$ b) $Z_2 - Z_1$ c) $Z_1 + \overline{Z_2}$ d) $\overline{Z_2} - \overline{Z_1}$
 e) $Z_1 - \overline{Z_2} + \overline{Z_1}$ f) $\overline{Z_2} + Z_1^2 - 3i$

6) Dados dois números complexos $Z_1 = 3 - 5i$ e $Z_2 = -2 + 4i$, determine o que se pede:

a) $Z_1 \cdot Z_2$ b) $Z_2 \cdot \overline{Z_1}$ c) $\overline{Z_2} \cdot Z_1$ d) $\overline{Z_1} \cdot Z_2^2$
 e) $(Z_1 + Z_2) \cdot \overline{Z_1}$ f) $(\overline{Z_1} - Z_2) \cdot Z_2$

7) Dados dois números complexos $Z_1 = 3 - 5i$ e $Z_2 = 1 - 5i$, determine o que se pede:

a) $\frac{Z_1}{Z_2}$ b) $\frac{Z_2}{Z_1}$ c) $\frac{1}{Z_1}$ d) $\frac{Z_1 \cdot \overline{Z_1}}{Z_2}$
 e) $\frac{\overline{Z_2} \cdot Z_1}{Z_1}$ f) $\frac{\overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2}}{Z_1}$

8) Dado: $Z = 78p - 18i + 48qi - 208$, ache os valores reais de p e q de modo que $Z = 0$

9) Determine o real x para que $Z = (13i - 6) + (2x + i) \cdot (3 - 2xi)$ seja:

a) Imaginário puro

b) Real

10) Determine o real x , para que:

a) $Z = \frac{(x+4)+ix}{(x+4)-i}$ seja um número real b) $Z = \frac{(2x+3)-ix}{1+ix}$ seja imaginário puro

11) Sendo $Z = 1 - i$, calcule o valor de $Z^3 + Z^2 + Z$

12) Calcule o valor de $i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{100} + i^{101}$

13) Efetue: $\frac{(1+i)^{103}}{(1-i)^{100}}$

14) Represente o número complexo $Z = (2-i) \cdot (2i-3)$ no plano de Argand-Gauss

15) Obter a forma trigonométrica dos números complexos:

a) $Z = (2, -2)$

b) $Z = -\sqrt{6} + \sqrt{2}i$

c) $Z = -4i$

d) $Z = 2\sqrt{2} + i$

16) Determine p para que o módulo do número complexo $Z = (p+2i) \cdot (1+i)$ seja igual a 4.

17) Obtenha o número complexo Z de modo que:

a) $Z(2-i) - 4 + 5i = 6 - 2i$

b) $2Z + 3\bar{Z} = 4 - i$

c) $\frac{z}{1-i} + \frac{z+2}{1+i} = \frac{3}{2} + \frac{7}{2}i$

18) Encontre a forma algébrica dos números abaixo:

a) $Z = \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{7p}{4} + i \cdot \sin \frac{7p}{4} \right)$

b) $Z = 4 \left(\cos \frac{35p}{6} + i \cdot \sin \frac{35p}{6} \right)$

19) Calcule as potências:

a) $(1-i)^{12}$

b) $(1+\sqrt{3})^5$

c) $(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^6$

d) $\left(\frac{-1-i}{i} \right)^{10}$

20) Dados os números complexos $Z = 6 \cdot \left(\cos \frac{5p}{6} + i \cdot \sin \frac{5p}{6} \right)$ e $W = 3 \cdot \left(\cos \frac{p}{4} + i \cdot \sin \frac{p}{4} \right)$,

calcule:

a) $Z \cdot W$

b) Z^2

c) W^3

d) $\sqrt{W}$

e) $\sqrt[3]{Z}$

f) $\frac{Z}{W}$

g) $\frac{W}{Z}$

ANEXOS

ANEXO A - Operações com números complexos na forma trigonométrica⁸

a) Multiplicação e Divisão

As operações de Multiplicação e Divisão podem ser representadas através de interpretações geométricas simples utilizando-se a forma trigonométrica

$$Z = a + bi = r \cos q + ir \operatorname{sen} q = r(\cos q + i \operatorname{sen} q)$$

Consideremos dois números Complexos não-nulos Z_1 e Z_2 , representados na forma trigonométrica $Z_1 = |Z_1|(\cos q_1 + i \operatorname{sen} q_1)$ e $Z_2 = |Z_2|(\cos q_2 + i \operatorname{sen} q_2)$, onde q_1 e q_2 são os ângulos de inclinação dos vetores que representam os complexos Z_1 e Z_2 .

Multiplicando tem-se: $Z_1 \cdot Z_2 = |Z_1| \cdot |Z_2|(\cos q_1 + i \operatorname{sen} q_1)(\cos q_2 + i \operatorname{sen} q_2)$

Por conseguinte: $Z_1 \cdot Z_2 = |Z_1| \cdot |Z_2|[\cos(q_1 + q_2) + i \operatorname{sen}(q_1 + q_2)]$

Considerando os complexos não-nulos Z_1 e Z_2 , acima e dividindo $\frac{Z_1}{Z_2}$ tem-se:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{|Z_1| \cos q_1 + i \operatorname{sen} q_1}{|Z_2| \cos q_2 + i \operatorname{sen} q_2} = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} \frac{(\cos q_1 + i \operatorname{sen} q_1)(\cos q_2 - i \operatorname{sen} q_2)}{\cos^2 q_2 + \operatorname{sen}^2 q_2}$$

Por conseguinte: $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} [\cos(q_1 - q_2) + i \operatorname{sen}(q_1 - q_2)]$

b) Potenciação - Primeira fórmula de De Moivre

A potência Z^n , $n \in \mathbb{N}^*$, é dada por $Z^n = \underbrace{Z \cdot Z \cdot \dots \cdot Z}_{n \text{ fatores}}$. Assim, se um número

complexo Z está escrito na forma trigonométrica $Z = |Z|(\cos q + i \operatorname{sen} q)$,

$$\Rightarrow Z^n = \underbrace{Z \cdot Z \cdot \dots \cdot Z}_{\text{multiplicação de } n \text{ fatores}} = \underbrace{|Z| \cdot |Z| \cdot \dots \cdot |Z|}_{\text{produto de } n \text{ módulos}} \cdot \left[\underbrace{\cos(q + q + \dots + q)}_{\text{soma de } n \text{ argumentos}} + i \cdot \underbrace{\operatorname{sen}(q + q + \dots + q)}_{\text{soma de } n \text{ argumentos}} \right]$$

$$\Rightarrow Z^n = |Z|^n [\cos(nq) + i \operatorname{sen}(nq)] \quad (\text{primeira fórmula de De Moivre})$$

Para $n = 0$, temos: $Z^0 = |Z|^0 [\cos(0 \cdot q) + i \operatorname{sen}(0 \cdot q)] = 1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = 1(1 + 0) = 1$

⁸ Compilado do livro de DANTE, L. R. MATEMÁTICA. Série Novo Ensino Médio, 2005, p. 392 a 394.

Assim, podemos dizer que a potência de ordem n de um número complexo escrito na forma trigonométrica é o número complexo cujo módulo é igual ao módulo do número elevado a n e cujo argumento é igual ao argumento do número multiplicado por n , reduzido à primeira volta ($0 \leq \arg(Z^n) < 2p$).

O teorema de De Moivre afirma que, para q e n arbitrários, n inteiro, temos:

$$\begin{aligned}(\cos q \pm i \cdot \operatorname{sen} q)^n &= \cos nq \pm i \cdot \operatorname{sen} nq, \\(\cos q \pm i \cdot \operatorname{sen} q)^{-n} &= \cos(-nq) \pm i \cdot \operatorname{sen}(-nq)\end{aligned}$$

c) Radiciação - Segunda fórmula de De Moivre

Dado um número complexo Z e um número natural n , $n > 1$, definimos em C : Raiz enésima de Z é um número complexo w tal que $w^n = Z$.

Consideremos o número complexo $Z \neq 0$ tal que $Z = |Z|(\cos q + i \cdot \operatorname{sen} q)$. Encontrar as raízes enésimas de Z significa determinar todos os números complexos distintos do tipo $w = |w|(\cos a + i \cdot \operatorname{sen} a)$, de modo que $w^n = Z$, para $n > 1$, ou seja, procurar números w tal que $[|w|(\cos a + i \cdot \operatorname{sen} a)]^n = |Z|(\cos q + i \cdot \operatorname{sen} q)$.

Assim, concluímos que: $w_k = \sqrt[n]{|Z|} \left(\cos \frac{q + 2kp}{n} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{q + 2kp}{n} \right)$, (segunda fórmula de De Moivre) para $k = 0, 1, 2, 3, \dots, (n-1)$.

Após $k = n-1$, os valores começam a se repetir. Então, de 0 a $n-1$, temos n raízes distintas.

Observemos que essa fórmula também pode ser escrita assim:

$$w_k = \sqrt[n]{|Z|} \left[\cos \left(\frac{q}{n} + k \cdot \frac{2p}{n} \right) + i \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{q}{n} + k \cdot \frac{2p}{n} \right) \right]$$

Assim, qualquer número complexo $Z \neq 0$, admite n raízes enésimas distintas. Todas elas têm módulo igual a $\sqrt[n]{|Z|}$ e seus argumentos formam uma progressão aritmética de primeiro termo $\frac{q}{n}$ e razão $\frac{2p}{n}$.