UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA

ROBSON DE OLIVEIRA SANTOS

O USO PEDAGÓGICO DE UMA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA PARA A AQUISIÇÃO DE ALGUMAS IDÉIAS RELACIONADAS AO CONCEITO DE NÚMEROS COMPLEXOS

NATAL - RN
2008

ROBSON DE OLIVEIRA SANTOS

O USO PEDAGÓGICO DE UMA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA PARA A AQUISIÇÃO DE ALGUMAS IDÉIAS RELACIONADAS AO CONCEITO DE NÚMEROS COMPLEXOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Naturais e Matemática sob a orientação do Professor Dr. John Andrew Fossa.

NATAL - RN
2008

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE

CENTRO DE CIENCIAS EXATAS E DA TERRA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA

O USO PEDAGÓGICO DE UMA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA PARA A AQUISIÇÃO DE ALGUMAS IDÉIAS RELACIONADAS AO CONCEITO DE NÚMEROS COMPLEXOS

Dissertação apresentada pelo aluno Robson de Oliveira Santos à Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN em __/__/2008

Prof. Dr. John Andrew Fossa - Orientador
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Profª. Drª. Rogéria Gaudêncio do Rêgo - Examinadora Interna
Universidade Federal da Paraíba

Profª. Drª. Josinalva Estácio Menezes – Examinadora Externa
Universidade Federal Rural de Pernambuco

NATAL/RN
FEVEREIRO DE 2008

DEDICATÒRIA

Dedico este trabalho a minha mãe Renira de Oliveira Santos pela maneira como conduziu minha formação, pelo empenho que teve na minha educação e por todos os momentos em que, mesmo em silêncio, me deu forças e sempre acreditou na concretização desse sonho realizado.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter iluminado todos os momentos dessa trajetória.

Aos meus pais, alicerces fundamentais de todos os sucessos alcançados.

Aos meus amigos mais próximos, pessoas especiais que sempre estiveram presentes nos momentos de vitórias e angústias, fontes de grandes incentivos que foram fundamentais para a minha tranqüilidade nos momentos difíceis desse trabalho.

Aos alunos das escolas Ulisses de Góis, Winston Churchil e Nestor Lima - extensivos aos diretores, professores e equipe técnica - que gentilmente nos receberam e cujas colaborações foram de suma importância para a realização deste trabalho.

RESUMO

O presente estudo visa apresentar uma contribuição para o processo de ensino-aprendizagem em matemática através de uma alternativa que se propõe a trazer uma nova motivação ao aluno para que este adquira as primeiras idéias relacionadas ao conceito de números complexos percebendo que estes não são destituídos de sentido. Para tanto, o estudo tem como objetivo geral a construção de uma seqüência didática contendo atividades estruturadas, visando a formação dessas idéias importantes para aquisição do conceito pelo aluno. O estudo baseia-se inicialmente em um resgate dos principais aspectos históricos que deram origem à construção desses números. Diante desses aspectos, buscamos nos fundamentar em Richard Skemp na elaboração de uma seqüência de atividades estruturadas onde incorporaremos a história da matemática e tendo como ponto de partida a resolução de equações quadráticas, entendendo que, dessa forma, estaríamos tornando a aprendizagem mais acessível, uma vez que esse conceito permeia as séries anteriores e, consequentemente, os alunos deveriam estar mais familiarizados a ele. A intervenção metodológica iniciou-se com a aplicação dessa seqüência de atividades com alunos de terceiros anos do ensino médio de escolas públicas que ainda não conheciam o conceito de números complexos e foi realizada em três etapas que denominamos: estudo piloto I, estudo piloto II e estudo definitivo, cada uma delas em uma instituição diferente; as turmas foram divididas aleatoriamente em grupos onde cada grupo escreveria as idéias que haviam desenvolvido acerca dos números complexos. Isso precedeu o uso de um outro instrumento de análise que se trata de uma entrevista gravada do tipo semi-estruturada com o objetivo de apurar os caminhos traçados pelos alunos durante a resolução das atividades desenvolvidas. As idéias adquiridas foram categorizadas por similaridades e, em seguida, analisadas. Os resultados das análises nos mostram que as idéias formadas foram pertinentes, se completam entre si e fomentam a discussão de que o uso de atividades estruturadas com esse fim é uma alternativa eficiente e possível de ser aplicada, mesmo em realidades escolares mais desfavorecidas.

PALAVRAS-CHAVE: Números Complexos. História da Matemática. Atividades Estruturadas. Aquisição de Idéias. Ensino-Aprendizagem

ABSTRACT

The aim of the present work is to contribute to the teaching-learning process in Mathematics through an alternative which tries to motivate the student so that he/she will learn the basic concepts of Complex Numbers and realize that they are not pointless. Therefore, this work's general objective is to construct a didactic sequence which contains structured activities that intends to build up, in each student's thought, the concept of Complex Numbers. The didactic sequence is initially based on a review of the main historical aspects which begot the construction of those numbers. Based on these aspects, and the theories of Richard Skemp, was elaborated a sequence of structured activities linked with Maths' history, having the solution of quadratic equations as a main starting point. This should make learning more accessible, because this concept permeates the students' previous work and, thus, they should be more familiar with it. The methodological intervention began with the application of that sequence of activities with grade students in public schools who did not yet know the concept of Complex Numbers. It was performed in three phases: a draft study, a draft study II and the final study. Each phase was applied in a different institution, where the classes were randomly divided into groups and each group would discuss and write down the concepts they had developed about Complex Numbers. We also use of another instrument of analysis which consisted of a recorded interview of a semi-structured type, trying to find out the ways the students thought in order to construct their own concepts, i.e. the solutions of the previous activity. Their ideas about Complex Numbers were categorized according to their similarities and then analyzed. The results of the analysis show that the concepts constructed by the students were pertinent and that they complemented each other this supports the conclusion that the use of structured activities is an efficient alternative for the teaching of mathematics.

KEY WORDS: Complex Numbers. History of Mathematics. Structured Activities. Concept Formation. Teaching-learning.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Este trabalho propõe a elaboração e aplicação de um instrumento de ensino que busca facilitar o processo de ensino-aprendizagem em relação ao conteúdo programático dos números complexos a ser estudados por alunos dos terceiros anos do ensino médio.

Inicialmente procuramos fazer uma análise dos aspectos históricos que influíram no advento dos números complexos, realçando o contexto e os principais motivos que implicaram na necessidade da invenção desses números.

Com base nessa análise, propusemos-nos a fazer uma transposição didática dos principais elementos e fatos históricos que deram origem a esses números para que, a partir desse embasamento, pudéssemos construir uma sucessão de atividades estruturadas que se configurassem uma seqüência didática contendo atividades que se propusessem a motivar o aluno a interagir com a seqüência e assim adquirir algumas idéias coerentes relacionadas ao conceito de números complexos.

Trabalhos anteriores a este já sinalizam que esse tema inspirou algumas tentativas bem pertinentes na busca de algumas alternativas para facilitar o processo de ensino-aprendizagem abordando esse assunto. Dentre alguns deles citaremos, por exemplo, a dissertação da professora Nanci Barbosa, cujo título é *Uma tentativa de Mudança Metodológica para uma Aprendizagem Significativa no Ensino Médio* (UFRN-2006), que busca uma forma alternativa de ensino-aprendizagem para o assunto de números complexos, ou seja, tal como em nosso trabalho, busca elaborar uma seqüência de atividades com diversas situações para que o aluno entre em contato com os números complexos dentro de uma perspectiva mais construtivista. Entretanto, o trabalho mencionado tem um teor diferente do nosso no sentido de não se destinar a inserir atividades estruturadas em sua seqüência; e sua abordagem não parte da resolução de equações quadráticas tal como se destina nossa proposta.

Ainda nessa linha de investigação, temos a professora Sueli Fonseca com sua dissertação *Uma Análise dos Questionamentos dos Alunos nas Aulas de Números Complexos* (UFRN-2006). O estudo busca trazer à tona uma discussão sobre os principais questionamentos dos alunos nas aulas de números complexos, que são classificadas em três categorias de porquês apontadas por Phillip S. Jones. Esse trabalho se propõe a analisar esses questionamentos, discutir quais os possíveis encaminhamentos que o professor poderá dar a essas questões e confrontá-las com as categorias lá mencionadas, e ainda apresentar os recursos de apoio ao professor no que se refere à história da matemática.

Para o presente trabalho, as inspirações iniciais surgiram enquanto líamos a dissertação intitulada ***Números Complexos****: Uma abordagem histórica para a aquisição do conceito* (1998) de Mário Servelli Rosa, cujo trabalho foi defendido pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP sob a orientação do professor doutor Saddo Ag Almouloud.

Nele temos uma abordagem histórica dos principais fatos que deram origem à criação dos números complexos e que objetiva obter subsídios para a criação de uma seqüência didática que se propõe a colocar alunos do ensino médio em contato com os números complexos da maneira como eles surgiram na história, ou seja, através de equações cúbicas.

Já a nossa perspectiva tem por finalidade propor atividades para que os alunos do ensino médio construam de forma significativa idéias pertinentes relacionadas ao conceito de números complexos, podendo, dessa forma, operarem com eles. Para tanto, propomos essa aquisição através da resolução de equações quadráticas, pois observamos no último trabalho mencionado – apesar dos bons resultados – que mesmo com bastante preocupação em facilitar os cálculos para o aluno, esses estudantes de ensino médio ainda não possuíam a destreza e maturidade matemática para lidar com a quantidade de cálculos e transformações que é exigida em um trabalho como esse. Dessa forma, acreditamos que tal fato pode desencadear em muitos o desinteresse em continuar a resolução da seqüência ou, muitas vezes, acaba por desviar-lhes a atenção do foco principal do trabalho, que é a aquisição de idéias relacionadas ao conceito de números complexos.

No entanto, o trabalho mencionado obteve êxitos. Dentre os principais, podemos destacar que os alunos participantes da pesquisa:

- Tiveram oportunidade de descobrir qual foi o motivo que levou os matemáticos a extraírem as raízes quadradas de um número negativo, percebendo que os conceitos matemáticos não são simplesmente inventados, mas surgem quando da resolução de problemas.

- Chegaram a soluções reais de equações, operando com raízes quadradas de números negativos. Com isso, puderam tomar conhecimento de que apesar de um número complexo não representar uma quantidade, operando-se com eles chega-se a resultados que são números reais.

No presente trabalho, buscaremos subsidiar o aluno para que esse possa adquirir algumas idéias pertinentes relacionadas ao conceito de números complexos mostrando, simultaneamente, ao lado de cada atividade, alguns aspectos históricos que contribuíram para a formação desse conceito.

Para tal construção, buscamos nos fundamentar nos princípios defendidos por Richard Skemp (1980) na sua formação do conceito e atividades estruturadas.

No Capítulo I, que denominamos Introdução, trataremos da problemática, justificativa, objetivos, metodologia, pressupostos e limitações da pesquisa, buscando desenvolver algumas estratégias com o objetivo de minimizar alguns problemas comuns encontrados em uma aula tradicional sobre números complexos. Buscaremos mostrar ao leitor a importância de um trabalho dessa natureza para o processo de ensino-aprendizagem, ao mesmo tempo em que sugeriremos mais uma alternativa de trabalho para professores e alunos de matemática que comumente se defrontam com realidades de trabalho ainda bem difíceis, contando, muitas vezes, com escassez de recursos.

Nosso instrumento segue uma vertente construtivista muito presente nos trabalhos do professor Iran Abreu Mendes e também inspirada na tese de doutorado de professor Francisco Peregrino Neto. Por isso achamos por bem iniciarmos o capítulo II deste trabalho dissertando sobre o construtivismo e a inserção de atividades seguindo essa linha de trabalho, como também a incorporação da história da matemática nessas atividades.

Como não poderia deixar de ser, também buscaremos deixar o leitor a par dos principais aspectos históricos que deram origem aos números complexos. Para tanto, estendemos a esse capítulo a inserção de um breve histórico do processo de criação desses números. Ao final do capítulo, descreveremos o método usado onde citaremos os pressupostos e limitações da pesquisa.

No capítulo III, procuraremos mostrar o contexto, o ambiente e a descrição dos principais elementos concernentes à realização da pesquisa em sala de aula. Buscaremos também fazer uma análise qualitativa dos resultados da pesquisa, bem como dos instrumentos que usamos para validá-la.

No capítulo IV, faremos uma retomada dos pressupostos e objetivos do trabalho e comentaremos acerca das contribuições das atividades estruturadas na aquisição do conceito. Também faremos algumas considerações acerca dos resultados obtidos da aplicação desse trabalho, entendendo-o como uma forma bastante razoável de se adquirir algumas idéias importantes relacionadas a um conceito matemático.

Dessa forma, acreditamos estar contribuindo por uma construção eficaz do conhecimento pelo aluno, uma vez que a apresentação desse novo número não estará destituída de significado como geralmente o é em algumas realidades tradicionais, até porque o que aqui se espera é que o próprio aluno seja agente ativo na aquisição das idéias relacionadas ao conceito.

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Neste capítulo abordaremos na problemática as causas e motivações que nos impulsionaram a trabalhar com essa temática e com essa linha de investigação. Na justificativa comentaremos um pouco da importância de um trabalho dessa natureza para o processo de ensino-aprendizagem. Em seguida mencionaremos os objetivos traçados para esse trabalho que também chamaremos de estudo. Na metodologia daremos um panorama geral de como se realizou o estudo: suas fases, os instrumentos e os procedimentos utilizados. Finalizando a seção listaremos os principais pressupostos e limitações do estudo.

1 PROBLEMÁTICA

Existem diversas formas de inserir o assunto de números complexos em um contexto de ensino médio. Uma delas é iniciar essa idéia a partir da resolução de equações cúbicas buscando fazer um paralelo com o percurso histórico. Outra maneira seria defini-los como pares ordenados do tipo (a, b). Ainda podemos ter, mais comumente encontradas nos livros didáticos, uma estratégia partindo do princípio de encontrar as raízes quadradas de um número negativo usando, para isso, a resolução de equações quadráticas e ainda diversas outras formas acerca das quais não nos estenderemos, pois não se configura o objeto principal dessa discussão inicial.

Este trabalho não tem como mérito criticar ou indicar a melhor e a maneira mais adequada de se inserir esse assunto, uma vez que todas têm seus objetivos, méritos, vantagens e desvantagens, não nos cabendo aqui tal atividade. No entanto, temos observado em nossas atuações, enquanto professores de matemática que, independente da maneira como o referido conteúdo é inserido nas escolas, é comum encontrarmos alunos sem alguma noção clara do que é um número complexo, bem como sua utilidade no sentido de servir, por exemplo, para achar soluções reais de uma infinidade de problemas.

Ao longo de nossa atuação enquanto professores, também detectamos que grande parte dos alunos estuda esse conteúdo simplesmente porque faz parte do currículo do ensino médio, mas não têm motivação para estudá-lo, uma vez que absorvem o assunto da maneira como lhes é apresentado, isto é, destituído de significação ou apenas como um conjunto de regras que se aplicam para se chegar a uma resposta. Tal fato pode se configurar para o aluno como um dos motivos a tornar o processo de ensino-aprendizagem dos números complexo uma tarefa mecânica, e por vezes, sem sentido.

Rosa (1998), em sua dissertação de mestrado, aborda esse assunto através de sua história tal como nós, mas um de seus objetivos, diferentemente do nosso, é inserir o conteúdo partindo da resolução de equações cúbicas. Outro diferencial de seu trabalho é que não há em sua seqüência espaços para que o aluno tenha uma leitura direta e, concomitante, da historia da matemática. As atividades são elaboradas buscando seguir a cronologia histórica segundo o entendimento obtido das leituras do autor.

Já o presente trabalho procura dar ênfase à apresentação desse conteúdo partindo da resolução de equações quadráticas, trabalhando os tópicos da história da matemática importantes para esse processo de aquisição juntamente com o aluno e concomitantemente com as atividades, buscando dar uma motivação e um sentido a esses números.

2 JUSTIFICATIVA

Atualmente temos frequentemente observado em livros, revistas e artigos uma crescente preocupação dos autores em abordar as questões e conceitos científicos por uma ótica mais humanística, enfatizando os aspectos históricos. Um grande exemplo é o do *Harvard Project Physics*, no qual justamente em razão da preocupação e do envolvimento de um de seus autores principais, Gerald Holton, com a história da Ciência e da Filosofia, as questões científicas são abordadas com ênfase especial no caráter histórico, pois o autor concebe essa abordagem como tendo um papel mais esclarecedor.

Durante algumas gerações temos aprendido os conceitos científicos através da utilização de textos, livros e manuais ainda bem tradicionais que mostram os conceitos matemáticos como se surgissem do nada, e privilegiando mais a quantidade de conteúdos. Isso, muitas vezes, pressionado pela necessidade do vestibular. Esses textos, tecnicamente corretos; porém, sob o ponto de vista humanístico, extremamente pobres, já formaram várias gerações de profissionais. Porém, algo de muito precioso se perdeu nesse processo de aprendizagem: o sentido do tempo histórico.

Ponczek, (2002) no livro *Origens e Evoluções das Idéias da Física* afirma:

> [...] continuam escondendo dos estudantes das áreas científicas o humanismo necessário para a construção de uma sociedade mais justa e menos tecnocrática [...], portanto não nos é revelado como é penoso, lento, sinuoso e, por vezes, violento o processo de evolução das idéias científicas. (PONCZEK, 2002 p.22)

Nesse sentido, pretendemos, nesse trabalho, fazer com que o aluno do ensino médio entre em contato com algumas idéias relacionadas ao conceito de número complexo através de uma série de atividades elaboradas com base na história e cuja maneira de apresentação desse conteúdo se realize a partir da análise e resolução de equações quadráticas. Entendemos que, dessa forma, estaremos tornando essa aprendizagem mais acessível, uma vez que este conteúdo (equações quadráticas) permeia praticamente todo o ensino médio, o que pressupõe que o aluno já esteja mais familiarizado a esse conteúdo que exige operações algébricas relativamente simples, se comparadas às equações cúbicas. Isso, ao nosso entendimento, parece estar em maior consonância com as realidades de ensino-aprendizagem verificadas na maior parte da rede pública de ensino das regiões de nosso estado.

Em trabalhos recentes, podemos destacar inclusive a dissertação mencionada anteriormente; Rosa (1998), em que alguns autores vêem com reprovação a inserção desse conteúdo matemático através de equações quadráticas por defenderem que distorcem os reais fatos da cronologia histórica, uma vez que o advento dos números complexos teria surgido da necessidade de se encontrar as raízes de uma equação cúbica.

No entanto, a história (*ARS MAGNA,1545)* também nos revela que outros indícios também suscitaram curiosidades e investiduras sobre raízes de números negativos em Gerônimo Cardano (1501-1576) e posteriormente outros matemáticos; foram alguns problemas cuja resolução desencadeava em uma equação do tipo quadrática como, por exemplo, um problema similar à questão (c) da atividade 00 (ver apêndice **A**).

Dessa forma, observamos que não seria nenhum absurdo abordar o assunto segundo essa ótica, uma vez que não comprometeria o fator mais importante, no caso, a aquisição de idéias pertinentes relacionadas ao conceito pelo aluno, independentemente das formas metodológicas usadas para alcançá-la.

Sob esse ponto de vista, objetivamos a atuação desse aluno como agente de sua própria aprendizagem para aquisição dessas idéias para que esse assunto não fique destituído de significação e utilidade como frequentemente ocorre quando aprendidos de forma tradicional. Já a inserção da história vem corroborar qualitativamente no momento em que acreditamos que para um bom aprendizado de uma disciplina, conceito ou objeto de estudo, é interessante apresentar ao lado dos aspectos fundamentais, alguns dados históricos que influíram no surgimento dos conceitos e idéias nele contido.

3 OBJETIVOS

O objetivo geral de nosso trabalho é:

- Analisar uma seqüência didática para apresentar algumas idéias relacionadas ao conceito de números complexos, objetivando levar o aluno a formar gradativamente essas idéias na medida em que interage com as atividades propostas.

A partir desse objetivo geral apresentamos os seguintes objetivos específicos:

- Provocar nos alunos a curiosidade e necessidade de extrair raízes quadradas de números negativos.

- Proporcionar uma nova motivação aos alunos, baseando-os na história, para que compreendam a necessidade e a utilização dos números complexos, fazendo-os perceber que, em operando com eles, pode-se chegar a soluções reais de diversos problemas.

- Avaliar a seqüência didática elaborada numa turma de 3º ano do ensino médio da rede pública de ensino.

4 METODOLOGIA

Como já foi mencionado, o que objetivamos com o trabalho é que o aluno do ensino médio entre em contato com o conceito de número complexo entendendo que este possui significado e que com ele poderemos chegar a resultados reais de diversos problemas, constatando que conceitos matemáticos não surgem do nada como num passe de mágica.

Descrevemos a seguir os percursos metodológicos usados para alcançar tais metas. Para melhor situar o leitor, vamos dividir esta seção em três tópicos: etapas da pesquisa, descrição dos instrumentos utilizados e descrição dos procedimentos, desde a coleta à análise dos dados.

4.1 As Três Etapas da Pesquisa

Este trabalho foi realizado com alunos de escolas públicas, concluintes do ensino médio que ainda não tinham tido contato com os números complexos pois, como já comentamos anteriormente, o que objetivamos é a aquisição pelo aluno de algumas idéias pertinentes relacionadas a esse conceito, o que não teria sentido caso esse estudante já tivesse dele se apropriado.

A realização dessa experimentação se deu em três escolas distintas, isto é, repetimos a pesquisa, em períodos distintos, com três turmas diferentes.

Nossa intenção inicial seria de realizar o estudo usando apenas duas turmas: a primeira seria uma espécie de piloto, em que iríamos testar o nosso instrumento (o qual comentaremos mais adiante), fazendo, logo após, os devidos ajustes e reformulações; e a segunda seria o momento em que faríamos a aplicação definitiva do instrumento já com as devidas reformulações. No entanto, alguns contratempos e imprevistos ocorreram durante os períodos em que atuamos com as turmas, o que nos fez refletir e optar por repetir o estudo com uma terceira turma de outro estabelecimento de ensino, buscando retificar alguns procedimentos metodológicos usados nas turmas anteriores. No capítulo III comentaremos mais detalhadamente esses percalços.

Dessa forma, diremos que o trabalho foi dividido em três etapas. Usaremos as terminologias: estudo piloto I, para o período em que tivemos contato com a primeira turma junto a qual atuamos; estudo piloto II, referente ao período em que atuamos junto à segunda turma e estudo definitivo para o período relativo à terceira dessas turmas. A caracterização adequada dos sujeitos da pesquisa acontecerá no capítulo III.

Os resultados finais que consideraremos para o trabalho fazem alusão às análises dos dados obtidos no estudo definitivo. Por esse motivo descreveremos de forma mais sucinta os estudos pilotos I e II (anexos II e III) e estenderemos mais nossa atenção à etapa referente ao estudo definitivo.

4.2 Instrumentos

Foram usados dois instrumentos de pesquisa: o primeiro deles foi uma seqüência de cinco atividades estruturadas que objetivavam a atuação do aluno para a construção gradativa de algumas idéias importantes atreladas ao conceito de números complexos. O segundo instrumento trata-se de uma entrevista semi-estruturada que teve como objetivo obter detalhes sobre o pensamento e estratégias usadas pelos alunos durante a atuação nas atividades.

Os comentários e análises das repostas obtidas na entrevista encontram-se no capítulo III do trabalho. Foi elaborado um conjunto de perguntas que configurou um roteiro padrão para todos os grupos (ver apêndice **B**). Entretanto, esse roteiro poderia ser flexível, dependendo da especificidade dos esclarecimentos que precisássemos obter em cada grupo, ou seja, caso entendêssemos que o roteiro padrão não contemplasse alguns pontos em que desejássemos maiores esclarecimentos, poderíamos acrescer esse instrumento com outras perguntas complementares.

A entrevista foi gravada para que pudéssemos ter minimizado possíveis equívocos de compreensão no momento de transcrever alguns trechos dos argumentos dos alunos.

Para a elaboração do primeiro instrumento, buscamos fazer um resgate de alguns aspectos históricos da criação e evolução dos números complexos que poderiam ser úteis ao aluno na aquisição desse conceito.

Todo o trabalho de resgate histórico foi importante para a elaboração do nosso primeiro instrumento (seqüência de atividades estruturadas) que nos auxiliou na maior parte da pesquisa e que passaremos a mencionar daqui por diante com a terminologia de seqüência didática[2]

Em todo o percurso buscamos trabalhar sob a perspectiva do método qualitativo baseado no construtivismo de Piaget em que serão incorporados a história da matemática e os princípios defendidos pelo educador matemático e psicólogo Skemp (1980). [3]

Trata-se de um esquema experimental baseado em intervenções didáticas na sala de aula. O primeiro passo para essa realização se deu com um estudo de aspectos da cronologia histórica em que se desenvolveu a formação do conceito de números complexos. Para isso, fizemos uma pesquisa bibliográfica em livros de história da matemática, manuais, internet, dissertações e artigos sobre o tema na busca de informações que pudessem subsidiar a elaboração desse material. Posteriormente nos debruçamos sobre a construção da seqüência didática.

O fio condutor para essa etapa do trabalho surgiu a partir de um trecho citado por Oliveira (2000) e outros autores, contido no livro *Ars Magna* (1545), numa situação em que o matemático Gerônimo Cardano se depara com um problema bem semelhante ao de *dividir 10 em duas partes, sendo o produto dessas partes igual a 40.* As instruções dadas por Cardano para a solução deste problema é equivalente a interpretar o problema pela equação $(5 + x)(5 – x) = 40$ e resolvê-la fazendo $25 – x^2 = 40$. As soluções dessa questão serão raízes do tipo complexas. Foi com base nela que elaboramos dois blocos de novos

[2] Antoni Zabala (1998) conceitua seqüência didática como sendo um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que tem um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos.

[3] Os critérios que utilizamos na nossa análise estarão melhor descritos na página 61 desse trabalho.

problemas com estruturas bem semelhantes, cada uma delas, que constituíram a primeira parte da atividade inicial dessa seqüência (atividade 00).

Cada um desses blocos contém três situações-problemas, as quais chamaremos, no decurso do texto, de questões. Estas foram nomeadas por ordem alfabética de (a) até (f). Os blocos de questões foram elaborados de tal forma que apenas as duas primeiras tivessem soluções reais, ou seja, a terceira e última de cada bloco, apesar de ter estrutura semelhante às duas que lhe antecedem, só têm soluções complexas.

Todos os problemas, em princípio, são solucionáveis com o uso de equações quadráticas. A estrutura bem similar, da forma como foi organizada, intenciona motivar o aluno para que ele possa, gradativamente, ir percebendo a semelhança estrutural entre esses problemas e, ao buscar a solução da terceira questão de cada bloco, poder se questionar: *por que esse problema não haveria de ter solução, uma vez que tem uma estrutura tão parecida com as anteriores?* Acreditamos que tal organização poderá propiciar a curiosidade e o senso crítico do aluno na busca da solução de uma situação problema, aspectos estes tão importantes na investigação do saber matemático.

A atividade 00 ainda contém uma segunda parte onde possui um componente que busca do aluno o uso da linguagem escrita e busca retomar o trabalho feito nos dois blocos de questões já mencionadas, procurando averiguar quais questões causaram mais dificuldades de resolução. Assim também solicita aos alunos que argumentem por escrito o porquê das possíveis dificuldades.

Adiante inserimos a atividade 01, que objetiva fomentar a discussão acerca das raízes quadradas de números negativos. Para tanto, usamos como referencial o problema de Cardano (ver apêndice **A** - questão *c*) onde se pede aos alunos que escrevam as soluções encontradas nessa questão na forma mais reduzida possível (item *a*). Em seguida (item *b*), pede-se que adicionem e multipliquem essas soluções para que possam fazer uso da observação e comprovar, por eles próprios, se dessa forma chegariam à descrição do problema.

Com esse procedimento, pressupomos que o aluno possa concluir que, mesmo com uma raiz em um formato ainda desconhecido por ele, é possível ratificar a descrição do problema, buscando averiguar a confirmação dessa hipótese.

No item **c** pede-se aos alunos que coloquem suas opiniões acerca da existência das raízes dessa equação, pois, a intenção nesse item é fazer uma investigação, ainda que sutil, procurando checar se a atividade causou alguma mudança de concepção acerca da existência das raízes quadradas de valores negativos.

É nesse contexto de dúvidas e indagações que achamos adequado inserir um pouco da cronologia histórica dos números complexos, começando a partir do século XV com o matemático francês Nicolas Chuquet que, ao se deparar com um problema cuja modelagem recai na equação $4 + x^2 = 3x$ (em simbologia moderna), afirma que sua raiz é impossível. No século XVI destacamos Gerônimo Cardano (por meio do problema já mencionado) mostrando que apesar de suas incertezas em relação a existência dessas raízes, foi o primeiro a operar com elas. As contribuições desses matemáticos serão exploradas com mais profundidade no capítulo II do trabalho.

Aqui intencionávamos fazer com que os alunos observassem que as mesmas dificuldades pelas quais estariam passando com a resolução dos problemas (questões) propostos já foram vividas por outras pessoas que também se depararam com problemas bem semelhantes (em épocas bem mais distantes) onde questões como essas ainda não tinham sido tratadas com mais profundidade.

Por esse motivo ousamos, através da atividade 02, incitar esse aluno a colocar-se no lugar de Cardano e tentar buscar algumas formas e procedimentos para operar com algumas expressões propostas nessa atividade contendo raízes quadradas de números negativos, mesmo sem ainda ter conhecimento das regras operatórias para estes. Essa atividade possui um teor experimental que tem por finalidade colocar o aluno em contato com o fato histórico relacionado a esse conceito e oportunizar uma iniciação aos registros simbólicos.

Durante toda a exploração dessa seqüência didática buscamos, mesmo dentro de algumas limitações, estabelecer uma analogia entre as dificuldades encontradas pelos matemáticos da época até a construção do conceito, com aquelas vivenciadas pelos alunos em sala, buscando lhes fazer entender o quão lento e dificultoso é o processo de criação de um novo conceito em matemática. Por esse motivo, após a tentativa da resolução de cada atividade da seqüência, buscamos abrir um espaço para a história da matemática tentando situá-los no contexto histórico e procurando fazer uma espécie de simulação gradativa do desenvolvimento desse conceito e ainda inserir um pouco das sensações e dificuldades vividas por todos aqueles que participaram desse processo de criação.

A atividade 03 é subsidiada por um trecho histórico (que a antecede) onde se enfatiza a forma utilizada inicialmente por Gauss para representar números complexos[4], isto é, através de pares ordenados. Desse modo, sugerimos ao aluno que experimentasse, no item (a) dessa atividade, representar os complexos 5 + $\sqrt{-16}$ e 5 - $\sqrt{-16}$ sob a forma gaussiana, isto é, teriam de representá-los como pares ordenados sobre um sistema de coordenadas cartesianas.

A escolha desses números foi feita por nós de tal forma que suas representações sobre o sistema de coordenadas ficassem simétricas em relação ao eixo x, tal restrição seria apenas para facilitar o desenho dos vetores que solicitamos logo em seguida - item (b) - pois esses pontos seriam exatamente as extremidades de dois vetores cujas origens estariam no ponto (0,0) do sistema de coordenadas em que estariam representados.

Toda essa estrutura tem como objetivo levar o aluno a realizar a soma vetorial, ou seja, encontrar e desenhar o ponto que representa a extremidade do vetor soma para que possam, com isso, ter subsídios necessários para tal e consigam estabelecer relação entre as abordagens da soma geométrica com a soma algébrica de números complexos.

Após essa etapa, inserimos mais um espaço contendo história da matemática com alguns fatos que deram origem a unidade imaginária **i**. Dessa forma, lançamos-lhes na atividade 04 a oportunidade de substituir as expressões desconhecidas até então, isto é, $\sqrt{-1}$ pela unidade imaginária **i**, tal como feito por Euler, segundo o texto lido pelos mesmos, para que dessa forma possam operar com algumas expressões aditivas e multiplicativas envolvendo números complexos.

---

[4] Aqui para facilitar o texto usamos o termo complexo em simbologia moderna.

4.3 Procedimentos

Como já mencionamos, essa seqüência didática foi aplicada em três escolas de ensino médio da rede pública de Natal, mas em períodos e contextos diferentes: a primeira foi feita com alunos voluntários constituintes de várias turmas dos terceiros anos de uma mesma escola que ainda não haviam tido contato com o conteúdo de números complexos, e teve por objetivo fazer uma testagem do material, ou seja, visava avaliar a funcionalidade desse instrumento. Mas também pretendíamos avaliar algumas características prévias dos alunos perante o material como, por exemplo, que comportamentos teriam diante do novo conteúdo, que entendimentos teriam das atividades e que procedimentos usariam perante essas atividades propostas.

Alem disso, através dessa etapa, estaríamos avaliando a seqüência que havíamos elaborado no sentido de obter informações para a sua reelaboração no que diz respeito a possíveis modificações a serem feitas, visando que o aluno compreenda as instruções e tenha controle sobre sua ação.

A caracterização adequada dos sujeitos, das escolas visitadas e a descrição mais detalhada de todos os passos que constituíram essa e as outras etapas da pesquisa estarão melhor descritas no capítulo III. Aqui, apenas pretendemos situar o leitor com um panorama geral do percurso trilhado, dando-lhe uma visão mais sucinta de como se procedeu esse trabalho.

A escola escolhida para a realização da primeira fase, que chamaremos de estudo piloto I, foi a Escola Estadual Professor Ulisses de Góes. Não traçamos critérios que justificassem essa escolha, apenas o fato de ser uma instituição pública onde os alunos do terceiro ano ainda não tinham tido contado com os números complexos.

Essa informação foi adquirida através do professor de matemática daquela instituição em uma visita inicial que fizemos à escola, onde conhecemos o espaço físico e fizemos, através desse docente, um breve diagnóstico das turmas visando saber se haviam trabalhado, em séries anteriores, os conteúdos pré-requisitos para a atuação nas atividades da seqüência tais como equações quadráticas, plano cartesiano, vetores e outras informações concernentes à turma que poderiam ser pertinentes ao estudo.

Esse estudo teve uma duração de oito dias. Nesse período, fizemos três intervenções em sala de aula junto aos alunos. Após essa etapa fizemos os devidos ajustes e correções no instrumento de coleta de dados, alguns de ordem lingüística nos enunciados das atividades que estavam dificultando o entendimento de alguns quesitos; em outros, como na atividade 01, reduzimos a quantidade de questões que estava deixando a atividade muito prolixa e o trabalho, por vezes, repetitivo.

A segunda etapa desse trabalho (estudo piloto II) ocorreu na Escola Estadual Winston Churchil e teve uma duração de treze dias, com quatro intervenções em sala. Para tanto, também procedemos com uma visita inicial a esse estabelecimento de ensino onde conhecemos o professor de matemática daquele turno (vespertino). Ele também nos deu toda a assistência e se prontificou a ajudar-nos disponibilizando uma de suas turmas de ensino médio, a única que ainda não havia iniciado o estudo dos números complexos.

Tal como fizemos na primeira etapa, também procuramos averiguar durante esse contato as condições de aprendizado da turma, se os alunos tinham os conceitos que são pré-requisitos para esse trabalho e se a turma se disponibilizaria para tal. Para tanto, tivemos um primeiro e breve contato com a turma, no sentido de apresentar a eles, resumidamente, o trabalho a ser realizado e saber se estariam dispostos a participar desse estudo.

O grupo que se comprometeu em participar de todo o trabalho, realizado dentro do período já mencionado, mas que, no entanto, teve alguns percalços devido ao pouco comprometimento de alguns alunos e também devido ao fato de estarmos em um período bem atribulado em virtude das turmas se encontrarem em final do ano letivo e em meio a provas e trabalhos das disciplinas curriculares.

Foi nessa etapa do estudo que procuramos inserir, após a feitura das atividades, uma entrevista semi-estruturada buscando analisar com mais detalhes se os objetivos de cada atividade haviam sido alcançados.

A coleta dos dados desse instrumento foi feita com o auxílio de uma gravação de áudio em fita. Simultaneamente a essa gravação, também procurávamos registrar, por escrito, alguns trechos das respostas dos alunos que conseguíamos anotar. Buscávamos assim, obter uma margem de segurança caso houvesse alguns imprevistos ou ruídos que impossibilitassem a leitura do áudio, o que infelizmente ocorreu, pois nem todo o áudio gravado pôde ser utilizado, uma vez que uma das fitas gravadas, posteriormente apresentou problemas de leitura e não reproduzia os trechos que gravamos. Por esse motivo, tivemos que analisar as entrevistas de alguns grupos baseados apenas nas anotações que havíamos feito durante essa coleta de dados.

Além desse percalço, ainda houve outras limitações que de fato prejudicaram essa parte do estudo. Uma delas é que não conseguimos a participação de todos os alunos nessa entrevista; alguns porque manifestaram a opção de não participar, outros por estarem em aula fazendo alguma atividade avaliativa nos momentos em que lá estávamos, outros ainda devido ao fato de não conseguirmos encontrá-los na escola naquele período uma vez que já se que já teriam sido aprovados e não necessitavam mais ir à escola. Outra limitação com que nos deparamos foi exatamente em relação à parte do áudio que pudemos aproveitar. A gravação teve a qualidade sonora prejudicada porque a sala que nos ofereceram para esse trabalho (sala dos professores) tinha intensa circulação de professores que conversavam entre eles e Isso prejudicou a qualidade das gravações e a compreensão das falas dos alunos gravadas no áudio.

A terceira e última etapa desse estudo foi realizada na Escola Estadual Nestor Lima e teve uma duração de 38 dias, com cinco intervenções em sala de aula. Essa etapa, que chamaremos de estudo definitivo, foi a mais importante porque compreende as análises finais dessa pesquisa, tendo como referência os resultados dos trabalhos feitos com os alunos dessa escola.

O trabalho foi feito com a única turma de terceiro ano do turno vespertino desse estabelecimento. Nessa etapa, começamos com um diferencial em relação às turmas anteriores, isto é, em nosso primeiro contato com a turma, optamos por fazer uma espécie de retomada, junto aos alunos, de todos os conteúdos que são pré-requisitos para as atividades da seqüência didática (detalharemos no capítulo III).

Os próximos quatro encontros em sala foram utilizados com a feitura das atividades da seqüência. A experiência da entrevista feita na etapa anterior foi de grande utilidade para essa etapa do estudo, pois nos deu subsídios para reelaborar e acrescentar algumas perguntas que poderiam ser pertinentes a esse instrumento e também serviu para nos paramentar de outros procedimentos que minimizassem os imprevistos ocorridos já comentados.

A validação desse estudo foi realizada através do confronto das respostas obtidas dos alunos na seqüência didática com aquelas colhidas posteriormente na entrevista gravada, esta também teve alguns trechos transcritos, no qual buscamos investigar a clareza e coerência das respostas dos alunos, como também buscava averiguar se os objetivos esperados pelo trabalho, já citados, teriam sido alcançados. Dessa forma, fizemos uma análise qualitativa das respostas deste último instrumento que, em síntese, fora a discussão de todos os resultados que dificultaram ou contribuíram para a melhoria do conhecimento didático que se tem sobre a aquisição do saber em questão como também o confronto dos objetivos, antes delimitados por nós, com os dados obtidos no presente estudo.

5 PRESSUPOSTOS E LIMITAÇÕES DA PESQUISA

Como em toda pesquisa acadêmica, temos nossos pressupostos e limitações. Como principais pressupostos do presente estudo poderíamos destacar:

- O aluno poderá se sentir mais motivado a modelar os problemas propostos, uma vez que tendo condições de perceber a semelhança estrutural entre eles buscará fazer uma analogia na forma de resolução dos mesmos.

- A terceira situação (questão) de cada bloco de problemas poderá causar certo desconforto ao discente no momento em que, no processo de resolução, encontrando a raiz quadrada de um valor negativo, este possivelmente passará a questionar o porquê de não conseguir encontrar a solução.

- Também acreditamos que o nível das atividades propostas para um trabalho dessa natureza foi estabelecido adequadamente a essa realidade escolar uma vez que buscamos iniciar essa abordagem com o uso de conceitos mais simples como equações quadráticas que são explorados já desde as últimas séries do ensino fundamental.

- Essa modalidade de estudos, ou seja, atividade estruturada através de uma seqüência didática poderá propiciar ao aluno a oportunidade de participar ativamente da aquisição de algumas idéias importantes relacionadas ao conceito de números complexos e, após a aplicação, poderão ter condições para que operem a adição e a multiplicação com números complexos na forma algébrica, pois o contexto e as situações que colocamos para eles foram construídas de modo a dar mais sentido e significado ao conceito de números complexos e aos algoritmos relacionados a essas operações.

Algumas limitações deverão ser consideradas na realização deste trabalho. Dentre elas poderemos destacar:

- O uso das atividades estruturadas neste trabalho visa ser um instrumento de auxílio para a construção dos conceitos iniciais de números complexos, portanto, apenas esse instrumento não é suficiente para que o aluno adquira maturidade para resolver com total segurança todos os problemas que exigem a aplicação desse conceito. Para tanto, é recomendável que o aluno tenha contato com outros exercícios de aprofundamento, para que possa desenvolver as outras competências exigidas pelo programa curricular daquele conteúdo de ensino.

- As realidades de ensino-aprendizagem de nosso sistema público de ensino ainda estão muito aquém do que seria necessário para uma formação adequada, principalmente para um aluno que está prestes a concluir o ensino médio e que carece de uma consistente compreensão conceitual.

- Importante ratificar que nem todas as entrevistas puderam ser utilizadas nas análises, pois o espaço físico que a escola nos cedeu para essa atividade foi a sala dos professores onde circulava muita gente e naturalmente havia muito barulho oriundo de conversas. Isso impossibilitou a leitura do áudio de alguns trechos das falas dos entrevistados, inviabilizando até algumas gravações inteiras, restando-nos, dessa forma, apenas algumas anotações escritas durante a entrevista.

- Ao longo da aplicação do primeiro instrumento, as duas primeiras turmas que se submeteram a essa pesquisa relataram estar em déficit com conteúdos anteriores que são pré-requisitos para a realização bem sucedida deste trabalho.

- Ao longo do trabalho com as duas primeiras turmas obtivemos alguns dados que mereceram nossa atenção. Durante a segunda intervenção com a primeira turma participante desse trabalho, estes nos relataram que não tiveram aulas de matemática no ano anterior ao da realização desse estudo, pois não havia professor de matemática naquele período naquela escola. Já a segunda turma afirmou só ter visto o assunto de polinômios no ensino fundamental (antiga 8ª série) o que seria insuficiente para um trabalho dessa natureza.

- Ainda poderemos citar que nas três turmas em que trabalhamos os alunos apresentaram algumas resistências em aceitar a nova metodologia de ensino, o que já era esperado por nós, pois se trata de uma mudança no *contrato didático*[5] (SILVA, 1999), o que para alguns é extremamente difícil, uma vez que já advêm de um sistema educacional notadamente tradicional, durante um longo período e, em muitos casos, durante toda a vida escolar.

[5] Brusseau (1986) citado por Silva (1999), define o termo Contrato Didático, como sendo o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor [...] Esse contrato é o conjunto de regras que determinam o que cada parceiro da relação didática deve gerir e aquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar conta perante o outro.

CAPÍTULO II

FUNDAMENTAÇÃO: CONSTRUTIVISMO E HISTÓRIA

Neste capítulo, abordaremos a utilidade e a importância do uso de atividades didáticas, tomando como referência as atividades matemáticas. Pretendemos estabelecer uma relação entre o uso desse tipo de atividade com a abordagem construtivista. Faremos também uma discussão a respeito da necessidade e importância de se incorporar a história da matemática nessas atividades. Fomentando essa discussão, faremos, no terceiro tópico, um breve histórico do desenvolvimento dos números complexos.

2.1 USO DE ATIVIDADES DIDÁTICAS SOB UMA PERSPECTIVA CONSTRUTIVISTA

Algumas alternativas no sentido de melhorar a qualidade do processo de ensino-aprendizagem na área de matemática vêm ganhando cada vez mais espaço no contexto da educação.

Numa sociedade em que a tecnologia alcançou um avanço até então nunca visto, emerge natural e conseqüentemente a necessidade de lidar, com alguma familiaridade, com uma ferramenta tecnológica disponível que é a matemática. Dessa forma, pretendemos investigar uma possibilidade metodológica de melhoramentos para o processo de ensino-aprendizagem em matemática.

Analisando os novos contextos da atualidade escolar, provavelmente constataremos que cresce uma nova concepção de ensino da matemática cada vez mais calcada na utilização de atividades a serem realizadas em contexto de redescoberta. Pesquisas em educação matemática têm indicado a eficácia desse procedimento para fomentar o desenvolvimento da habilidade de pensar matematicamente, o que é, incontestavelmente, uma habilidade fundamental em nossa cultura. Dentre algumas dessas, podemos destacar as *atividades estruturadas* de Richard Skemp. Trata-se de um instrumento de aprendizagem, aplicado inicialmente a crianças, que visa auxiliar a organização do pensamento do indivíduo buscando garantir-lhe o sucesso do aprendizado matemático.

Na atualidade, entretanto, ainda observamos comumente, enquanto professores atuantes de matemática, um grande número de alunos com dificuldades em assimilar os conteúdos nessa disciplina.

Sobre esse aspecto, Mendes (2001 a) menciona que esquecemos de valorizar no processo de aquisição do conhecimento e da linguagem matemática formal as componentes intuitivas próprias do pensamento cotidiano, as quais, por sua vez, desempenham um papel essencial na construção do pensamento matemático. Por esse motivo correremos o risco de apresentar aos estudantes um conhecimento mecânico, estático e sem qualquer constituição vital.

Com isso, entendemos que as práticas cotidianas têm sua importância na elaboração de atividades matemáticas não apenas pelas familiaridades existentes entre os diferentes contextos sócio-culturais dos alunos, mas também por resgatar a essência criativa tão necessária quando no emprego das construções das mais diferentes estratégias utilizadas para se chegar a um determinado fim.

Ao consultar os Parâmetros Curriculares Nacionais de matemática – PCN (BRASIL,1997) - temos que o objetivo geral da matemática é analisar informações relevantes do ponto de vista do conhecimento e estabelecer o maior número de relações entre elas, fazendo uso do conhecimento matemático para interpretá-las e avaliá-las criticamente.

O livro 1 desse material, um volume introdutório que traça as diretrizes gerais para as diversas áreas do conhecimento, menciona que “os PCN para a área de matemática mostram que é fundamental superar a aprendizagem centrada em procedimentos mecânicos, indicando a resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática a ser desenvolvida em sala de aula.”

Sob essa perspectiva, parece-nos que o uso de atividades estruturadas construídas a partir de modelos e fatos conhecidos dos alunos pode ser uma ferramenta valiosa para a aquisição do conhecimento matemático, uma vez que se trata de um procedimento dinâmico em que a aprendizagem ocorre com atuação desse aluno.

A aquisição desse conhecimento envolve a formação de um conceito, tema este muito estudado por alguns autores. Sobre a formação do conceito, destacaremos Piaget e Skemp, que buscam explicar esse processo de aquisição em termos de estruturas conceituais que são construídas a partir da sua experiência perceptiva (FOSSA, 2001).

Este autor analisa no pensamento piagetiano aspectos sobre formação do conceito partindo do ser ainda recém nascido, entendendo que esse tem poucos reflexos inatos e, por esse motivo, tem de organizar sua experiência ao construir várias seqüências de ações. Através dessas ações, a criança cria uma estrutura conceitual para suas habilidades de pensamentos que serão desenvolvidas mais tarde por meio da reflexão que ela tem sobre suas próprias ações. Em conformidade com o pensamento de Piaget, Fossa comenta que as atividades utilizadas no ensino de matemática não deveriam se limitar a exercícios rotineiros uma vez que não desenvolvem as estruturas conceituais citadas anteriormente. Ele também enfatiza que as atividades feitas sob esse ponto de vista se utilizam de materiais concretos e manipulativos.

Para Skemp (1980), a formação do conceito envolve algumas experiências sensoriais de um determinado objeto por meio das quais abstraímos certas propriedades invariantes. A partir dessa abstração, qualquer experiência posterior envolvendo o objeto passará a evocá-lo, logo ele passa a ser conhecido. Esse autor também distingue dois tipos de conceitos: os primários, que derivam das experiências sensoriais e motoras do mundo exterior; e os secundários, que são aqueles abstraídos a partir de outros conceitos. A estes, ele também designa como sendo de ordem superior e que significa “abstraído de”. Logo, quanto mais abstratos, mais separados estarão da experiência do mundo exterior.

Dessa forma, segundo esse autor, os conceitos de ordem superior não podem ser comunicados mediante uma definição, mas sim reunindo-se exemplos adequados para que se experimente. Assim, ele enquadra o saber matemático como sendo de ordem superior, uma vez que seus conceitos são de ordem mais abstrata do que aqueles da vida diária.

Fossa (2001) fala da importância que deve ter a estrutura matemática das atividades usadas em sala, acreditando que estas possuem uma propriedade profunda, visto que até os conceitos mais simples da matemática são abstrações de abstrações; isso implica que essa propriedade só poderá ser captada pelo aluno depois de conceituar a própria atividade. Em outras palavras, o autor ilustra esse pensamento mostrando que primeiramente deveria ocorrer o uso de atividades envolvendo material concreto, onde o aluno deveria, num primeiro momento, construir o conceito dessa atividade. Posteriormente esse aluno generalizaria seu próprio conceito a partir dessa atividade para chegar a um conceito matemático. Segundo o autor, a generalização desse conceito matemático poderá se dar através de duas maneiras: o aluno poderá abstrair os conceitos a partir de várias atividades com a mesma estrutura matemática ou poderá entender o conceito a partir de uma determinada atividade baseado nos conceitos matemáticos que ele já possui.

Sobre o mecanismo de abstração mencionado acima, é importante frisar que o autor procura enfatizar que os dois processos geralmente ocorrem como sendo dois aspectos de um só processo de abstração, em vez de dois processos de abstração.

Quando visamos o público de ensino médio, como no caso do presente trabalho, observamos que nem todos os conteúdos matemáticos desse nível de ensino são de fácil contextualização e, por conseqüência, nem sempre é possível o uso de atividades com o material concreto, o que já é bem mais fácil, pela própria natureza dos conteúdos, quando nos remetemos ao ensino fundamental.

Dessa forma, ao trabalharmos com esse nível escolar, ainda que não façamos uso de material concreto, concordamos com Fossa (2001) acreditando que a formação do conceito se desenvolverá seguindo os mecanismos citados, isto é, os alunos deverão atuar sobre a seqüência de atividades estruturadas, construir o conceito da própria atividade como um todo e posteriormente generalizá-lo, elaborando, dessa forma, o conceito matemático.

Para que o uso das atividades cumpra o objetivo, ou seja, a construção de algumas idéias relacionadas ao conceito, é necessário seqüenciá-las apropriadamente, isto é, todas dentro de uma mesma estrutura matemática se reforçando mutuamente e organizadas de tal modo que, para obter uma nova estrutura seja necessário que o aluno utilize as estruturas matemáticas que ele já construiu (FOSSA, 2001).

Outro componente importante mencionado por Fossa é que, durante e ao final das atividades, os alunos deveriam ter alguns espaços onde pudessem verbalizar suas idéias acerca de seus entendimentos sobre elas, daí a importância de se trabalhar em pequenos grupos, e ao final poder explicar o que foi feito.

Ao final desse processo, deve-se abrir um espaço onde o aluno possa registrar por escrito o resultado dessas atividades, o que também é importante no que remete ao uso da manipulação simbólica.

O que comumente observamos nas salas de aula de nossas escolas é o uso das atividades matemáticas apenas para exercitar o conteúdo explicado anteriormente. Dentro dessa perspectiva, temos como conseqüência alunos insatisfeitos com o conteúdo, manutenção da rejeição que alguns alunos têm pela referida disciplina e aprendizagem pouco significativa.

Na obra de Skemp, vemos uma forte influência de Piaget na maneira como conduz seus trabalhos. Destacaremos, nessa ótica, uma similaridade na forma como concebem a formação do conceito: ambos defendem as experiências individuais como fundamentais para essa aquisição. Concordamos com Fossa (2001) no momento em que este comenta que, dentro dessa perspectiva, as idéias de Skemp seriam uma versão elaborada das idéias piagetianas, portanto, também o consideraremos como dentro de uma ótica construtivista.

Mendes (2001 a) tem alguns trabalhos que discutem a estreita relação existente entre o conhecimento matemático e o construtivismo.

2.2 A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO EIXO NORTEADOR DAS ATIVIDADES DIDÁTICAS

Hoje é muito difundido entre os profissionais de educação o fato de que a história da matemática é uma ferramenta eficaz que contribui para melhorar o ensino de matemática. No entanto, de acordo com as experiências vivenciadas por nós, enquanto professores dessa disciplina, o que temos observado é que a transmissão dos conteúdos matemáticos ainda é feito quase que exclusivamente pela leitura escrita ou oral por meio de algumas representações específicas, tais como símbolos, tabelas e gráficos.

Embora saibamos que hoje já existe uma maior variedade de materiais didáticos que possam auxiliar o professor no que se refere aos diversos modos de explorar os conteúdos matemáticos, temos de convir que essa ainda é uma realidade de poucas escolas. Algumas, pelo pouco incentivo pedagógico de trabalhos utilizando novas metodologias, inclusive pela prática fadada de alguns professores aos métodos tradicionais. Estes, por muitas vezes, são resistentes à inserção de novas alternativas e acabam por inviabilizar seus usos para boa parte dessas instituições.

Fossa (2001) faz uma analogia dessa situação com o uso da história da matemática nas escolas, levando o leitor a refletir que mesmo sendo benquista pela maioria dos professores de matemática, esta ainda é pouco conhecida por estes e, conseqüentemente, também pouco conhecida dos nossos alunos.

> Poucos têm o tempo, ou mesmo a índole de mergulhar nas profundas águas geladas do passado a fim de trazer a tona um pedacinho do tesouro ali submerso. (FOSSA, 2001, p. 59)

A fim de desenvolver certas maneiras de abordar novos problemas, podemos ver no decurso da história que a investigação das dificuldades enfrentadas pelos povos e suas ações para superá-las se configuram como uma fonte poderosa para entendermos nosso presente, resgatar alguns aspectos que serão úteis na solução de problemas atuais, em especial dos problemas matemáticos, e nos subsidiar no que se refere à compreensão de determinados conceitos.

Por compreensão, Fossa (2001) faz uma diferenciação bem sucinta entre esse termo e o *saber, e*ntendendo que o saber é geralmente mais superficial, preso a fato concreto e limitado a situações originárias desse saber. Já a compreensão, o autor entende como sendo mais profunda e abstrata, portanto, proporciona ao sujeito uma capacidade de agir criativamente em situações novas. Dessa forma, entendemos que o uso da história da matemática, além de proporcionar alguns aspectos mencionados anteriormente, vem para fomentar a compreensão dos conceitos matemáticos.

É comum encontrarmos em todos os níveis de ensino alunos que ainda têm uma visão equivocada dos conceitos matemáticos, isto é, fazem jus à crença de que esses conhecimentos surgem de forma acabada como num passe de mágica. Essa forma de pensar acarreta algumas implicações negativas para esse aluno, no momento em que contribui para a manutenção de um pensamento de que a matemática não passa de um conjunto de regras que devem ser seguidas dentro de determinadas normas. Conseqüentemente, isso leva o aluno a perder de vista a riqueza funcional e histórica escondida por traz daquele conceito, fomentando ainda mais a idéia de que a referida ciência é repetitiva e mecânica, uma vez que, dessa forma, os conceitos por ele aprendidos estão destituídos de significados.

Os PCN (BRASIL,1997) de matemática defendem o uso dessa história juntamente com outros recursos didáticos e metodológicos, entendendo-a como um instrumento de valor formativo, uma vez que resgata a própria identidade cultural do aluno. Outro aspecto defendido alude à história como instrumento que poderá esclarecer algumas idéias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, buscando respostas a alguns porquês, contribuindo dessa forma para um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento.

É nesse contexto que o conhecimento da história da matemática, bem como o da história da humanidade, poderá fornecer uma visão de que a matemática não é um corpo de conhecimento pronto, irrefutável e infalível. Mas, ao contrário, mostra que ela foi constituída através de muitas tentativas, erros e acertos na busca de soluções de problemas internos e externos a ela. A matemática se configura como uma forma de conhecimento que o homem se apropriou ao longo de sua evolução na busca de sua sobrevivência.

É bem verdade que existem outras metodologias bem eficazes com as quais podemos trabalhar os conceitos matemáticos. Também somos a favor do uso de alternativas que venham a melhorar o processo de ensino aprendizagem em matemática, porém, o que pretendemos é despertar a atenção dos profissionais em educação matemática e leitores em geral acerca da preciosidade que está ao alcance de todos e, no entanto, ainda pouco utilizada ou muitas vezes usada de forma pouco pertinente.

Entendemos que a apropriação de um conceito, sob vários aspectos diferentes, pode melhorar o entendimento e, conseqüentemente, a compreensão sobre esse conceito. Mendes e Brandemberg (2005), no artigo intitulado “Uma análise histórico-epistemológica do conceito de grupo”, que trata sobre o conceito de grupo a partir de uma perspectiva da história da matemática, buscam alguns elementos que demonstrem que a comunicação dos conteúdos matemáticos pode ser mais eficaz quando são inseridos elementos de história da matemática. Esses poderão se configurar como um possível elemento de contextualização significativo dos conteúdos no momento em que implementa o aluno de um maior conhecimento acerca da origem e do desenvolvimento conceitual dos conhecimentos matemáticos.

> Pretendemos discutir esse desafio tendo a história da matemática como aporte para melhorar essa comunicação. Pretendemos com isso avançar no processo de construção da linguagem matemática [...]. (MENDES e BRANDEMBERG, 2005 p 1).

No entanto, ainda permanece uma pergunta que ainda inquieta boa parte dos professores de matemática: como utilizar a história da matemática na sala de aula de modo que esta venha a contribuir para uma construção eficaz do conhecimento pelo aluno? Em Mendes (2001), o professor Fossa, em nota no prefácio, já buscava caminhos que apontam para uma possível solução desse questionamento.

> A história da matemática poderia ser usada como uma fonte para a confecção de atividades. Sabemos que uma das maneiras mais eficazes de ensinar matemática é através do uso de atividades (incluindo jogos) com material concreto num contexto de redescoberta. (FOSSA in MENDES, 2001 b, p. 9).

Em Fossa (2001) temos uma orientação de atividade que tem como eixo norteador a história da matemática. A atividade resgata alguns aspectos da matemática pitagórica e neo pitagórica em um trabalho que explora o conceito de números perfeitos, abundantes e deficientes. Nela, o autor ainda enfatiza outros aspectos importantes da história da matemática mostrando que o seu uso não está limitado apenas aos possíveis esclarecimentos acerca das evoluções das idéias matemáticas, mas também tem a possibilidade de ser o eixo norteador que poderá ser o ponto de partida para a elaboração de um vasto elenco de atividades que podem estar englobados à exploração de outros conceitos a ela associada.

Mendes (2001b) também compactua desse mesmo pensamento. Em sua tese de doutorado, o autor faz uso da história da matemática na elaboração de atividades para o ensino de trigonometria plana.

> É importante estabelecer um paradigma que subsidie esse processo de utilização da história, de modo que façamos uso do mesmo durante a elaboração e utilização de atividades de ensino de matemática apoiadas no seu conhecimento histórico. (MENDES, 2001b, p.20)

No trabalho mencionado anteriormente, Mendes demonstra a possibilidade de concretização dessa idéia em sala de aula. Para tanto, o autor inicialmente busca fazer uma reflexão de algumas experiências de outros autores, incluindo análise de materiais didáticos aludindo o uso da história da matemática ao ensino da trigonometria plana. Após analisar esse material contendo diferentes pontos de vista acerca da história como recurso pedagógico, o autor tece suas considerações sobre o estudo feito e apresenta sua proposta com relação ao ensino da trigonometria através da história, isto é, o estudo histórico (exploratório) sobre trigonometria, feito inicialmente, serviria de referencial à elaboração de atividades baseadas na redescoberta a ser feita pelos alunos.

A seqüência didática a qual nos propomos nesse trabalho também segue vertente bem semelhante na maneira como utiliza a história da matemática, uma vez que os embasamentos para a elaboração das atividades constituintes foram advindos da história.

Em *Ensaios sobre a Educação Matemática,* Fossa (2001) orienta que as atividades desenvolvidas sob essa perspectiva devem desenvolver os conceitos matemáticos sem perder de vista o uso de três aspectos: físico, fazendo o uso de materiais manipulativos; oral, oportunizando aos alunos o ato de fazerem discussões dos resultados que podem ser feitos em grupos ou entre alunos e professor; e a representação simbólica, que seria o registro na forma escrita. Tais aspectos também estão em conformidade com o pensamento de Ferreira

(1992), citado por Mendes (2001 b), que também estabelece uma abordagem bem similar.

Mendes (2001 b) ainda cita alguns trabalhos de autores cujas produções científicas também se baseiam no uso da história da matemática. Um deles é *Prado* (1990), que desenvolve uma proposta de educação matemática baseada na ordem histórica em que o conhecimento foi produzido. Tal estudo traz alguns respaldos importantes para o educador matemático, no momento em que busca responder se realmente a história da matemática pode auxiliar o professor de matemática no ensino dessa disciplina.

Outra autora mencionada por Mendes (2001 b) é Estrada (1993), cujo trabalho com a história da matemática é de grande importância uma vez que também enfatiza essa temática como agente facilitador da aprendizagem matemática e se baseia em um estudo temático em que os alunos têm a opção de escolher entre quatro temas previamente delimitados pela autora. Dentre os quais, temos: biografia dos matemáticos, desenvolvimentos temáticos, origem e significados dos termos matemáticos e estudo dos textos passados.

O autor ainda cita trabalhos apresentados por Ferreira (1992), outro que também utiliza a história da matemática como recurso metodológico no processo de ensino aprendizagem quando discute que seu uso pode ter bons resultados para o aprendizado de acordo com a concepção filosófica adotada, uma vez que cada uma das concepções matemáticas concebe-a com significados distintos.

Outro ponto levantado por Mendes (2001 b) alude à prudência que tem que ter o educador matemático antes de tomar alguma posição em relação ao uso ou não da história da matemática em sua prática discente, pois esse profissional deverá ter em mente as finalidades pedagógicas que a história poderá alcançar em educação matemática.

Por outro lado, quando nos reportamos aos materiais didáticos em matemática existentes no mercado, podemos ratificar o quão escassos são os textos que tratam os conteúdos matemáticos sob a ótica da história da matemática. Na obra mencionada anteriormente, Mendes (2001 b) busca trazer à tona essa discussão, fazendo a revisão de alguns livros didáticos e paradidáticos utilizados nas escolas com relação ao tratamento histórico dado ao conteúdo, nesse caso específico, sobre trigonometria plana. Ele pôde observar que, em sua maioria, os dados históricos resumem-se a biografias de alguns matemáticos famosos e alguns trechos de informações sobre o desenvolvimento cronológico do assunto abordado, limitando-se ao uso ornamental[6] da história.

Uma concepção bem semelhante tem Jardinetti (1994), também mencionado por Mendes (2001 b). Ele afirma que a história da matemática tem uma participação meramente ilustrativa em alguns livros didáticos, sendo que a forma como vem sendo abordada não é indispensável à construção dos conceitos matemáticos.

Recentemente, quando cumpríamos a disciplina *História das Ciências e Ensino de Ciências da Natureza e da Matemática,* do Programa de Pós Graduação no qual estamos inseridos, fizemos uma pesquisa experimental do tipo investigatória que confirma essa realidade. Tratou-se de uma análise com a finalidade de averiguar a quantidade de tratamento histórico dado aos conteúdos nos livros didáticos utilizados nas escolas nesse período e de que forma esse conteúdo histórico era apresentado. Os livros a serem analisados foram escolhidos previamente pelos próprios mestrandos, que também são professores, visando obter uma análise do material nas áreas de química, física ou matemática. Alguns desses materiais foram os próprios livros que esses professores adotavam nas escolas em que lecionavam.

Em um primeiro momento, foi discutida, na sala, a eleição de alguns pontos que deveriam figurar como os nossos critérios para validar essa análise. Como resultados desses critérios, obtivemos:

- O conteúdo histórico fornece embasamento ao aluno enfocando a problemática que deu origem ao problema?

- Apresenta os obstáculos epistemológicos e os contextos em que se deram os fatos?

[6] O termo *uso ornamental* foi uma expressão usada por Fossa (2001) que segundo Mendes (2001) está empregado no sentido de que as informações históricas não chegam a motivar o leitor e não contribuem para a aprendizagem dos conceitos a serem ensinados.

- Faz uma relação (busca uma analogia) dos pontos de vista da história e do conteúdo de sala?

O grupo em que estávamos inserido escolheu o livro *Matemática Paratodos*, dos autores Imennes e Lellis, direcionado aos estudantes do 9º ano do ensino fundamental. Verificamos que o conteúdo histórico está presente na obra, tendo trechos apresentados em quase todos os conteúdos. A abordagem histórica é apresentada geralmente por linguagem escrita, tendo algumas poucas ilustrações que não facilitam ou contribuem para o entendimento do conteúdo. Alguns desses trechos possuem elementos de contextualização com fatos e acontecimentos da época que originaram a necessidade da criação do conceito, procurando situar o leitor na seqüência cronológica em que se deram as descobertas. Porém, a abordagem histórica quase sempre é insuficiente para embasar o aluno dentro do contexto que deu origem ao problema. Dessa forma, não apresentam os obstáculos epistemológicos que deram origem aos fatos, utilizando-se de poucas descrições sobre o contexto da época e não fazem relação explícita da história da matemática com a realidade dos conteúdos de sala de aula.

Nessa obra, percebe-se que os autores buscam desmistificar algumas idéias que fazem parte do senso comum da maioria dos estudantes. Exemplo: as criações científicas são invenções de uma única pessoa que por tal mérito ficou imortalizada como gênio. Sob esse aspecto, os autores buscam mostrar que grande parte das descobertas científicas foi construída ao longo de um vasto espaço de tempo e em pontos geográficos distintos através de contribuições de diversos estudiosos.

A quantidade de informação histórica também foi quantificada página a página. Ao fazer essa tarefa, refletimos sobre uma indagação que também poderá surgir ao leitor em relação à mensuração desse conhecimento: e*m que medida a quantidade de conteúdo histórico é ideal ao livro didático?* Pois a quantificação dessa informação talvez não seja uma ferramenta eficaz para avaliar a excelência de um livro didático mesmo porque uma obra com esse fim (didático) que tivesse a maioria das páginas com textos alusivos à história da matemática não garantiria, necessariamente, melhor eficácia no aprendizado daquele saber matemático.

Na verdade, essa discussão se passa muito mais pelo que já mencionamos anteriormente enquanto citávamos Mendes (2001) – quando este fala da importância de sabermos, antes de qualquer atitude, as finalidades pedagógicas que o seu uso pode alcançar. Não buscávamos com esse procedimento qualificar o livro como bom ou ruim, mas apenas obter algum indicador que apontasse em que medida estão se configurando os conteúdos históricos nos livros didáticos atuais usados nas escolas.

Os fragmentos históricos que contabilizamos ocupam uma área de aproximadamente 4,9% em relação ao total do livro, geralmente recebendo o lugar das leituras complementares (ao final do capítulo) ou sendo brevemente mencionada na introdução de poucos capítulos, o que denota que mesmo em trabalhos de linhas mais progressistas, como nesse caso, o conteúdo histórico ainda recebe um tratamento pouco relevante.

Poderíamos até apontar esse como sendo um dos fatores que disseminam o pouco uso da história da matemática em nossas salas de aula, pois, enquanto professores atuantes, observamos comumente que o livro didático ainda é o principal guia que orienta o professor na condução dos conteúdos, sendo que em alguns casos nem existem materiais disponíveis que auxiliem essa condução. Ainda não podemos deixar de mencionar que a própria formação desses docentes também não incentivou o desenvolvimento de metodologias que privilegiassem o uso desse recurso, pois na maioria dos casos, durante todo o período de licenciatura, poucas disciplinas foram atribuídas a esse tratamento.

No entanto, experiências salutares como as que já comentamos poderão ser ponto de partida para que possamos fazer uma reflexão sobre nossa prática docente e decidirmos por uma abordagem mais humanizada dos conteúdos matemáticos, entendendo que a história da matemática pode e deve ser um poderoso instrumento capaz de favorecer o aprendizado de conteúdos matemáticos e, em particular, também servirá para ressaltar como alguns conceitos se articulam entre si.

2.3 NÚMEROS COMPLEXOS: UM BREVE HISTÓRICO DE SEU DESENVOLVIMENTO

Por volta de 1500, um pensamento corrente entre os matemáticos era o seguinte: "o quadrado de um número positivo, bem como o de um número negativo, é positivo. Não existe raiz quadrada de um número negativo porque um número negativo não é quadrado de nenhum número".

Na verdade, a existência de números complexos vem atrelada à idéia de números inteiros negativos, visto que o imaginário puro, i = $\sqrt{-1}$, pressupõe a existência de -1, logo seu desenvolvimento precisaria de uma teoria consistente para os números negativos. Já no final do século XV e até meados do século XVI, aparecem ao mesmo tempo os números negativos e os imaginários.

O matemático francês Nicolas Chuquet (1445-1500 aprox.) foi um dos primeiros europeus a assumir a existência dos números negativos. De seus trabalhos, tem-se apenas o registro da obra *Triparty en la Science des Nombres* (1484), que versa sobre álgebra e aritmética e foi escrita em três partes: a primeira delas diz respeito às operações aritméticas sobre os números, incluindo uma explicação dos números indo-arábicos; a segunda parte trata de raízes de números - há uma sincopação, de modo que a expressão moderna $\sqrt{14-\sqrt{180}}$ aparece em uma forma semelhante à R)^2 : 14 : $\overline{m}$. R)^2 180; a última parte diz respeito à regra da incógnita, o que hoje chamaríamos de álgebra.[7] Tal obra foi escrita em Lyon para as necessidades da expansão mercantilista que exigia conhecimentos matemáticos aplicáveis ao comércio.

No entanto, ao longo de décadas, surgiam opositores à existência dos negativos. Dentre estes, podemos destacar o geômetra francês Lazare Carnot (1753-1853), que se opunha a esses números por entender que neles não se verifica a relação de ordem.

Na verdade, uma teoria que desse consistência aos números negativos seria de suma importância para o advento dos números complexos, visto que o imaginário mais simples, *i* = $\sqrt{-1}$, pressupõe a existência do número negativo -1.

A importância de Chuquet na descoberta dos números inteiros negativos é que ele tinha uma concepção bem inovadora para a época, pois

[7] Boyer (1996).

admitia a existência desses números na maneira como os concebe e nas respectivas regras operatórias. Dessa forma, ele não só os aceita como também explica as quatro operações elementares com esses números.

Segundo Oliveira (2000), esse mesmo autor, ao resolver a equação quadrática $4 + x^2 = 3x$ (em simbologia atual), se depara com uma raiz do tipo **x** = $\frac{3}{4} \pm \sqrt{(2.\frac{1}{4} - 4)}$ e afirma que essa raiz é impossível, uma vez que provavelmente também deve ter achado estranho um cálculo de uma raiz quadrada de um valor negativo.

Dezenas de anos após, em 1545, o algebrista Gerônimo Cardano (1501-1576), publicou uma obra intitulada *Ars Magna* (Nuremberg, 1545) em que, no capítulo 37, propôs um problema semelhante a: "dividir 10 em duas partes de modo que o seu produto seja 40". Esse problema, dizia ele, *é "manifestadamente impossível, mas, mesmo assim, vamos operar"*. (OLIVEIRA, 2000).

Além de jogador, astrólogo e professor, Cardano era também um médico de renome, e mostrou que $5+\sqrt{-15}$ e $5-\sqrt{-15}$ eram soluções do problema. Segundo Oliveira (2000), ele concluiu, porém, que essas expressões eram "verdadeiramente sofísticas[8] e sua manipulação tão sutil quanto inútil". Tal descrição também foi encontrada em Milies (1994).

Cardano já havia se deparado com essas raízes *sofísticas* ao resolver equações do 3º grau, aplicando uma regra que ele mesmo havia obtido para a equação:

$$x^3 = 15x + 4$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

E se via assim diante do seguinte dilema: sabia ele que, por um lado, $\sqrt{-121}$ não existia e, por outro, que 4 era solução da equação. Cardano não encontrava explicação, mas, ao contrário de Chuquet, ele introduz os

[8] Segundo DUROZOI e ROUSSEL (1999) um sofisma é um argumento aparentemente conforme à lógica, mas que chega a uma conclusão inaceitável , seja por absurdo, seja por um emprego voluntariamente falseado das regras de dedução. Classicamente admite-se que sofisma se distingue do Paralogismo por sua vontade de enganar. Todavia, pode igualmente ser utilizado com o objetivo de chocar o ouvinte (ou leitor) e, portanto de levá-lo mais adiante na reflexão.

números imaginários nas soluções de equações, embora não saiba como operar com eles. Em todo caso, o seu grande mérito foi chamar atenção para o problema.

O passo seguinte na caracterização dos números complexos foi dado pelo matemático bolonhês Rafael Bombelli (1526-1573), que era um admirador de *Ars Magna* de Cardano, mas achava que seu estilo de exposição não era de tão fácil assimilação. Dessa forma, decidiu escrever um livro expondo os mesmos assuntos, porém de tal forma que um principiante pudesse estudá-los sem necessidade de alguma outra referência.

Nessa obra, esse autor ao observar a equação $x^3 = 15x + 4$ percebeu que talvez as duas raízes cúbicas fossem expressões do tipo $a + b\sqrt{-1}$ e $a - b\sqrt{-1}$ e que, essas, somadas da maneira usual, fossem igual a 4. De fato, Bombelli mostrou que as raízes cúbicas obtidas por Cardano eram, respectivamente, iguais a $2+\sqrt{-1}$ e $2-\sqrt{-1}$ e que somadas dariam 4.

Segundo Oliveira (2000), tal feito se encontra na obra *Álgebra*, publicada por Bombelli, cuja edição manuscrita é de 1550, publicada em 1572. Esse trabalho, diferentemente da obra de Cardano, começa com material elementar e culmina com o estudo das equações cúbicas e quárticas; seu diferencial é que possui uma leitura mais fácil e hermética quando comparada com aquela de Cardano.

A partir desse feito, Bombelli conseguiu justificar o uso da fórmula de Cardano sem necessariamente ter antecipadamente o valor de uma raiz real.

> [...] Este tipo de raiz quadrada tem operações aritméticas diferentes dos outros e uma denominação diferente, porque quando o cubo da terça parte das coisas é maior que o quadrado da terça parte do número, o excesso não se pode chamar-lhe ‘nem mais nem menos’. Mas vou chama-lhe ‘mais de menos’ quando for adicionado (+$\sqrt{-1}$) e quando for subtraído vou chama-lhe de ‘menos de menos’ (-$\sqrt{-1}$)[...] (BOMBELLI citado por OLIVEIRA, 2000, p.7).

Dessa forma, ele reconhece a existência dos números imaginários puros, ou seja, complexos da forma *bi* e estabelece coerentemente as operações entre eles.

> [...] Mais vezes mais de menos , dá mais de menos.
> Menos vezes mais de menos, dá menos de menos.
> Mais vezes menos de menos, dá menos de menos.
> Menos vezes menos de menos, dá mais de menos.
> Mais de menos vezes mais de menos, dá menos.
> Mais de menos vezes menos de menos, dá mais.
> Menos de menos vezes menos de menos, dá menos (BOMBELLI citado por OLIVEIRA, 2000, p.7).

O que em linguagem atual teríamos respectivamente:

$$(+1).(+i) = +i$$
$$(-1).(+i) = -i$$
$$(+1).(-i) = -i$$
$$(-1).(-i) = +i$$
$$(+i).(+i) = -1$$
$$(+i).(-i) = +1$$
$$(-i).(-i) = -1$$

O século XVII viu nascer alguns trabalhos que em muito corroboraram com a aceitação dos números complexos, embora não eliminassem de todo as resistências a estes.

Uma dessas obras que haveria de influenciar várias gerações de matemáticos é *Invention Nouvelle em L'Algèbre* (1629), do francês Albert Girard (1590-1633). Nela, ele expõe o seu conceito sobre as raízes quadradas de números negativos, entendendo que as equações quadráticas só são impossíveis e suas soluções inexplicáveis, quando o termo independente for negativo. Até então, Girard ainda demonstra um pensamento bem tradicional. No entanto, o que lhe coloca em evidência nesse cenário é a generalização, sem demonstração, de um resultado já enunciado por Viète (1540-1603), outro matemático francês, contemporâneo de Girard. Tal resultado ficou conhecido como o *Teorema Fundamental da Álgebra*, que em linguagem simplificada afirma que uma equação polinomial com coeficientes complexos e de grau $n>0$ tem exatamente *n* raízes. A demonstração a rigor deste teorema se deu no ano de 1799 pelo alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855), que mais tarde publicou mais três demonstrações do referido teorema.

O mal estar que esses símbolos sem significado provocaram refletia-se nos nomes que lhes foram atribuídos inicialmente: números "sofísticos", "sem significado", "impossíveis", "fictícios", "místicos", "imaginários".

Em Oliveira (2000) temos que o termo *imaginário pode* ter sido inspirado nos trabalhos de Cardano, conhecidos de René Descartes (1596-1550), matemático francês que os cita em sua obra *La Geométrie* (1637). Nessa obra ele classifica as raízes de uma dada equação cúbica como reais ou imaginárias, podendo ser tanto estas como aquelas verdadeiras (positivas) ou falsas (negativas). Portanto, segundo Oliveira (2000), a invenção termo *imaginário* com relação às raízes não reais de uma equação é creditada a Descartes uma vez que este faz uso do termo extensivamente em sua obra. Nessa mesma época, alguns matemáticos ingleses viam com desprezo as descobertas de Cardano, pois julgavam ser uma mera reformulação das teorias do matemático inglês Thomas Harriot (1560-1621).

John Wallis (1616-703) é outro inglês que em sua obra '*Álgebra*' (1673) procura dar sentido aos números imaginários tanto em termos algébricos como em termos geométricos. Wallis interpreta essas entidades como meios proporcionais entre uma grandeza positiva e uma grandeza negativa e é esta interpretação que vigora no último quarto do século XVII. Porém, alguns problemas de natureza ontológica ainda persistiam, pois ainda não tinham conseguido resolver alguns absurdos no que diz respeito ao fato de os matemáticos quererem fazer dos números complexos uma extensão dos números reais sem prescindirem de propriedades que julgavam obrigatórias.

Raízes quadradas de números negativos continuaram a aparecer nos séculos XVII, XVIII e não só no estudo de equações algébricas. O que mais perturbava os matemáticos era que essas raízes – na época, símbolos sem significados – manipulados de acordo com as regras usuais da álgebra, forneciam resultados corretos que às vezes não podiam ser obtidos de outra maneira.

O século XVIII também foi de expressivo avanço para o desenvolvimento da teoria dos números complexos. O matemático suíço Leonardo Euler (1707-1783) revela alguns resultados parciais sobre os imaginários em sua correspondência científica de 1740. Nela, Euler anuncia a descoberta da fórmula $e^{+x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}} = 2 \cos x$. Esses expoentes imaginários aparecem em publicações, pela primeira vez, num artigo do autor em 1743. Wussing (1998) atribui a esse matemático a criação do símbolo atual **i** para a unidade imaginária, relatando que em 1777 ele introduziu esse símbolo e operou com ele como se $\mathbf{i}^2 = -1$, sendo impresso pela primeira vez em 1794. A esse respeito, Millies (1993) afirma que esse símbolo se tornou amplamente aceito após seu uso por Gauss em 1801.

O primeiro autor a dar uma representação geométrica sistemática aos números complexos foi o agrimensor norueguês Caspar Wessel (1745 -1818) através de sua obra *Ensaio Sobre a Representação Analítica da Direção,* publicada em 1799 sob o patrocínio da Real Academia da Dinamarca. Ele também buscou dar um sentido geométrico às operações admissíveis entre esses números.

Até meados de 1831 os números complexos ainda tinham o *status* de símbolos, que por razões misteriosas forneciam resultados reais e, por vezes úteis, o que justificava sua existência; supriam métodos e soluções para problemas de outro modo intratáveis; fantasmas, muitas vezes invocados, mas nem sempre com desconfiança.

Foi uma publicação de Gauss, em 1831, que mudou bastante essa forma de conceber esses números. Seu pensamento consistia em olhar para os números *a* e *b* do símbolo $a+b\sqrt{-1}$ como coordenadas de um ponto em um plano cartesiano e, assim, associar a cada um desses símbolos um ponto P do plano e reciprocamente. Deu também uma interpretação geométrica, visível, para a adição e multiplicação dos símbolos.

Com esse breve histórico, buscamos mostrar um panorama geral dos principais fatos e acontecimentos que deram origem aos números complexos. Ainda que mereça nossa atenção, não nos estenderemos ademais nesse histórico uma vez que nossa intenção é de mostrar ao leitor os principais caminhos perseguidos para a criação desse conceito incluído as operações básicas usando esses números uma vez que nossa seqüência didática também aborda essas operações.

CAPÍTULO III

A FASE EXPLORATÓRIA

Como já mencionamos anteriormente, a realização do trabalho se deu em três etapas. A primeira, a qual denominaremos de estudo piloto I, ocorreu no período de 27/09/2006 a 04/10/2006 em uma escola pública com um grupo formado por alunos voluntários constituintes de várias classes dos terceiros anos do ensino médio daquela escola que ainda não conheciam os números complexos. O grupo foi formado exclusivamente para a pesquisa e serviu como uma espécie de indicador da seqüência a ser utilizada no presente estudo.

Após algumas reformulações e adaptações, entramos na segunda aplicação da pesquisa, que denominamos de estudo piloto II. Essa etapa se realizou no período de 26/10/2006 a 07/11/2006 em outra escola da rede pública de ensino, dessa vez em uma turma de terceiro ano regular da instituição e que também não tinha iniciado o assunto de números complexos.[9]

Finalizando as etapas, entramos para a aplicação final do trabalho que denominamos de estudo definitivo, realizado em outra instituição de ensino em que os alunos também se enquadravam nos requisitos especificados por nós. Essa etapa ocorreu entres os dias 16/04/2007 e 21/05/2007 em uma instituição da rede pública de ensino da cidade do Natal.

3 ESTUDO DEFINITIVO : Terceira Etapa

Após analisar os trabalhos de pesquisa realizados nas duas etapas anteriores, fizemos uma reflexão do percurso e dos procedimentos metodológicos utilizados e decidimos por ampliar esse estudo em mais uma fase, entendendo que dessa forma poderíamos ter os resultados positivos maximizados, uma vez que as análises anteriores nos deram subsídios para que retificássemos alguns pontos importantes concernentes ao êxito desse trabalho

---

[9] A descrição detalhada do percurso metodológico da primeira e segunda fase desse estudo (estudo piloto I e estudo piloto II respectivamente) estão descritas nos anexos 2 e 3 desse trabalho.

que de outras vezes não havíamos atentado, talvez por inexperiência, em um trabalho dessa natureza.

Percebemos, por exemplo, que não poderíamos ter desprezado o fato da possibilidade dos alunos não terem, em si, amadurecido os conceitos que são pré-requisitos para esse trabalho, isto é, poderíamos ter pensado previamente em um trabalho de avaliação diagnóstica e, em decorrência dos resultados, um novo trabalho para buscar retomar alguns conceitos que eles já não lembravam ou possivelmente não foram atingidos em séries anteriores.

Dessa forma, poderíamos aumentar a margem de confiabilidade e qualidade dos objetivos propostos em nossa seqüência. Diante dos argumentos expostos, optamos por repetir esse trabalho, dessa vez com outro público: alunos de outro estabelecimento de ensino. Buscamos retificar dessa vez esses equívocos e outros de menor projeção que detectamos ao longo dos percursos anteriores. A esta fase denominaremos de estudo definitivo, e é com base nele que vamos avaliar a viabilidade deste trabalho.

3.1 O Ambiente da Pesquisa

3.1.1 A Escola

O local escolhido para a execução dessa fase foi a Escola Estadual Nestor Lima localizada na Rua São José, bairro de Lagoa Nova. Não houve um fator determinante para a escolha da instituição, exceto a de que os alunos de terceiro ano do ensino médio ainda não tivessem visto o conteúdo de números complexos, o que coincidiu com os nossos propósitos.

Essa instituição de ensino foi fundada em 06 de agosto de 1964 através do ato de criação 4250-64 e só começou a funcionar, em princípio com o ensino fundamental I, a partir de 16 de dezembro de 1976, através do ato de autorização 274-76. Em 1980, teve seu ato de reconhecimento publicado em diário oficial e só em meados de 2004 passou a atuar como escola de ensino fundamental e médio.

Atualmente a escola possui doze salas de aula, mas funcionam apenas oito, e possui uma infra-estrutura ainda modesta, contando com uma biblioteca, sala de vídeo e laboratórios de ciências e informática, estes dois últimos ainda em construção. A escola também possui uma quadra de esporte, onde são realizadas as aulas de educação física. Funciona nos três turnos, sendo que no turno matutino a instituição trabalha apenas com o ensino fundamental I, no vespertino a escola atende ao público discente do ensino fundamental II e ensino médio e no noturno trabalha apenas com ensino médio.

Esse trabalho foi realizado no turno vespertino, onde estão matriculados 312 alunos, 159 deles estão no ensino fundamental e os 153 restantes no ensino médio, sendo que esse nível de ensino a escola possui apenas uma turma de 3º ano, que foi exatamente o público alvo de nosso estudo.

A equipe pedagógica desse turno é constituída por 12 professores das diversas disciplinas curriculares, uma coordenadora pedagógica, a direção e a vice-direção que se revezam por turnos.

A aplicação dessa pesquisa nesse estabelecimento de ensino ocorreu com alunos do terceiro ano do turno vespertino da turma A entre os períodos de 16/04/07 a 21/05/2007, com cada intervenção tendo uma duração média de duas horas e trinta minutos.

3.1.2 A Turma

A turma escolhida para ser o público alvo dessa etapa da pesquisa foi a dos alunos do único terceiro ano do turno vespertino, que era composta por 31 alunos dos quais apenas 29 freqüentavam as aulas, mas geralmente a assiduidade se concentrava em torno de 25 alunos, dentre os quais, dois ou três sempre chegavam além do horário estabelecido, devido à incompatibilidade de seus horários com cursos ou outras tarefas individuais.

A sala era composta[10] por 21 alunos do sexo feminino e 08 do sexo masculino e 50% da turma tinham 17 anos de idade, 40% tinham 18 anos, 5% tinham 19 anos e os outros 5% tinham 20 anos de idade[11].

Durante o período em que tivemos contato com esses alunos, pudemos perceber que eles eram muito benquistos pelos professores e tinham boas

[10] Total dos alunos que estavam freqüentados as aulas nesse período.

[11] Para essa estimativa não usamos o número total de alunos da sala porque não conseguimos ter acesso a esse dado (idades) de todos os alunos, então usamos para tal uma amostra de 20 alunos do total dessa turma.

referências na escola por ser uma turma relativamente disciplinada e participativa, tanto em relação às aulas das disciplinas, como também aos eventos que exigiam a participação dos alunos da escola. Para ilustrar podemos citar, por exemplo, o caso das Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas, cuja inscrição para a participação estava ocorrendo nesse período em que estávamos atuando com eles e cuja adesão da turma foi de cem por cento, por opção da própria turma.

O grupo nos pareceu ser bem integrado no que se refere aos vínculos de amizades, tanto entre eles mesmos como também com os seus professores. Muito provavelmente, o fato de ser uma turma relativamente pequena e outros fatores citados podem ter criado condições mais favoráveis para essa relação de amizade existente como também pelo fato de ser a única dessa série existente naquele turno.

Em conversas informais que tivemos com eles, também pudemos averiguar que praticamente toda a turma desejava fazer vestibular para ingressar na faculdade. Os cursos escolhidos eram, em sua maioria, da área de humanas e biomédica; um ou dois citaram a área de exatas.

Outro diferencial da turma em relação àquelas das etapas anteriores, é que essa, foi mais assídua e participativa no que diz respeito às discussões que surgiam durante as leituras compartilhadas e às questões inerentes às próprias atividades da seqüência. Na verdade, das turmas que tivemos contato, essa foi a mais homogênea em relação a esses itens. Durante todo o tempo em que intervimos junto a eles, de um modo geral, eles se mostraram muito receptivos e dispostos a participar desse trabalho, apesar de também apresentarem algumas limitações.

Quando nos remetemos às limitações, estamos nos referindo às dificuldades que detectamos em boa parte da turma no que se refere às operações com a álgebra, limitações essas acumuladas de séries anteriores e que dificultavam o bom entendimento de conhecimentos importantes, tais como as operacionalizações básicas envolvendo equações quadráticas.

A exemplo da etapa anterior, essa turma foi dividida em grupos de dois alunos, exceto em três casos: no primeiro, uma aluna pediu para fazer sozinha; no segundo, o grupo ficou com três integrantes já que restou um número ímpar de alunos, e o último foi formado com três integrantes que foram justamente os que haviam faltado no primeiro dia de nossa atuação em sala. Assim, preferiram formar um grupo juntos já que iriam todos começar de um mesmo nível da seqüência.

Nosso interesse por grupos em números mais reduzidos era o de possibilitar uma interação mais harmônica com o trabalho sem deixar que algum componente ficasse excluído do processo, pois no teste piloto I (primeira etapa) onde aconteceu de trabalharmos com grupos maiores, percebíamos que algum aluno sempre acabava por ficar desfavorecido do processo, uma vez que essa quantidade favorecia a dispersão, tanto por dificuldades conteudinais individuais ou por desinteresse desse aluno em relação à disciplina de matemática, o que acarretava na auto-exclusão desse aluno da execução do trabalho, enquanto que outros componentes faziam o trabalho por ele. O trabalho em grupos mais reduzidos além de minimizar essa dificuldade, propiciava uma maior interação entre os membros e um maior rendimento do trabalho coletivo.

3.1.3 Breve Descrição da Seqüência de Atividades Estruturadas Utilizada

Como se trata de uma seqüência de atividades estruturadas, buscamos organizá-la de tal modo que cada uma das questões da atividade reforçasse a anterior e pudesse subsidiar a seguinte (FOSSA, 2001).

A **atividade 00** foi estruturada em dois blocos, cada uma contendo três questões, de modo que cada uma dessas questões tivessem propositalmente estruturas bem similares para que o aluno, à medida que fosse interagindo com elas, pudesse gradativamente ter condições de perceber essa semelhança e sentir-se incitado a questionar da viabilidade de respostas para a terceira de cada bloco, já que essas foram elaborada, em cada um dos blocos, de modo a não ter solução real e somente complexa.

A **atividade 01** é composta de três itens (a, b e c) e com ela, objetivávamos levar o aluno a manipular os resultados encontrados na questão (**c**) – atividade 00 – utilizando somas e produtos dos mesmos, tal como descritos no próprio enunciado do problema. Dessa forma, buscávamos levar esse aluno a verificar que, em assim operando, ele poderia confirmar a descrição do problema. Com tal procedimento, espera-se que o aluno possa questionar-se sobre a validade desses resultados e sentir-se mais estimulados a aceitá-los como verdadeiros. O item (c) dessa atividade seria uma espécie de verificador do item anterior, isto é, buscáva averiguar se nossos objetivos em relação ao item (b) teriam sido atendidos; queríamos que argumentassem se após a feitura do item anterior, eles passaram a acreditar na existência de uma solução para a questão (c) da atividade 00, mesmo ainda não sabendo operar com a raiz quadrada de um número negativo.

Conforme já comentamos anteriormente, nossa seqüência foi estruturada de modo que as atividades estivessem associadas com a história da matemática, ou seja, as atividades buscam resgatar alguns componentes históricos que foram importantes no processo de construção dos números complexos. Desse modo, buscávamos, em algumas ocasiões ,tal como na **atividade 02**, oportunizar a esse aluno fazer uma espécie de interação com a história. Para tanto, nos reportamos ao século XVI, onde a situação em relação aos complexos era de incertezas, pois não havia regras claras para se trabalhar com uma estrutura do tipo $b\sqrt{-1}$, isto é, não se sabia se esses elementos seriam o produto de um número real *b* por algo que evidentemente não é um número real ($\sqrt{-1}$), como também não se sabia o verdadeiro significado da estrutura $a + b\sqrt{-1}$ (soma de um número real com o quê?). Mesmo diante de tantos questionamentos, Gerolamo Cardano operou com essas estruturas (OLIVEIRA, 2000).

Foi com base nesse contexto, que buscamos elaborar uma atividade que ao mesmo tempo em que levasse esse aluno a vivenciar as mesmas dificuldades enfrentadas pelos matemáticos desse período, tivesse um componente algébrico que permitisse a manipulação aleatória por parte desse aluno, e também permitisse estimular a capacidade criativa nesse processo de aquisição do conhecimento.

A elaboração da **atividade 03** tem inspiração em uma concepção de ensino da álgebra que procura reunir o lado pedagógico da álgebra na resolução de problemas com a fundamentação através de recursos visuais. (NETO, 1998).

Em sua tese de doutoramento, o autor citado comenta essa concepção matemática como sendo um resgate da história da matemática que está sendo chamada de Álgebra Geométrica Grega para tornar visíveis certas identidades algébricas.

Optamos por essa abordagem nessa atividade, por acreditar, mediante observações feitas no exercício de sala de aula, que um componente visual poderia ser um ente facilitador para que o aluno pudesse fazer uma transposição entre as abordagens geométrica e algébrica. Através das entrevistas buscamos também averiguar se os alunos conseguiram perceber a relação entre essas abordagens.

Na **atividade 04**, objetivávamos que o aluno pudesse experimentar e refazer experimentações semelhantes àquelas feitas por Euler, quando substituiu a raiz quadrada de -1 por i, e por Bombelli, quando criou as regras fundamentais para a multiplicação de números complexos.

Assim, buscávamos com que o aluno pudesse adquirir as noções iniciais de como operar a adição e a multiplicação de números complexos e também fosse capaz de extrair a raiz quadrada de um número negativo.

Fossa (2001) comenta que as atividades devem conter um componente simbólico onde o aluno registra por escrito os resultados da atividade para promover a segunda abstração (capítulo II desse trabalho) e facilitar a manipulação com símbolos abstratos. Dessa forma, buscamos elaborar uma atividade nessa seqüência que pudesse contemplar esses componentes

3.2 A Aplicação da Seqüência

A primeira intervenção com a turma foi um momento bem informal onde fizemos as nossas devidas apresentações; explicamos do que trata o presente estudo; perguntamos se eles lembravam de alguns conceitos importantes para essa seqüência[12] e a maioria respondeu não lembrar direito; demos espaço para alguns questionamentos da turma e finalizamos perguntando se seria desejo da turma participar desse trabalho. A essa pergunta, todos responderam positivamente, então já combinamos o dia para um estudo dirigido, ocasião na qual iríamos relembrar alguns conteúdos de séries anteriores que seriam pré-requisitos para as atividades.

A aula de revisão (conteúdos pré-requisitos) foi mediada por nós e também assistida pelo professor de matemática de turma; teve uma duração de duas horas/aula e foi muito proveitosa, pois houve uma participação muito

[12] Esses conceitos (pré-requisitos) foram mencionados na página 24.

intensa dos alunos, inclusive alguns disseram que sem esse momento não relembrariam da maioria dos conteúdos. Pudemos então perceber a satisfação da turma, uma vez que demonstravam ter conseguido relembrar aqueles conteúdos.

Após essa fase de preparação, marcamos o dia para iniciarmos o trabalho com as atividades estruturadas. No dia 16/04/2007 iniciamos o trabalho com os alunos onde foi possível a realização de todas as questões que compõem a atividade 00. Nessa instância, já percebíamos que a revisão introdutória que fizemos teve um efeito bem positivo, pois era visível a empolgação dos alunos em suas atuações com as atividades da seqüência. Comparado às turmas anteriores, não tiveram grandes dificuldades em resolver os problemas propostos e até se dispuseram a abdicar do horário do intervalo para continuar a resolver as questões propostas.

Entretanto, tal como nas aplicações anteriores, também percebíamos, em alguns alunos, problemas em relação a destreza e maturidade no que concerne ao trabalho com álgebra. Alguns deles, mesmo com o subsídio da aula introdutória mencionada, ainda buscaram resolver os problemas (questões) partindo do método de tentativa e erro. No entanto, percebemos mais adiante que os que assim optaram, logo resolveram buscar novas alternativas para resolver os mesmos problemas partindo da elaboração e resolução de equação do 2º grau, pois segundo relatos colhidos entre eles; “assim daria mais garantia de que as respostas obtidas, inicialmente pelo método de tentativa e erro, estariam corretas”.

O trecho anterior poderia ilustrar claramente uma nova concepção que começa a aparecer entre esses alunos, isto é, de que a resolução de problemas partindo de resolução de equações poderia ser uma ferramenta eficaz para se encontrar soluções, pois, não satisfeitos com a validade de suas respostas pelo primeiro método, eles buscaram respaldo no método algébrico para validar suas soluções.

Outro fato observado concernente à resolução de equações quadráticas é que, de modo geral, eles ainda tinham muitas incertezas em relação a que procedimento deveriam seguir com relação ao discriminante da equação, isto é, tinham dúvidas ainda bem introdutórias do tipo: “devo continuar a resolução quando o discriminante dá zero?”*;* “quando o discriminante dá negativo aprendi que não devemos continuar a conta, e agora deu negativo, como faço?" O primeiro tipo de questionamento foi facilmente desfeito com a intervenção do professor incentivando-os no sentido de que fossem adiante na resolução para ver se realmente seria possível. Quanto ao segundo, procedemos da mesma forma, o que surtiu efeito pois, a partir desse momento, os alunos passaram a desconfiar da viabilidade de realmente continuar a resolver a equação, ou seja, passaram a ter uma mudança de atitude frente a um problema daquela natureza, algo que até então não fariam, pois, como eles próprios relataram, aprenderam inicialmente que não deveriam continuar a resolução quando o discriminante obtido fosse negativo e no entanto, a partir daquele momento, já estavam tendenciosos a investigar a continuidade da resolução .

Muito provavelmente eles também perceberam a semelhança estrutural existente entre essas questões e se questionaram porque aquela também não haveria de ter solução?. Esse fato, segundo nossa interpretação, foi muito positivo uma vez que ratifica o que já ocorrera na segunda etapa mostrando que essa seqüência pode motivá-los a ir adiante na resolução de equações com discriminantes negativos.

Devido ao fato de nos encontrarmos em um período que antecedia as provas do primeiro bimestre, os professores necessitaram de seus horários para poderem terminar seus conteúdos planejados, aplicarem seus devidos trabalhos e executarem as revisões dos respectivos conteúdos. Dessa forma, só pudemos ter a nossa segunda intervenção no dia 07 de maio de 2007, que durou o período de três aulas de 50 minutos.

Durante esse encontro, fizemos uma retomada da atividade 00, feito anteriormente e em seguida pedimos que cada grupo fizesse uma nova leitura de todo o trabalho executado para que fosse capaz de relembrar e argumentar sobre toda a trajetória e estratégias utilizadas na resolução das respectivas questões (FOSSA, 2001).

Devido ao intervalo de tempo entre esse encontro e o anterior, tivemos que utilizar parte do tempo que tínhamos para refazer um trabalho de revisão dos conceitos que são pré-requisitos para a resolução da seqüência, pois grande parte dos alunos demonstrou não mais lembrar deles.

Agindo dessa forma, pudemos observar que, de modo geral, a turma logrou êxito com o desenvolvimento da atividade 01, apesar de também observarmos que muitos alunos ainda apresentavam muitas dificuldades aritméticas no que se refere à operacionalização de números.

Em seguida, organizamos as cadeiras em formato circular para iniciarmos a leitura compartilhado sobre a parte histórica do desenvolvimento dos números complexos.

Procuramos envolvê-los nessa leitura buscando fazer uma espécie de analogia das dificuldades e indagações que teve Cardano ao tentar solucionar um problema semelhante àquele que também haviam tentado (ver apêndice **A**, atividade 00, questão c). Sempre que necessário, parávamos e comentávamos alguns trechos do texto para enfatizar alguns pontos que seriam importantes na resolução das próximas questões.

Nossa terceira intervenção ocorreu no dia seguinte, 08 de maio de 2007, e utilizamos para tal um período de duas aulas de 50 minutos. Iniciamos a atividade 02 que, segundo nossa observação, também logrou êxito, pois todos tentaram solucionar essa atividade buscando fundamentá-la com argumentos matemáticos que justificassem as operações pedidas.

Posteriormente nos reorganizamos em formato circular para iniciarmos o segundo momento de leitura compartilhada a qual também teria informações pertinentes ao trabalho em decurso e também serviria de base para a atividade seguinte (atividade 03). A atividade mencionada transcorreu sem grandes problemas, uma vez que a maioria dos alunos conseguiu marcar os pontos no eixo de coordenadas corretamente. Entretanto, antes de iniciarem esse procedimento, parte da turma precisou de explicações do professor aplicador para simplificar o radical $\sqrt{-16}$.

Nossa quarta e última intervenção em sala de aula foi realizada no dia 21/05/2007. Aproveitamos os primeiros momentos da aula pra retomar as resoluções feitas anteriormente por eles, em seguida fizemos uma nova retomada histórica em forma de leitura compartilhada na qual enfatizamos a importância do matemático Leonardo Euler nesse processo de criação como também de Rafael Bombelli com a operacionalidade aritmética desses números.

Ainda fizemos uma releitura das regras fundamentais da multiplicação dos números complexos criadas por Bombelli, associando cada uma delas à escrita matemática usual que usamos atualmente.

Após essa etapa, iniciamos a atividade de número 04. Oportunizamos a esses alunos que pudessem fazer a substituição do elemento $\sqrt{-1}$ pelo símbolo *i* tal como sugeridas por Euler, como haviam visto na leitura compartilhada. Em seguida tiveram oportunidade de operar com alguns números complexos, já no formato como conhecemos atualmente.

É importante ressaltar que todo o processo foi mediado com diálogos entre professor e alunos, no sentido de que cada um deles pudesse expressar as estratégias usadas e a forma de entendimento de cada uma das atividades propostas.

Ao fim desse trabalho, ainda abrimos um espaço para que todos pudessem socializar as estratégias usadas e confrontá-las com outras, usadas por outros grupos, o que também está em consonância com as idéias de Fossa (2001).

> [...] Outra característica das atividades em tela é que elas deveriam conter um componente oral. Isto é, o aluno deveria verbalizar seu entendimento da atividade tanto para favorecer a primeira abstração para o conceito da própria atividade quanto para favorecer a integração do novo conceito com os conceitos já construídos. (FOSSA, 2001, p. 79)

Sobre as atividades de sala de aula, esse autor também defende que essas deverão conter um componente simbólico em que o aluno registra por escrito os resultados das atividades, tanto para facilitar a manipulação de símbolos abstratos, como para promover a segunda abstração que, segundo ele, pode se dar de duas maneiras: ou o aluno poderá abstrair os conceitos das várias atividades com a mesma estrutura matemática ou ele pode entender o conceito de uma determinada atividade em termos de conceitos matemáticos que ele já tem construído.

Tal como fizemos com as respostas das turmas anteriores a participar dessa pesquisa, buscamos categorizar as soluções das questões da atividade 00. Os significados das categorizações utilizadas nessa parte da pesquisa estão descritos abaixo:

C – 1: Elaborou a equação, resolveu e chegou à resposta correta.

C – 2: Elaborou a equação, mas teve dificuldade em prosseguir na resolução.

C – 3: Não conseguiu equacionar o problema, mas chegou a alguma solução.

C – 4: Não conseguiu elaborar uma equação e nem a resposta.

C – 5: Conseguiu elaborar a equação, resolveu e chegou à outra solução que não é correta.

Dessa forma enquadramos essas respostas segundo as categorizações acima, mostrando os dados em valores absolutos.

Categorização das Respostas da Atividade 00 (alunos da 3ª etapa)

		Categorias					**Total (grupos)**
		C1	**C2**	**C3**	**C4**	**C5**	
Questões da atividade de número 00	**a**	10	00	01	00	01	12
	b	10	02	00	00	00	12
	c	09	01	00	00	02	12
	d	09	00	00	01	02	12
	e	09	01	00	01	01	12
	f	04	01	00	01	06	12

3.3 Análise das Atividades

Para essa etapa, buscamos nos basear no pensamento e nos princípios defendidos por Richard Skemp. Para tanto, achamos pertinente, antes, esclarecer ao leitor significados alguns termos e princípios definidos e utilizados na literatura desse autor.

- Ruído

  Segundo Skemp, são aqueles dados que são irrelevantes em uma dada comunicação.

- Primeiro Princípio das Aprendizagens Matemáticas
  Os conceitos mais elevados que uma pessoa já tem não podem ser comunicados mediante uma definição, mas somente preparando essa pessoa para enfrentar uma coleção adequada de exemplos.

- Segundo Princípio das Aprendizagens Matemáticas
  Visto que em matemática esses exemplos (citados no primeiro princípio) são invariavelmente outros conceitos, é necessário, em princípio, assegurar-se que já se encontram formados na mente do aprendiz.

Na primeira atividade (atividade 00), almejamos fazer com que o aluno percebesse, através das questões propostas, que as expressões algébricas podem servir como modelos para problemas do mundo físico e não são destituídas de sentidos como eles geralmente aprendem na maioria das realidades de ensino mais tradicionais. Também buscamos examinar as formas de manipulações algébricas utilizadas por eles para encontrar as soluções desses problemas.

Em princípio, buscamos observar se os alunos conseguem abstrair as partes do problema que são relevantes para sua solução. Isso facilitaria a construção de um modelo matemático que tivesse eficácia para encontrar as soluções, uma vez que minimizaria os possíveis ruídos existentes (SKEMP, 1980).

Análise da atividade 00

Questão a: *Dividir 14 em duas partes tal que o produto delas seja 40. Quanto medirá cada uma dessas partes?*

Nessa questão a maior parte das respostas dos alunos se enquadrou na categoria C – 1 (83%), o que, para os objetivos desse trabalho, é muito positivo, uma vez que denota que a maioria da turma conseguiu fazer corretamente uso de um modelo matemático para resolver problemas.

Muitos desses alunos relataram que, antes dessa atividade, não costumavam resolver problemas matemáticos através de modelos matemáticos do tipo equações porque não sabiam os contextos em que poderiam utilizá-las, isto é, não tinham alguma noção de que as equações são modelos que servem para resolver problemas ou, para alguns que tinham essa noção, apresentavam dificuldades em equacionar o problema.

Tal fato ocorria provavelmente devido ao fato de terem aprendido a manipular equações descontextualizadas de algum problema que lhes deram origem, por isso optavam por buscar encontrar as soluções através do método de tentativa e erro, tal como ocorrera na maioria dos casos.

Essa peculiaridade também ratifica nossa atitude de repetir essa seqüência em mais uma turma, tomando os cuidados de revisar os conteúdos, pré-requisitos para a atuação dos alunos na seqüência de atividades, o que também está em consonância com o pensamento de Skemp (1980) quando define o segundo princípio da aprendizagem matemática. Sobre isso, o autor ainda argumenta:

> A outra conseqüência (do segundo princípio) é de que os conceitos que irão contribuir para a formação de novos conceitos necessitam para cada nova etapa de abstração estar disponíveis. Não é suficiente que tenham sidos aprendidos no passado: tem de estar disponíveis quando se necessitam. (SKEMP, 1980, p.39)

Por esse motivo, Skemp defende que, sempre que se faça necessário, o professor possa ter disponibilidade para retroceder com aqueles conteúdos que já não se sabe se são lembrados pelos alunos: ”a revisão apropriada, planificada, por um professor, será especialmente útil para os principiantes”. (SKEMP, 1980)

Houve um grupo cuja resposta se enquadrou na categoria C – 3. Na entrevista, buscamos investigar os motivos que contribuíram para que esse grupo não conseguisse equacionar o problema. Segundo argumentos do grupo, a falta de costume de resolver problemas se utilizando de equações e a pouca habilidade na operacionalização algébrica das mesmas, fez com que optassem pelo método de tentativa e erro, uma vez que na questão não especificava que método deveria ser utilizado.

Um outro grupo se enquadrou na categoria C – 5. Apuramos na entrevista, que haviam equacionado corretamente o problema, porém se atrapalhavam algumas vezes com as regras aritméticas das operações básicas usando números inteiros, logo relataram que tiveram muitas dificuldades ao resolver as equações. Desse modo, devido a alguns desses equívocos no processo de resolução, acabaram por encontrar outras soluções que não as corretas do problema.

Questão b: *Dividir 10 em duas partes tal que o produto delas seja 24. Quanto medirá cada uma dessas partes?*

Nessa questão a maioria das respostas foram classificadas com a categorização C – 1 (83%), fato esse que também ratifica os nossos pressupostos de que os alunos teriam menos dificuldades em resolver os demais problemas, uma vez que percebam a semelhança estrutural de problemas de cada bloco.

O aluno João, quando entrevistado, deu em seu depoimento um dado que parece ilustrar esse fato:

> Achei fácil porque a gente sabendo resolver a primeira dava pra saber resolver todas as outras.

Outro depoimento que ratifica essa posição é dado pelo aluno Alan, quando diz:

> Se a gente fizer a questão (a) de um jeito, a questão (b) vai ser quase do mesmo jeito.

Os alunos Hugo, Aline e Joafly, todos de grupos distintos, também demonstram ter argumentos similares, quando relatam que: *o primeiro item é um pouco mais difícil, mas a partir dele os outros ficam mais fáceis.*

Entretanto, houve um grupo que, apesar de equacionar corretamente o problema, não conseguiu ter êxito na resolução. Tal fato foi investigado e também ilustra outro caso em que os integrantes apresentavam dificuldades nas operações aritméticas básicas utilizando números inteiros. Uma das principais dificuldades foi em relação aos jogos de sinais nas operações de multiplicação e divisão. Sobre esse respeito, Neto (1998) diz:

> A compreensão da aritmética pelos alunos é fundamental para o entendimento de álgebra. Às vezes as dificuldades ou erros detectados no ensino de álgebra se devem mais a uma compreensão precária da generalização de relações e procedimentos aritméticos do que com a própria matéria de álgebra. (NETO,1998, p.48)

Concordamos com o pensamento do autor, uma vez que observamos que a maior parte dos equívocos detectados nas resoluções dos alunos se trata de uma questão de má compreensão das convenções aritméticas.

Entretanto, um fator positivo nessa questão é que nenhum dos grupos obteve categorização C – 3, C – 4 ou C – 5 , isto é, todos conseguiram equacionar corretamente o problema, apesar de ainda haver uma pequena porcentagem daqueles que ainda não conseguiu resolver corretamente devido aos motivos mencionados.

Questão c: *Dividir 10 em duas partes tal que o produto delas seja 40. Quanto medirá cada uma dessas partes?*

Na questão (c) a maioria dos alunos se enquadrou na categoria C – 1 (75%). Observamos uma pequena redução em relação à C – 1 se compararmos com as porcentagens dos itens anteriores. Isso ocorreu devido ao fator surpresa que foi o aparecimento de uma raiz quadrada negativa que causou muita estranheza por parte de alguns alunos, uma vez que ainda não sabiam como prosseguir quando chegavam nesse ponto. Assim, tivemos 17% dos grupos que se enquadraram na categoria C – 5.

A pouca habilidade aritmética de alguns alunos, os equívocos cometidos com os jogos de sinais e as dificuldades operatórias com a soma algébrica acabaram por acarretar alguns erros aritméticos muito comuns encontrados nos cálculos dos estudantes. Podemos destacar, por exemplo:

$$x = \frac{-10 \pm 2\sqrt{-15}}{-2} = \frac{-8 \pm \sqrt{-15}}{-2} = 4 \pm \sqrt{-15}$$

Outros ainda modificavam a resposta a que tinham chegado por não conceberem como solução válida para um problema, algo que contém uma raiz quadrada de um número negativo, desse modo 8% dos grupos se enquadram na categoria C – 2.

A raiz quadrada de um número negativo causou estranheza, como já pressupúnhamos, mas, ainda assim, 50% dos grupos entrevistados afirmaram que essa questão teria solução, mesmo sem saber como desenvolver o cálculo dessa raiz quadrada. Tal afirmação está baseada nas analogias que fizeram com as questões anteriores, ou seja, as letras (a) e (b). Foi dessa forma que, segundo relatos dos alunos, eles puderam observar a semelhança estrutural entre os problemas e passaram a se questionar: *se os problemas anteriores têm solução, esse, que também é bem parecido, por que não terá?* Esse pensamento parece estar ilustrado na fala de alguns alunos que foi transcrita a partir das entrevistas.

> [...] Percebemos que teria solução por causa das outras (anteriores)[...]*(Luana e Eliedna)*

> [...] Mesmo sem saber como continuar, pois não sabíamos o valor de $\sqrt{-1}$, as questões anteriores nos fizeram achar que essa também questão teria solução. (Romeika e Marina).

> [...] Com base nas questões que fizemos e segundo a proposta que estávamos entendendo desse estudo, tínhamos certeza que mais tarde iríamos encontrar a solução desse problema [...] *(Daiane e Sheila)*

No entanto, temos uma outra parcela dos grupos que não se sentiu persuadido da mesma forma, diante das questões anteriores, a acreditar que essa questão teria solução. Dentre os alguns argumentos para tal fato, destacaremos alguns:

> [...] como não estava conseguindo resolver a $\sqrt{-1}$, achei que talvez pudesse ter errado em algum lugar do calculo, conferi e vi que tava tudo certo, logo achei que o problema não tinha solução [...]. *(João e Renato)*

> [...] No começo da questão, estávamos convencidos de que teria solução, mas ao encontrar a $\sqrt{-1}$, pelo fato de não saber como continuar, achamos que o problema não mais teria solução [...]. (*Rafaela e Derline)*

Todos os argumentos dessa parcela de alunos aludem à dificuldade de continuar a resolução no instante em que se depararam com $\sqrt{-1}$. Um dos grupos relatou que*, exatamente por esse motivo, não poderiam encontrar o valor de x' e x"***.**

Entretanto, esperávamos um percentual maior de respostas afirmativas em relação à existência dessa raiz, uma vez que nossa proposta também seria a de provocar nos alunos a necessidade e curiosidade de extrair raízes quadradas de valores negativos, porém não estavam em nossos pressupostos as resistências de alguns alunos em romper alguns paradigmas que refletem as dificuldades, ainda muito fortes, de uma realidade de ensino-aprendizagem trazidas ainda do ensino fundamental.

Questão d: *Qual a medida do lado de um quadrado cuja área mais 96 resulta 20 vezes o seu lado?*

Nessa questão houve 75% das respostas que se enquadraram na categoria C – 1. Esperávamos ter um percentual ainda maior de respostas nessa categoria, uma vez que já vinham de uma série de questões onde precisavam desenvolver algum modelo matemático para resolvê-las.

Porém tivemos que levar em consideração alguns argumentos que explicam razoavelmente esse percentual. O primeiro deles é que os alunos apresentavam dificuldades de interpretação dos enunciados dos problemas, pois, como já mencionamos, não haviam trabalhado matemática nessa perspectiva, e, portanto, precisariam de um tempo maior trabalhando nessa modalidade para se adaptarem ao novo método de trabalho. Outro ponto é que as questões do segundo bloco de problemas tinham uma estrutura diferente daquelas do primeiro. Portanto, os alunos teriam que buscar um novo modelo matemático, nesse caso específico, outra equação com uma nova estrutura que satisfizesse as condições do problema.

Essa investigação nos fez perceber que os alunos não haviam desenvolvido algumas habilidades algébricas do tipo: escrever algebricamente “área de um quadrado”. Fez-se necessário nossa intervenção no intuito de ajudá-los nesse sentido, ainda assim tivemos 8% deles que não conseguiram equacionar o problema.

Outro ponto detectado é que, devido à pouca habilidade apresentada em equacionar problemas, alguns buscavam fazer essa atividade simultaneamente na medida em iam lendo o problema. Desse modo acabavam por cair em alguns equívocos, uma vez que as questões desse bloco (atividade 00) já se iniciam perguntando qual é a medida do lado de um quadrado, muitos buscavam lançar mão de um modelo que começa com a incógnita linear x e não quadrada x^2. Dessa forma, houve alguns equívocos na resolução dessas questões, de modo que 17% dos grupos se enquadraram na categoria C – 5.

Questão e: *Qual a medida do lado de um quadrado cuja área mais 100 resulta 20 vezes o seu lado?*

Nesse quesito houve 75% dos grupos que se enquadraram na categoria C – 1; 8% deles ficaram na categoria C – 2 ainda pelos mesmos problemas citados anteriormente em relação à manipulação aritméticas e algébricas das operações. Outros ainda permaneceram na C – 4 – os mesmos alunos que também haviam ficado com C – 4 na questão anterior.

Quando perguntamos a que atribuíam a não feitura do problema, eles alegaram não ter assistido à aula de revisão e também pelo fato de não estarem presentes na primeira aplicação do trabalho.

> [...] Achamos complicado, porque faltamos a aula de revisão e isso junto às nossa dificuldades de base ficou ainda pior.

Percebemos que os alunos sentiam muitas dificuldades em abstrair aquelas partes do problema que são relevantes para a solução do mesmo e consequentemente não conseguiam criar um modelo matemático para a sua resolução (SKEMP, 1980).

Procurando averiguar com mais detalhes esse fato, questionamos se não tinham percebido a semelhança estrutural dos problemas (questões). Eles relataram que no momento da entrevista, ao observar com mais atenção, acabaram percebendo essa semelhança, mas enquanto estavam na sala de aula buscando executar o trabalho, acabaram por não perceber essa peculiaridade, pois estavam resolvendo com mais rapidez, uma vez que haviam perdido a primeira aplicação junto com turma. Como permaneciam na dificuldade, preferiram deixar essa questão para depois e tentar fazer a questão seguinte.

Questão f: *Qual a medida do lado de um quadrado cuja área mais 101 resulta 20 vezes o seu lado?*

Nessa questão, ficaram na categoria C – 1 apenas 33% das respostas. Esperávamos ter um maior percentual de alunos contemplados nessa categoria, pois como já se tratava da terceira questão dentro dessa mesma estrutura, imaginávamos que pudessem ter percebido a semelhança. No entanto 08% se enquadraram na categoria C – 2, pois, não continuaram a resolução quando encontraram o discriminante negativo, ou seja, possivelmente não fizeram analogia com a questão (c) que também tinha na resolução um discriminante negativo e, no entanto foi passível de continuidade. Outros 08% ficaram na categoria C – 4, pois haviam faltado a aula relativa ao dia dessa atividade e tiveram dificuldades em prosseguir com a resolução. Metade dos grupos da sala foi enquadrada na C – 5, e os principais motivos averiguados para tal foram as deficiências de base nas operações aritmética e algébrica. Dentre os principais equívocos registrados, podemos destacar:

$$\Delta = (-20)^2 - 4.\,1\,.\,101$$

$$\Delta = -400 - 404$$

$$\Delta = 4$$

e

$$x = \frac{20 \pm 2\sqrt{-1}}{2}$$

$$x = \frac{22 \pm \sqrt{-1}}{2}$$

Transcrevemos acima alguns equívocos mais comuns registrados em relação à operacionalização dos sinais. Os alunos apresentavam dificuldades em perceber que existe uma expressão com somas e produtos e que existe, sim, a operação de multiplicação entre os fatores 2 e $\sqrt{-1}$. Assim, acabaram por desrespeitar o acordo de que os produtos se calculam antes que as adições.

Análise da atividade 01

Buscamos averiguar, através da análise das respostas obtidas nessa atividade e principalmente através dos depoimentos colhidos na questão 08 da entrevista (ver apêndice b), se essa atividade reforçou para eles a idéia de que a questão (c), atividade 00, realmente teria solução.

A noção, ainda incompreensível, da $\sqrt{-1}$ e as dificuldades aritméticas de base mencionadas anteriormente, causaram muitas dificuldades na resolução dessas operações com entes algébricos. Isso nos levou a dar atendimento quase individualizado a cada grupo para ajudá-los a desenvolver essas operações. Essa iniciativa rendeu êxito, uma vez que dos oito grupos consultados, sete saíram convencidos de que aqueles resultados encontrados por eles seriam os valores corretos e, portanto, aceitáveis para aquela questão, tal como podemos observar no trecho transcrito da fala de um aluno durante o desenvolvimento dessa atividade: “foi a partir dessa questão que a gente viu que com a raiz negativa dava pra fazer alguma coisa, por isso a gente continuou [...]”

Apenas um desses grupos falou não ter percebido esse questionamento, uma vez que, segundo eles, concentraram suas atenções nos cálculos da questão, já que sentiam muitas dificuldades em desenvolvê-las, tanto que ao ser questionado se a questão (c) teria solução responderam: “Não, porque vendo o problema está dando para notar que ele é muito complexo para o nosso entendimento”.

Examinando esse caso com mais atenção, pudemos averiguar que os componentes desse grupo haviam faltado às primeiras aulas e também não participaram da aula relativa à atividade 00, base para a atividade vigente. Dessa forma, começaram o trabalho pela questão (c) daquela atividade. Isso quer dizer que haviam perdido todo o percurso que a turma já havia trilhado, dessa forma tiveram menos tempo em relação à turma para “degustar” aquela solução encontrada. Isso provavelmente pode ter contribuído para explicar as dificuldades enfrentadas por eles, uma vez que também procuraram fazer as atividades ainda mais rápido para buscar acompanhar o restante da turma. O grupo ainda possuía muitas fragilidades no que diz respeito aos conceitos algébricos e as operações envolvidas.

Ainda assim, no decorrer da entrevista, enquanto revisávamos toda a seqüência junto a eles, percebemos que o grupo demonstrou ter adquirido mais maturidade de compreensão em relação às atividades, inclusive chegando a mudar de opinião em relação aos primeiros posicionamentos enquanto ainda desenvolviam as atividades da seqüência. Assim, demonstraram que houve aprendizado e passaram a entender mais claramente a inter-relação existente dessa atividade com a anterior.

Quando perguntávamos no item c dessa atividade se a questão c (atividade 00) teria solução, tivemos que 80% deles foram favoráveis ao *sim* e argumentaram que após enxergarem a descrição dos dados do problema através das operações pedidas (itens a e b), passaram a acreditar que aquela questão teria solução.

Análise da atividade 02

Procuramos averiguar através da questão 09 da entrevista (ver apêndice **B**) o que haviam compreendido sobre essa atividade e, segundo as respostas obtidas, parece que o objetivo foi cumprido, uma vez os argumentos dos alunos ratificam que houve essa interatividade com a história.

Extraímos alguns trechos contidos na entrevista onde os alunos acharam essa atividade importante devido à interação histórica a que foi desenvolvida: “foi importante porque sentimos as dificuldades que os matemáticos tiveram na história”.

Outro grupo também apresentou um argumento na mesma linha de pensamento:

> Foi importante porque a gente tentou fazer e não nos sentimos intimidados em errar, até porque os nomes importantes da matemática seguiram esse mesmo caminho.

Houve alguns grupos que observaram a importância do processo criativo oportunizado por essa questão: “essa questão foi importante porque nos tornou capazes de criar nossas próprias regras”.

Um dos grupos ainda relatou que procurou ver alguma semelhança dos conhecimentos que já havia construído para, a partir dele, fazer uma analogia com esses novos símbolos, o que nos reporta às estruturas conceituais de Skemp (1980).

> Eu fui tentando fazer com base nos cálculos que eu já tinha aprendido. Aí quando eram parecidas as coisas eu fui tentando montar a base das contas.

No depoimento de um dos grupos temos o relato de que no momento da parte escrita não tinha achado essa atividade importante, até porque não havia entendido o que era para fazer. Entretanto, a entrevista foi fundamental, uma vez que através dela passaram a perceber o quão importante foi essa atividade.

Diante dos depoimentos colhidos e das observações atentadas pelos alunos, podemos dizer que cumprimos razoavelmente nossa meta para essa atividade, inclusive, mesmo aqueles que ainda não tinham compreendido nosso intuito, demonstraram que se sentiram estimulados a construir suas próprias regras e ir adiante dentro de um campo ainda desconhecido por eles, fomentando assim o processo de criação tão importante em atividades dessa natureza.

Análise da atividade 03

Analisando as respostas obtidas nessa atividade, concluímos que, de fato, a abordagem geométrica exposta, nesse contexto, foi oportuna para facilitar o entendimento da soma algébrica. Dos oito grupos que entrevistamos, todos relataram que essa abordagem foi positiva, uma vez que através dela conseguiram visualizar a composição da soma algébrica.

> Esclareceu muito a gente ter começado através do plano cartesiano porque ficou mais visível e também porque não tinha só números. Dessa forma a gente viu o processo, então ficou mais fácil. *(Renato e João Wesley)*

Na transcrição acima, quando eles falam “até porque não tinha só números” o grupo refere-se às abordagens puramente aritméticas ou algébricas em que para chegar a uma generalização matemática têm que se desenvolver inúmeros cálculos em que participam apenas entes numéricos, sem uso de algum recurso que permita uma visualização geométrica.

A maioria dos depoimentos é bem semelhante ao que citamos, mas alguns enfatizam também o fato de em se começando com um assunto que eles já dominam (Plano Cartesiano), o entendimento se processa muito mais rápido:

> Esse jeito de mostrar como nascem às regras ajudou bastante, pois ficou mais fácil. Partimos de um conteúdo que já conhecíamos (Plano Cartesiano). *(Derlinny e Rafaela)*

Em um desses grupos tivemos um integrante que relatou não ter enxergado essa semelhança entre as abordagens no momento da aplicação. Procuramos questioná-lo sobre ao que ele atribuiu essa dificuldade nessa percepção. Podemos dizer que isso poderia ter sido facilmente sanado caso houvesse uma maior articulação entre esse aluno e o grupo em que estava, pois, se levarmos em conta os diferentes dos ritmos de aprendizagens em uma sala de aula, certamente constataremos que uns terão mais facilidades que outros, e foi justamente o que ocorrera nessa situação. Sua companheira de grupo tinha um ritmo de aprendizagem mais acelerado e acabou se desarticulando do seu colega e do trabalho coletivo, deixando por vezes de socializar com ele as atividades feitas. Dessa forma, pudemos observar que este aluno sentiu dificuldades em perceber algumas nuances importantes, o que, como já dissemos, poderia ter sido superado caso o grupo tivesse mais articulado entre si. Aliás, promover a socialização foi um dos objetivos da nossa escolha ao optarmos por trabalhar em grupos. Felizmente isso parece que foi alcançado na maioria dos casos.

Análise da atividade 04

.

Procuramos aferir nas entrevistas se haviam aprendido a extrair a raiz quadrada de um número negativo. Aqueles que respondiam positivamente, buscamos confrontar a validez de sua afirmação com o auxílio de outros exemplos de raízes quadradas de valores negativos criados por nós. Tivemos que 25% dos grupos entrevistados conseguiram assimilar, sem ajuda extra do professor, como se extrai a raiz quadrada de valores negativos, pois responderam corretamente aos exemplos do professor no momento da entrevista; 50% desses responderam corretamente após algumas intervenções do professor, pois já não lembravam, ou ainda desconsideravam o valor negativo de radicando e resolviam normalmente obtendo respostas para o valor simétrico desse valor, isto é, encontravam respostas para o positivo simétrico desse mesmo radicando; ainda tivemos 25% dos entrevistados que relataram que essa atividade os ajudou a operar com esses números, no entanto, já não lembravam como extrair essas raízes quadradas.

Após algumas reflexões sobre esses dados comentados, sugerimos aos professores que desejem trabalhar essa seqüência didática em sala que possa se estender um pouco mais nessa atividade, da substituição da raiz de -1 pelo símbolo i, o que pode ser feito com outras atividades no mesmo estilo ou ainda outras complementares que o professor achar pertinente. Entendemos, dessa forma, que os resultados esperados podem ser ainda melhores, uma vez que o aluno terá mais tempo para se familiarizar com essa nova notação numérica e poderá adquirir mais maturidade para operar com eles.

Das aplicações passadas, já tínhamos percebido que se faz necessário alongar-se um pouco mais nesse quesito. Não o fizemos por alguns motivos de força maior, um desses motivos é que tínhamos um cronograma a ser seguido e já havíamos nos alongado até mais do que o previsto, o que já extrapolava algumas semanas de trabalho. O fato estava impossibilitando o professor de matemática de continuar seu programa, pois inclusive até usamos os horários de aulas relativas à outras disciplinas que foram gentilmente cedidas pelos respectivos professores que se sensibilizaram com o trabalho e não queriam que interrompêssemos uma determinada atividade na metade.

Outro fator importante e que não poderíamos deixar de mencionar é que, mesmo acreditando no valor e eficácia das atividades estruturadas, sempre acreditamos que o sucesso e a otimização desse trabalho somente ocorrerão se houver uma boa intermediação entre alunos e professor.

A figura do professor nesse contexto continua a ser de fundamental importância nesse processo, uma vez que é ele que vai detectar as principais dificuldades e buscar maneiras de ajudar esse aluno naquela dificuldade. Não é nossa meta induzir a substituição de outras metodologias pelas atividades estruturadas, mas sim poder mostrar que essas atividades podem ser mais uma alternativa de aprendizagem que poderá auxiliar positivamente o trabalho do professor, cabendo a este se deverá complementar as atividades com mais exercícios ou usar mais outros recursos para enriquecê-las. Entendemos, nesse contexto, que nosso trabalho cumpre o papel proposto por nós uma vez que é possível de atingir os objetivos, é passível de adaptações e aponta algumas sugestões para uma aplicação com resultados positivos em sala de aula.

3.4 Entrevistas

Tal como na etapa anterior, ao término das atividades da seqüência buscamos analisar mais atenciosamente as estratégias utilizadas pelos alunos tal como seus entendimentos das atividades feitas. Isso também foi ponto importante para a validação de nosso trabalho, uma vez que mostrou se os objetivos propostos foram alcançados e se as idéias relacionadas ao conceito em destaque realmente teriam sido desenvolvidas.

Para tanto, utilizamo-nos de um instrumento do tipo entrevista gravada com 14 perguntas abertas e um roteiro base para todos os alunos o qual poderia ser acrescido de mais algumas perguntas, caso fosse necessário, buscando compreender com mais detalhes alguns passos da resolução das questões que por ventura não estiverem muito claros ao leitor, tal como fizemos na segunda etapa.

Optamos por perguntas abertas por permitir ao aluno a possibilidade de poder expressar-se com mais riquezas de detalhes acerca das estratégias usadas e não o limitar com possíveis repostas que não venham a englobar o seu pensamento ou até não sejam coerentes com o significado daquilo que realmente gostariam de expressar.

Essa etapa do trabalho demandou um tempo maior, pois tínhamos que ter nossa atenção voltada para cada grupo em separado, ou seja, as entrevistas deveriam ser realizadas com todos os grupos que trabalharam na seqüência de atividades só que, dessa vez, precisaríamos conversar mais detalhadamente com os componentes de cada grupo.

Uma das limitações que causou morosidade dessa etapa do trabalho é que não tínhamos os grupos sempre à disposição, o que ocorria por diversos motivos, dentre esses podemos destacar o fato de estarem em aula no momento das entrevistas; alguns grupos não estarem presentes na escola ou incompletos no dia e ainda outros pequenos imprevistos. Devido aos motivos citados, não pudemos entrevistar cem por cento desses alunos, entretanto, conseguimos obter uma amostra relativamente significativa para essa tarefa, o que correspondeu a 75% do total desses alunos. O roteiro base das questões discutidas nessa entrevista encontra-se no apêndice **B**.

3.5 A Análise das Entrevistas e das Principais Idéias Relacionadas ao Conceito de Números Complexos Adquiridas pelos Alunos

Ao final dessa seqüência de atividades estruturadas, orientamos aos grupos no sentido de que escrevessem numa folha em anexo as principais idéias relacionadas ao conceito de número complexo que haviam adquirido com esse trabalho e exemplificassem.

Já nas primeiras análises detectamos, através dos exemplos dados, que havia em algumas das respostas certas incoerências de ordem lingüística devido à dificuldade que tinham em expressar o pensamento através da linguagem escrita. Dessa forma, alguns escreviam algo que não demonstra clareza ao leitor, só sendo possível uma interpretação mais nítida quando examinávamos os exemplos dados.

Em todo caso, ainda percebemos que houve algumas idéias com conteúdos bem semelhantes em sua essência. Dessa forma, resolvemos fazer uma análise desses conteúdos buscando nos basear em alguns dos princípios de Bardin (2004). Assim, achamos pertinente usar um processo de categorização inspirado na *análise categorical* usada por Bardin, que submete as respostas ao crivo da classificação, segundo a freqüência (ou a ausência) de itens de sentido. Essas respostas foram categorizadas em idéias que se enquadram em determinadas linhas de pensamento bem similares. Assim procedendo, faremos, quando necessário, as devidas observações em cada uma delas.

Por uma questão de ordem, denominamos essas idéias aleatoriamente em grupos que totalizam 12. Todas as definições foram transcritas buscando ser fiel ao conteúdo escrito por cada um desses alunos.

Tivemos alguns grupos com a mesma linha de pensamento, isto é, ressaltaram em suas definições um aspecto duvidoso relativo à exatidão desse novo número. Esses grupos atribuíram às operações de multiplicação e adição como sendo uma espécie de prova real para a existência dos números complexos. Enquadramos nessa mesma categoria conceitual as definições dos grupos 01, 08 e 11.

> São resultados que não parecem ser exatos, mas com a soma e a multiplicação conseguimos entender o resultado. Mas só conseguimos fazer isso por causa dos matemáticos que encontraram essa forma de solução. Ex: ($10 \pm 4\sqrt{-1}$) ou (b $\pm$ c.i).
>
> *(grupo 01)*

Esse grupo demonstra em sua definição que parece ter vivenciado todos os conflitos de ordem cognitiva, também vivenciados pelos matemáticos que participaram da aquisição desse conceito, o que ao nosso ponto de vista é bem positivo, pois mesmo ainda que seja uma definição bem específica, isto é, muito restrita ao contexto vivenciado por eles durante a atuação na seqüência, o grupo teve uma interação com a história e isso também era um dos nossos intuitos.

Nessa descrição, o grupo deixa transparecer as expectativas que tinham de encontrar uma solução exata. Segundo relatos do grupo, o termo usado (*exata)* refere-se a um valor real, uma vez que até então não tinha noção de outro conjunto numérico que pudesse dar conta de solucionar aquele problema.

A designação dos complexos como “números que não parecem ser exatos” nos faz crer que essa idéia vem do formato como esses números lhes foram apresentados (a + bi). Ou seja, mesmo a forma simplificada apresenta-se como uma soma algébrica, e ainda ressaltada por uma nova componente i, sendo este o resultado da raiz quadrada de -1. Esse novo formato numérico causou estranheza aos componentes do grupo na forma de concebê-lo como número, o que provavelmente deve ter gerado essa idéia.

Outro trecho que também resgata os percursos em que atuaram durante a resolução da seqüência é quando citam a importância das operações para a aceitação dos números complexos como números de fato, uma vez que se utilizaram desse feito, tal como descritos no problema, como uma espécie de prova real.

O exemplo dado pelo grupo foi: 10 $\pm\sqrt{-1}$ mostrando ser um caso particular de b $\pm$ ci.

Ainda nessa mesma linha temos um outro grupo que define as idéias adquiridas da seguinte forma:

> Em nossa opinião, número complexo é todo e qualquer número que possa multiplicar somar e subtrair. *(grupo 08)*

Embora essa seja uma idéia bem mais simples que a anterior, este grupo também concebe número complexo como sendo qualquer número em que podemos usar as operações básicas. Através da descrição do grupo, podemos perceber o quanto o teor da atividade 01 pode os ter persuadido na aquisição dessa idéia, uma vez que enfatizaram a relação que tem essas operações com a validez desses números, item explorado na atividade 01. Nessa atividade a resolução dessas operações com os números complexos comprova que, em operando com eles, chega-se à descrição do problema, buscando fazê-los entender que essas seriam, de fato, as soluções verdadeiras. Dessa forma, o grupo acabou por generalizar a condição de complexo como sendo todos os números em que podemos fazer uso dessas operações.

Ainda com a mesma semelhança de idéias, houve um outro grupo que também descreveu números complexos de forma bem similar aos anteriores e, portanto, resolvemos enquadrar nessa mesma linha de pensamento.

> Os números complexos são resultados que, na primeira vista, parecem não dar certo, mas com a ajuda da soma e da multiplicação nós chegamos a um determinado resultado correto. Ex: (a + b$\sqrt{-1}$) + (b + c$\sqrt{-1}$) *(grupo 11)*

Esse grupo ratifica alguns de nossos comentários acerca dos grupos anteriores, uma vez que também retoma as dúvidas e incertezas dos dois grupos já mencionados, no que se refere à validez desses números enquanto soluções legítimas para um determinado problema. Também mencionam nessa definição a importância do uso das operações aditivas e multiplicativas. Os exemplos citados pelo grupo foram $a + b\sqrt{-1}$ e $b + c\sqrt{-1}$.

Como uma segunda linha de idéias, tem-se mais quatro grupos: 01, 06, 10 e 05 que definem os complexos como sendo números que dão soluções a situações antes impossíveis de serem solucionadas.

> São números que ajudam a resolver equações aparentemente impossíveis ($\sqrt{-1}$). Ex: (1 + 2$\sqrt{-1}$) + (2 + 5$\sqrt{-1}$). (grupo 02)

O grupo procurou ressaltar o aspecto de que os números complexos seriam aqueles que dariam soluções a problemas que não poderiam ser resolvidos apenas com os números do conjunto dos números reais, logo atribuíram aos complexos o feito de poder solucionar a raiz quadrada negativa de um número, como parece demonstrar os exemplos: $1 + 2\sqrt{-1}$ *e* $2 + 5\sqrt{-1}$.

Os exemplos dados nos reforçaram a idéia de que o grupo desenvolveu uma idéia bem razoável sobre o conceito, uma vez que usaram uma representação coerente para a definição dada e denota que abstraíram essa idéia através dos aspectos históricos que deram origem a esses números, tal como também objetivávamos.

Na mesma linha de idéias temos o grupo 06.

> São números que nos permite obter resultados exatos diante de situações antes impossíveis de resolver, como por exemplo, achar o resultado exato de uma raiz negativa: $\sqrt{-1}$ = i, conforme a simbologia adotada pelo matemático Euler. (grupo 06)

Diferentemente do grupo 01, esse concebeu os complexos como sendo números que permitem obter valores exatos, isto é, não deram a mesma ênfase dada pelo grupo mencionado em relação ao formato numérico, mas ao fato de que são números que dão soluções a situações impossíveis de resolver com os números que até então conheciam.

Segundo nossa leitura, entendemos que a concepção do grupo, quando designa os complexos como resultados exatos pode ter surgido quando perceberam que essa espécie de número completou a descrição do problema, que, dessa forma, não ficou destituído de sentido, pois também relataram que se eles descrevem os dados do problema, logo passam a ter sentido, ainda que seja difícil conceber uma medida do tipo a + bi.

Outro grupo, também na mesma linha de idéias preferiu fazer alusão ao pensamento de Cardano ao elaborar a idéia adquirida sobre número complexo.

> Números complexos são resultados que pressupõem a sua existência, pelo menos na imaginação. Ex: (a + b$\sqrt{-1}$) + (b + c$\sqrt{-1}$) = (a + b) + (a + c$\sqrt{-1}$) e (a + b$\sqrt{-1}$) – (b + c$\sqrt{-1}$) = (a – b) + (a + c$\sqrt{-1}$). *(grupo 10)*

Na definição usada pelo grupo, além de percebermos uma persuasão adquirida da parte histórica da seqüência, uma vez que utilizaram um trecho do próprio texto, vemos também a influência que teve a atividade 00, uma vez que relatou na entrevista, que teve, em princípio, algumas resistências em aceitar uma resposta daquela natureza como legítima para aquele problema.

Somente ao experimentarem operar com eles é que puderam crer, tal como Cardano, que valores como aqueles realmente poderiam ser aceitos como soluções corretas, ainda que difíceis de concebê-los enquanto números de fato. Talvez por isso tenham condicionado a sua existência a um plano imaginário.

Nos exemplos dados, colocaram duas somas algébricas de complexos do tipo: (a + b$\sqrt{-1}$) + (b + c$\sqrt{-1}$) = (a + b) + (a + c$\sqrt{-1}$) e a outra com mesma estrutura, o que também pode ter sido ocasionada pela persuasão da atividade 01, quando pede que operem com estes. Observando por essa ótica, observamos que existe uma similaridade com a primeira linha de pensamento descrita anteriormente.

Ainda na mesma linha de pensamento, tem-se um outro grupo que generaliza os complexos como sendo uma espécie de número qualquer.

> Um número complexo é um número qualquer. Ex: $\pm\sqrt{-1}$. (grupo 05)

Segundo a descrição acima, até poderíamos pensar que o grupo adquiriu uma idéia mais generalizada acerca do conceito ao dizer que número complexo é um número qualquer. No entanto, pelo exemplo dado, observamos que se referenciam apenas a raiz quadrada de menos um, uma vez que, restringem-se a esse exemplo.

Apesar de a idéia adquirida ter um teor mais geral, induzindo-nos inclusive a pensar que generalizaram esta a partir de um princípio em que todos os números que eles conhecem pudessem ser designados como complexos, entendemos através das investigações nas entrevistas e do exemplo dado que o termo acima empregado “número qualquer” não está designando um conjunto maior em que estariam inseridos todos os números (incluindo as raízes quadradas de valores negativos), mas sim, uma espécie de número, até então desconhecida para eles, que completa o sentido de um determinado problema.

Houve um grupo que desenvolveu uma idéia utilizando um pouco das duas concepções descritas, o que chamaremos de uma terceira categoria.

> São números impossíveis de se resolver, “imaginário”, mas mesmo assim, neles operamos. Um exemplo desses números é $\sqrt{-1}$. (grupo 04)

Apesar de algumas dificuldades lingüísticas na escrita, isto é, redação com dificuldades em expressar o pensamento, o exemplo dado e os dados obtidos na entrevista nos leva a inferir que o que realmente queriam expressar é que são números que dão soluções a situações impossíveis de resolver, pois durante a entrevista e na própria seqüência, estes resolveram raízes quadradas de valores negativos, ou seja, acabaram por dar solução à $\sqrt{-1}$, estando incoerente com o que expressam no início da frase.

Mesmo com as fragilidades textuais, entendemos que a idéia adquirida pelo grupo é razoável, uma vez que possivelmente buscaram fazer uma analogia das operações usadas no conjunto dos números reais, estendendo-as aos números complexos e entendendo que com eles também poderemos operar normalmente, o que também parece ter sido reforçado pela atividade 01.

Outros três (09, 07 e 12) grupos seguiram uma quarta linha de pensamento a qual define número complexo como sendo todo número que possui a raiz quadrada de menos um e que essa poderá ser substituída pela unidade imaginária i.

> São números que completam a sua função de acordo com cada número que pode ser substituído por *i*. Para mim, isso é um número complexo. Ex: (-1).(-i) = i. *(grupo 09)*

A exemplo de alguns outros grupos, pudemos observar que esse também apresenta algumas dificuldades lingüísticas para expressar o pensamento através da escrita. Entretanto percebemos através do exemplo dado (-1).(- i) = +i que ressaltam como característica principal desse novo número, a presença da unidade imaginária *i*.

Seguindo na mesma linha de pensamento, tem-se o grupo 7 que definiu número complexo da seguinte maneira:

> É qualquer cálculo que contenha a raiz de um número negativo, não qual é substituída pelo símbolo (*i)* quando é $\sqrt{-1}$. Já quando é raiz de um número qualquer negativo, é multiplicado por -1 para dar a raiz negativa de um número qualquer. Ex: $2\sqrt{-1} + 5\sqrt{-1} = 7\sqrt{-1}$ na soma, podemos também encontrar no cálculo de multiplicação, subtração e adição dos símbolos. *(grupo 07)*

O grupo apresentou algumas dificuldades de redação, principalmente nas idéias expressas no segundo período. Segundo relatos do grupo, o que gostaria de ter explicitado é que caso o radicando fosse um número negativo (-b), poderiam transformá-lo em um produto de fatores em que um de seus fatores fosse o elemento neutro (1), ficando com (-1.b), dessa forma, extrairiam a raiz quadrada do segundo fator (b) e em seguida a raiz quadrada de -1, tal como descrito no primeiro período. O grupo exemplificou sua definição através de uma soma: $2\sqrt{-1} + 5\sqrt{-1} = 7\sqrt{-1}$.

Bem similar aos anteriores temos ainda um grupo 12 que também concebe os complexos como sendo números que dão resultados a raiz quadrada de -1. No entanto, o grupo ainda apontou uma outra idéia que se aproxima daqueles que enquadraram na segunda linha de pensamento comentada.

> Número complexo é a raiz negativa de $\sqrt{-1}$. E usando a $\sqrt{-1}$ ela substitui por *i*. O número complexo é quando você não consegue mais resolver uma situação, pois não pode mais somar e subtrair letra e número. Ex: (3 – 2i).(4 – 2i) = 12 – 6i – 8i + 4i^2 = 12 – 14i + 4i^2 = 12 – 14i + 4.(– 1i) = 12 – 14i – 4 = 12 – 4 – 14i = 8 – 14i. *(grupo 12)*

O grupo exemplificou a definição usando a operação de complexos: (3 - - 2i) . (4 - 2i).

Finalizando nossas categorias de idéias ainda temos um grupo que, perante sua definição e análise nas entrevistas parece não ter conseguido desenvolver alguma idéia pertinente aos complexos.

São números difíceis de trabalhar. *(grupo 03)*

Ao ler as idéias desenvolvidas pelos grupos, percebemos que o grupo acima parece não ter adquirido alguma idéia mais concreta sobre número complexo, ou seja, não conseguiu atingir o nível de abstração necessária para tanto e, dessa forma, acabou por expressar as dificuldades que teve ao ser questionado sobre o assunto. Como essa idéia sobre o conceito ainda não estivesse consolidada, o grupo também não colocou algum exemplo.

Posteriormente, na fase de entrevistas, detectamos nos integrantes desse grupo algumas fragilidades conteudinais referentes ao assunto de equações, principalmente nas operacionalizações aritméticas como, por exemplo, jogo de sinais e padronização de equações na sua forma normal. Percebemos que partes desses equívocos ocorriam devido a dificuldades ainda não sanadas de séries anteriores, como relatados pelos integrantes, talvez desde o ensino fundamental, quando normalmente começamos a utilizar equações, e também pouca atenção diante de situações que exigem mais concentração do aluno.

Entretanto, um fator que deve ter influído muito nessa situação, dificultando mais ainda o processo de aquisição das idéias relacionadas ao conceito é que o grupo faltou em dos dias em que a turma estava atuando na seqüência didática. Ao retornar, numa aula posterior, os integrantes procuraram apressar a execução do trabalho para tentar se recuperar do tempo perdido da ausência deles e assim igualarem-se à turma em relação às atividades.

Na maioria dos grupos analisados pudemos observar algumas características que são similares em todos, uma delas é que a generalização do conceito construído ainda é bem alusiva ao contexto da própria seqüência. Outra característica pertinente na maioria dos casos é que estes consideram a unidade imaginária i como parte integrante desses números. Isso se evidencia bem claramente nos exemplos dados.

Em relação à primeira dessas características, entendemos que é perfeitamente aceitável que desenvolvam idéias sobre o conceito ainda restritas ao trabalho, uma vez que não foi dada uma diversidade de situações em que pudessem aplicar o novo conhecimento adquirido, pois isso perpassa os objetivos de nossa seqüência. No entanto, também entendemos que o uso das atividades estruturadas através da seqüência didática foi uma ferramenta bem significativa na apresentação desses números novos aos alunos, cabendo ao professor regente da sala utilizar esse novo contexto de redescoberta dos alunos e ampliar ainda mais essas idéias adquiridas através de outras atividades estruturadas ou outros recursos que achar pertinente e que ajudem a maximizar o conhecimento adquirido.

Sobre a segunda característica, achamos positivo pensarem dessa forma, pois um trabalho dessa natureza denota que é possível com que os alunos superem as dificuldades de calcular a raiz quadrada de números negativos e passem aceitar essa unidade imaginária como solução desse quesito, algo até então impossível para eles. Outro ponto importante é que também conseguiram aceitar uma nova tipologia numérica com um formato tão diferente dos quais estavam acostumados como sendo números de fato, podendo ser legitimamente aceitos como soluções de diversos problemas.

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES

Nos últimos anos temos claramente observado que todos os setores que movem a sociedade atual vêm passando por constantes mudanças estruturais e tecnológicas. Isso, além de interesses sociais, vem ocorrendo devido à crescente exigência de um mundo cada vez mais globalizado e competitivo.

Porém, mesmo imersos nesse contexto, o que temos presenciado, enquanto professores, é que no campo educacional a estrutura de ensino ainda permanece muito parecida com a de décadas anteriores. A matemática ainda é vista como uma disciplina seletiva e discriminatória, de modo geral e, mesmo apesar de algumas tentativas, as formas de ensino pouco mudaram e ainda é comum encontrarmos alunos desestimulados quando o assunto é matemática.

Dentre os mais diversos conteúdos dessa disciplina, temos os números complexos, cuja abordagem, na maioria dos livros didáticos, como também na maioria das salas de aula, ainda é muito tradicional, quase sempre de forma expositiva e com alguns exercícios posteriores para exercitar o conhecimento aprendido.

Temos observado em nossas atuações enquanto professores de matemática que tal aspecto se apresenta como um fator de desestímulo para a maioria dos alunos, uma vez que a exploração desse conteúdo não vem acompanhada de uma contextualização que o torne mais atraente para este aluno e nem mesmo de uma aplicação prática desse conceito. Tudo isso se agrega a outros valores, ainda muito presentes na nossa cultura escolar, tal como enxergar a matemática como uma disciplina árdua e de difícil assimilação.

É nesse contexto que surgem muitas indagações, preocupações e tentativas por parte dos educadores e educandos na busca de soluções para minimizar tais dificuldades. Pensando sob essa ótica, nosso trabalho visa dar suporte ao aluno na aquisição de algumas idéias relacionadas ao conceito de números complexos partindo de situações que geram a necessidade da extração de raízes quadradas de números negativos, privilegiando os aspectos históricos que deram origem a essa criação.

Em nossa atuação enquanto professores de matemática, também temos percebido que atualmente há muitas discussões para que o ensino da matemática esteja cada vez mais calcado na utilização de atividades a serem realizadas em contexto de redescoberta. Pesquisas em educação matemática têm indicado a eficácia deste procedimento para o aluno em geral, pois seu uso é importante para fomentar o desenvolvimento da habilidade de pensar matematicamente que é, incontestavelmente, uma habilidade fundamental em nossa cultura.

Podemos destacar alguns trabalhos recentes que aludem nessa perspectiva: temos, por exemplo, o já citado do professor Fossa, *Ensaios sobre A Educação Matemática*, (2001) que traz algumas informações que procuram suscitar compreensões acerca do significado da educação matemática, que se contrapõem ao ensino tradicional, e buscam cooperar com o processo construtivo na formação do pensamento concreto. Nessa mesma perspectiva, ainda temos Skemp, com sua obra *Psicología del aprendizaje de las matemáticas* (1980), que busca dar suporte à professores e estudantes de matemática em relação aos principais processos envolvidos na compreensão dessa disciplina como também a aplicação de estudos psicológicos a certos conceitos básicos em matemática, como conjuntos, sistemas numéricos, números, equivalência e modelos matemáticos.

Segundo Rizzo (1997) em seu livro Jogos Inteligentes: *[...] A ação humana é sempre fruto de uma motivação que organiza as forças do indivíduo em direção em um determinado fim. (RIZZO, 1997).*

Dessa forma, retomamos o que já dissemos anteriormente, ratificando que esse trabalho surge como uma alternativa na busca de minimizar tais dificuldades e de propor uma aprendizagem mais atraente e significativa a respeito dos números complexos.

Esse trabalho trouxe algumas contribuições bem diferenciadas em relação ao trabalho do Rosa (1998). Embora ambos inicialmente busquem fazer um resgate dos principais aspectos históricos que deram origem aos números complexos, nossa abordagem permite que o aluno possa ter um envolvimento maior com os fatos e acontecimentos que deram origem a criação desses números, já que existe um momento de leitura compartilhada onde há espaço para que esse aluno possa fazer discussões e questionamentos sobre alguns pontos que achar pertinente, ou seja, possui um caráter mais interativo entre a história e o fazer matemático desse estudante.

Em seu trabalho, o autor ratifica a forma de introduzir sua seqüência, isto é, através de resoluções de equações cúbicas, entendendo que para que um aluno de ensino médio venha a extrair raízes quadradas de números negativos, este necessitará ter alguma motivação que o leve a isso, uma vez que, segundo esse autor, esse aluno aprendeu desde o ensino fundamental que equações quadráticas com discriminante negativo não teriam solução. Sobre aspecto também acreditamos ter obtido êxito, pois optamos por iniciar nossa seqüência com uma abordagem mais leve para a realidade escolar de um aluno da escola pública, isto é, através de resolução de equações quadráticas; assunto que os acompanham em suas trajetórias escolares desde o ensino fundamental.

Nosso primeiro pressuposto parece ter se confirmado, pois percebemos pelos relatos dos próprios alunos que se sentiram mais motivados a modelar os problemas propostos, uma vez que iam percebendo a semelhança estrutural entre as questões de cada bloco de problemas. Até aqueles que sentiam mais dificuldades em interpretar o problema e encontrar um modelo matemático para sua resolução, nos relataram que se sentiram mais confortáveis para resolver os próximos quando passaram a entender como resolver o primeiro. Esse pensamento parece estar ilustrado na fala transcrita de alguns alunos. (ver p. 85-86)

No entanto as terceiras questões de cada bloco da atividade 00 causaram estranheza na maioria dos alunos, como havíamos previsto, pois quase todos os grupos ao tentar resolvê-las vinham nos questionar onde eles haviam errado com o cálculo devido não estarem conseguindo encontrar uma solução para essas.

Outro pressuposto que também parece ter se confirmado refere-se às dificuldades de resolução enfrentadas pelos alunos no momento que, durante o processo de resolução, se depararam com uma raiz quadrada de um número negativo, uma vez que ainda não tinham o conhecimento necessário para resolução desse problema (ver trecho das falas dos alunos p.67).

As colocações em relação ao nosso terceiro pressuposto estariam corretas caso as tivéssemos respaldado com uma revisão introdutória dos conteúdos que são pré-requisitos para esse trabalho, pois acreditávamos ter dimensionado adequadamente o nível das questões propostas sem ter levado em consideração que os alunos não vinham praticando constantemente esses conteúdos e, portanto, poderiam não lembrar desses, o que demandaria a necessidade de uma revisão antes de fazer uso desses conceitos.

Acreditamos que essa modalidade de estudos pode proporcionar a esses estudantes a oportunidade de terem participação ativa na aquisição de algumas idéias pertinentes sobre o conceito de números complexos, como havíamos pressuposto. Pois observamos que esses alunos são capazes resolver as atividades por eles próprios e percebíamos que iam gradativamente se adaptando uma modalidade de ensino-aprendizagem em que o professor já não lhes poderia mais dar todas as respostas que queriam, inclusive a quantidade de perguntas ao professor ia diminuindo á medida em que iam avançando nas atividades. No entanto, também percebemos que o domínio das operações aditivas e multiplicativas se efetivará com uma maior quantidade de exercícios que envolvam esses tópicos. Logo deixamos como sugestão que após esse trabalho o professor possa aprofundar esse conhecimento junto aos alunos com o auxílio de mais atividades que envolvam essas operações.

Com relação aos objetivos propostos para esse trabalho, acreditamos que também obtivemos êxitos. Pois, a maior parte desses alunos interagiram com a nossa proposta e parece que conseguimos obter alguns aspectos positivos com a elaboração dessa seqüência didática.

- A abordagem inicial utilizada conseguiu fazer com que os alunos se questionassem sobre a existência de raízes quadradas de valores negativos e provocou, na maioria, a necessidade de extrair essas raízes.

- O uso da história foi muito pertinente nessas atividades, pois trouxe a esses alunos uma nova dimensão de quão árduo e demorado é o desenvolvimento de um conceito matemático desmistificando para muitos a idéia de que esses conceitos surgem do nada e fazendo-os perceber que em operando com os números complexos pode-se chegar a soluções de diversos problemas.

- A seqüência foi avaliada numa turma de 3º ano de uma escola da rede pública e demonstrou que a aquisição de idéias acerca de um conceito segundo essa modalidade de ensino pode ser uma alternativa viável, uma vez que possibilita a construção de um conhecimento mais eficaz por parte do aluno, pois essa construção é fruto do esforço do próprio aluno e passível de ser aplicada até em realidades mais desfavorecidas de recursos materiais.

O presente trabalho ainda nos permitiu detectar algumas informações relevantes no que se refere ao ensino aprendizagem da matemática. Uma delas, detectadas ainda nas análises preliminares, feitas ainda em sala pudemos observar que os alunos os quais trabalhamos, de modo geral, não tiveram contato com as equações através de situações problemas, muitos deles ainda nem sabiam da utilidade e importância do uso das equações.

Também podemos citar alguns pontos bem similares em nossos trabalhos:

- O trabalho em duplas oportunizou troca de conhecimentos e discussão acerca das estratégias a serem usadas em cada atividade

- O trabalho em grupos menores foi positivo, uma vez que oportunizou que todos tivessem acesso as informações contidas na seqüência sem deixar que algum aluno ficasse excluído desse processo e ainda discutirem entre si a realização de cada atividade proposta. Dessa forma tiveram plenas condições de agirem ativamente na formação do conceito.

- Tiveram a oportunidade de interagir com história e saber qual foi o motivo que deu origem aos números complexos, reconstruindo assim, algumas concepções, que muitos estudantes ainda têm de que os conceitos matemáticos surgem do nada.

- Na medida em que as atividades iam se realizando pudemos observar que os alunos iam se adaptando cada vez mais ao trabalho com

> atividades estruturadas, pois recorriam cada vez menos ao professor e adquiriam mais autonomia para tomar decisões, uma vez que estas eram tomadas em discussão com os componentes do grupo.

4.1 Considerações Finais

Em relação à atividade 00, podemos dizer que tivemos um saldo positivo, pois observando as respostas obtidas pelos alunos entendemos que tivemos boa parte dos nossos objetivos atendidos uma vez que possibilitou que desmistificassem alguns questionamentos acerca da existência da raiz quadrada de valores negativos e despertou na maioria dos alunos a curiosidade de ir adiante na resolução do cálculo que continha esse elemento, o que provavelmente nunca haviam tentado.

Ainda constatamos através das entrevistas (ver apêndice **B**, pergunta 2) que o trabalho em questão serviu para reafirmar a utilidade e eficácia do uso das equações na resolução de problemas pois, para muitos, essa utilidade foi novidade, uma vez que relataram terem estudado esse assunto (equações), no ensino fundamental, descontextualizados de algum problema de origem. Por esse motivo, tiveram dificuldades para equacionar os problemas. Esse fato aparece na análise dos dados, onde tivemos que 100% dos alunos entrevistados, relataram ter sentido maior confiabilidade na eficácia do uso das equações para solucionar problemas. Mesmo aqueles que resolveram por outros métodos, acabaram por refazê-las usando equações como uma forma de verificar se suas respostas estariam realmente corretas. Podemos interpretar essa atitude como um fato que pode ilustrar a confiabilidade que o uso das equações, após esse trabalho, passou a exercer na concepção dos alunos no que concerne a resolução de problemas.

Acreditamos que as equações se aprendidas nesse contexto podem minimizar alguns reflexos negativos e muito presentes em nossas realidades minimizando algumas concepções como, por exemplo, de que *as equações para nada servem e não passam de um conjunto de regras que visam obter uma solução*, mas, pelo contrário, essa até seria uma forma de mostrar a verdadeira utilidade do uso das equações, inclusive sendo uma alternativa onde se pode começar com problemas mais próximos das realidades desses estudantes.

Dessa forma, o professor da turma poderá buscar situações para explorá-lo através de uma abordagem mais contextualizada, suavizando a inserção desse conteúdo que normalmente é ministrado de forma muito “mecânica” e repetitiva.

Ainda no que se refere ao assunto de equações, viemos percebendo ao longo dos percursos que os alunos acabavam perdendo o foco daquilo que se estava pedindo no problema quando se detinham no processo de resolução das equações, ou seja, eles não incorporavam o resultado do modelo matemático no domínio físico e por isso não se preocupavam em dar resposta ao problema original. (SKEMP,2000 p.248)

Isso nos levou a averiguar se tal fato continuaria a existir quando o trabalho fosse refeito sob essa nova ótica, isto é, buscando dar uma ênfase maior a interpretação do problema. Desse modo, questionamo-los (ver apêndice B) se eles saberiam explicar qual o significado dos valores encontrados x’ e x” em cada uma das questões resolvidas e, para nossa surpresa, 90% desses entrevistados conseguiram fazer a correspondência entre os resultados da equação com o problemas de origem; 50% destes responderam de imediato corretamente as respostas; os outros 40% ficaram um tanto indecisos, mas após sugerirmos que relessem os problemas conseguiram fazer essa relação e acabaram por responder corretamente esse questionamento.

Já quando questionados se, ao resolver as questões da atividade 00, sentiram motivações para buscar encontrar a solução da questão (c), obtivemos que 60% dos grupos entrevistados responderam positivamente a pergunta. Os principais argumentos para tal resposta faziam alusão à curiosidade de saber qual seria a verdadeira solução daquele problema.

Abaixo, transcrevemos alguns depoimentos que podem ilustrar essa posição:

> [...] Sim, nos sentimos motivadas a resolver, porque a gente queria descobrir as soluções de verdade desse problema[...] *(Andreza e Joyciana)*

> [...]Sim, pela curiosidade de saber onde poderia chegar, se realmente teria solução.(*Aline e Denis)*

> [...] Sim, motivadas pela curiosidade, até porque a gente queria saber a resposta. *(Sheila e Daiane)*

Quanto aos 40% que responderam não se sentirem motivados a ir adiante, seus argumentos revelam que não continuaram porque encontraram uma raiz quadrada de número negativo e não sabiam como desenvolvê-la, desse modo, sua única alternativa seria aceitar uma solução que contivesse esse elemento como reposta correta, mesmo sem saber como contextualizar uma resposta daquele tipo naquele problema. Outro grupo ainda relatou achar que a questão estava errada uma vez que não sabia como ir adiante com a raiz quadrada negativa. Houve ainda outro grupo que deu um depoimento bem interessante no que concerne ao trabalho coletivo. O grupo relatou que o trabalho feito em grupos foi extremamente positivo, pois alguns dos componentes desse grupo já estavam quase desistindo do trabalho quando um outro componente do grupo, tido por eles como *mais inteligente* e visivelmente mais empolgado em encontrar a solução, acabou motivando os demais a continuar buscando a solução da questão, uma vez que acreditava na existência dessa raiz. Isso serviu de estímulo para que o restante do grupo não desistisse e continuasse a buscar a solução.

Abaixo transcrevemos um trecho da fala de um dos componentes desse grupo que ilustra o nosso comentário: *[...] Se tivesse sozinho fazendo essa questão, talvez já tivesse parado antes [...]*. Esse fato também ratifica nossa escolha pelo trabalho em grupo.

Se nos reportarmos ao questionamento de número cinco da entrevista (ver apêndice B) onde questionávamos aos alunos: *Qual foi a sua sensação quando percebeu que não estava conseguindo encontrar a solução dessa questão* (reportando a questão c e f da atividade 00), contabilizamos, segundo as nossas estatísticas, que 33,33% dos grupos entrevistados relataram sentirem-se ainda mais estimulados a tentarem buscar a resposta correta. Ou seja, parece que o trabalho com atividades estruturadas conseguiu motivá-los a irem adiante à busca da solução correta, mesmo já tendo usado uma estratégia mal sucedida anteriormente. Porém, tivemos que em 66,66% desses entrevistados esse fato causa angústia, por não saberem como ir adiante na resolução. Isso acarreta, segundo esses, sentimento de impotência e vontade de desistir da resolução da questão, o que também atribuímos aos reflexos de uma educação toda semeada em bases tradicionais que não motivam o aluno a tentar desenvolver estratégias na busca de soluções para desvendar seus questionamentos.

Esse fato ilustra a sensação de desconforto que já prevíamos em nossos pressupostos, uma vez que caracteriza as resistências e todas as atitudes previstas em uma situação proposta de mudança no contrato didático em uma sala de aula tradicional. Esse também foi um dos motivos que nos levou a tomar uma postura menos imparcial frente à turma, ou seja, percebemos que poderíamos ser mais úteis nesse processo se nossa atuação causasse mais segurança e tranqüilidade a eles nos momento das dificuldades. Inclusive porque o que também percebemos é que muitos dos erros cometidos davam-se pela simples falta de atenção nas operacionalizações aritméticas, como já mencionado anteriormente, e isso poderia facilmente ser corrigido com a nossa intervenção sem necessariamente atrapalhar o processo de construção do conhecimento a ser adquirido.

Dentro de nossas perspectivas, podemos dizer que nossos objetivos foram alcançados, uma vez que tivemos, nos diversos grupos, vários enfoques pertinentes de um mesmo conceito que se complementam.

Em nosso caso, ainda que com um tempo restrito para realizarmos essas atividades, pois não poderíamos interromper por longo tempo as atividades normais dos professores, podemos dizer que foi uma experiência enriquecedora tanto para nós quanto para os alunos e ainda para os professores regentes das salas nas quais passamos, pois estes ficaram muito entusiasmados com a experiência e inclusive pediram permissão para obter uma cópia da seqüência para poderem aplicar nos anos seguintes, uma vez que relataram terem dificuldades em inserir esse assunto de outras formas alternativas se não através de aulas expositivas.

Enxergamos que dentro de uma proposta de sala de aula essa experiência poderá lograr ainda mais êxito, uma vez que o professor não terá tantas limitações de tempo, o que lhe dará mais flexibilidade para amadurecer as idéias conceituais construídas pelos alunos uma vez que esse tem uma visão mais ampla do contexto da turma para poder conduzir as atividades da seqüência e até outras posteriores à seqüência de acordo com o que considere mais procedente para a realidade de sua turma.

Acreditamos que boa parte dos nossos pressupostos se configurou como verdadeiros, uma vez que a maior parte dos alunos deu uma resposta positiva aos procedimentos apresentados na seqüência que elaboramos. Porém, reiteramos aqui nossas palavras, já mencionadas, de havermos nos equivocado no momento em que pressupomos ter dimensionado essa seqüência adequadamente para a realidade a que nos propomos sem a necessidade de uma atividade introdutória com uma ampla revisão de conteúdos que são pré-requisitos para um desenvolvimento eficiente das atividades em questão.

Aqui, sugerimos mais uma vez aos que pretendem fazer uso desse trabalho para fins didáticos que introduzam esse complemento para subsidiar os alunos no que tange aos possíveis déficits conteudinais existentes.

Durante as duas primeiras etapas deste trabalho atentamos para um fato que merece nossa atenção, pois também não estava dentro dos nossos pressupostos que os alunos ficariam muito incomodados quando desenvolvem uma estratégia para solução e não conseguem obter a resposta correta para aquele problema.

Em todo caso, temos que levar em consideração que nossos alunos são fruto de um sistema tradicional e, portanto, temos de convir que não podemos esperar que abandonem, de uma hora para outra, práticas e posturas tão sólidas e que permearam suas vidas escolares durante tanto tempo. Embora na nossa terceira e última etapa do estudo tenhamos percebido que só se verificou a primeira das alternativas citadas, ou seja, todos ficam inquietos e ansiosos para que o professor lhes diga a resposta correta, sem antes terem terminado a questão.

No presente trabalho, o aplicador (nós) não poderia dar todas as respostas que os alunos almejavam, pois os autores desse processo de construção deveriam ser eles próprios. Isso os deixava inquietos porque teriam de se adequar a uma mudança de concepção na forma de apreender um conhecimento. Muitos eram resistentes em aceitar tal mudança e, portanto, acabaram por não dar a importância devida ao trabalho. Consideramos, inclusive, ser esse o motivo de algumas desistências durante seu desenvolvimento.

Considerando os êxitos obtidos, acreditamos ter contribuído razoavelmente para o professor na busca de um ensino de matemática mais dinâmico e um aprendizado que julgamos ser de melhor eficácia para esse aluno.

Esperamos que outros trabalhos dessa natureza venham se agregar aos esforços dos profissionais de educação na busca de soluções para tentar minimizar os impactos negativos que ainda acenam muito fortemente quando o assunto é ensino aprendizagem em matemática.

As salas de aula, em sua maioria, sofrem de superlotação, o que impossibilita ao professor dar um atendimento individualizado aos alunos que, normalmente tem contextos, características e desenvolvimentos cognitivos bem diferentes e, por sua vez, acabam por se prejudicar, pois estão inseridos em um sistema que não privilegia essas diferenças e não dá ênfase aos diversos ritmos de aprendizagens existentes em toda instituição.

Isso sinaliza para o fato de que devemos quebrar os esquemas tradicionais e apresentar aos nossos alunos conhecimentos que sejam mais significativos, que envolvam seus conhecimentos psicomotores, em que eles tenham habilidade para agir sobre os seus conhecimentos e, posteriormente, passar ao domínio cognitivo.

É nesse contexto que deixamos como sugestão o uso de atividades estruturadas como um dos possíveis caminhos que apontem na direção de soluções para os problemas citados.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, Nanci. **Uma Tentativa de Mudança Metodologia para uma Aprendizagem Significativa no Ensino Médio**, Natal, RN. 2006. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Ciências e Matemática). Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Matemática - UFRN.

BARDIN, Laurence. **Análise de Conteúdo**, tradução: Luiz Antero Reto e Augusto Pinheiro. 3 ed. Lisboa: Edições 70, Portugal, 2004.

BOYER, C.B. **História da Matemática**, São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda, 1974.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática**, Lisboa, 1963.

DUROZOI, Gerard. ROUSSEL, André. **Dicionário de Filosofia**. Tradução: Marina Appenzeller. Campinas: Editora Papirus, 3 ed. SP,1999.

EVES, Howard. **Introdução a História da Matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 1995.

FERREIRA, Maria Sueli Fonseca. **Uma Análise dos Questionamentos dos Alunos nas Aulas de Números Complexos**. Natal-RN, 2007. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. - UFRN.

FOSSA, Jonh A. A Álgebra de Cardano e Viete**.** In: Iran Abreu Mendes, Iran Abreu (Org.). **As Matemáticas no Século de Palládio***.* (no prelo)

______. Ensaios Sobre a Educação Matemática. Pará: EDUEPA, 2001.

FRANCHI, A. et al. **Educação Matemática:** Uma introdução. EDUC - SP, 1999.

FUNDAÇÃO WIKIMEDIA. **Wikipédia, a Enciclopédia Livre**, Disponível em: http://pt.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler. Acesso em: 10 ago. 2006.

GUELLI, Oscar. **Coleção Contando a História da Matemática**. São Paulo: Ática, 2001.

HELLMICH, Eugene W. **Números Complexos (A história de $\sqrt{-1}$)**, Tópicos da história da matemática para uso em sala de aula. São Paulo : Atual Editora Ltda, v. 4, 1992.

MENDES, Iran Abreu. **Matemática e Investigação em Sala de Aula:** Tecendo Redes Cognitivas na Aprendizagem. Natal: Editora Flecha do Tempo, 2006.

______.(a) **Uma Aliança entre o Construtivismo e a história da Matemática.** 2001. Natal-RN, 2001. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Programa de Pós - Graduação em Educação - UFRN.

______.(b) **Uso da História no Ensino da Matemática**: Reflexões Teóricas e Experiências. Belém: EDUEPA, 2001.

______.BRANDEMBERG, J.C. **Uma Análise Histórico-Epistemológica do Conceito de Grupo:** Caminhos para uma nova transposição didática. In: Seminário Paulista de História e Educação Matemática, 1 - SPHEM: Possibilidades e Diálogos, 2005, São Paulo. **Anais**. São Paulo: IME-USP, 2005. p.378-384.

MILIES, César Polcino. A Emergência dos Números Complexos. **Revista do Professor de Matemática**. SP, nº. 24, IME-USP, 1994.

NETO, Francisco P. Rodrigues. 1998. **Um Estudo sobre aprendizagem de Conceitos Algébricos Fundamentais.** Natal-RN, 1998. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Programa de Pós – Graduação em Educação – UFRN.

OLIVEIRA, Paulo. **História da matemática**: Brevíssima História dos Números Complexos. Lisboa: Associação dos Professores de Matemática - APM, 2000. (CADERNOS DO GTHEM; 2) - Grupo de Trabalho sobre História e Ensino da Matemática. Associação de Professores de Matemática.

PCN. BRASIL,Brasília:MEC/SEC, 1997. v. 3. 1998. v.1. 2001.

PONCZEK, Roberto L. Leon, et al. **Origens e Evoluções das Idéias da Física**, Salvador: EDUFBA, 2002.

RIZZO, Gilda. **Jogos Inteligentes:** A construção do Raciocínio na Escola Natural. Rio de Janeiro: Editora Bertrand Brasil Ltda, 1997.441 págs. - 3 ed.

ROSA, Mário Servelli. **Números Complexos**: Uma abordagem história para a aquisição do conceito. São Paulo-SP, 1998. 170 f. Dissertação (mestrado em educação matemática) – Departamento de Educação da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

ROSA NETO, Ernesto. **Didática da Matemática**. São Paulo: Editora Ática, 1998.

SILVA, Benedito Antonio da. **Contrato Didático**. In: A. Franchi. Et al (org). São Paulo: EDUC, 1999.

SKEMP. R. **Psicología del aprendizaje de las matemáticas**. Madrid: Ediciones Morata, S. A, 1980.

THE MAC TUTOR HISTORY OF MATHEMATICS. SCOTLAND: School of Mathematics and Statistics and University of St Andrews, 2000. Base de dados. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/.html>. Acesso em 10 ago. 2006.

WUSSING, Hans. **Lecciones de les Histories des las Matematicas.** Tradução.Elena Ausejo, José Luis Efcorihuela ;Mariano Homigón (Editor), Daria Kara – Murzá e Ana Millón., Espanha:Siglo XXI de espana Editores, S.A. 1998.

ZABALA, Antoni, **A Prática Educativa**: Como ensinar, Trad. Ernani F. da F. Rosa, Porto alegre: Artmed, 1998.

ROBSON DE OLIVEIRA SANTOS

O USO PEDAGÓGICO DE UMA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA PARA A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE NÚMEROS COMPLEXOS

ANEXOS

Anexo 1

Imagens dos Alunos participantes do estudo definitivo trabalhando com a seqüência estruturada na Escola Estadual Nestor Lima

Anexo 2

1 ESTUDO PILOTO I : Primeira Etapa

1.1 O Ambiente da Pesquisa

Nesta seção, faremos uma breve descrição da instituição de ensino onde foi realizado o estudo piloto I, como também da turma que se submeteu a esse estudo.

1.1.1 A Escola

A primeira etapa do trabalho ocorreu no período de 27/09/2009 a 04/10/2006 na Escola Estadual prof. Ullisses de Góes (antiga Escola Técnica de Comércio do Natal), localizada na Rua Junqueira Áries, 390, no bairro da Ribeira, na cidade de Natal. A instituição funcionava com três turmas de terceiro ano, isto é, concluintes do ensino médio e público alvo de nosso trabalho.

No turno vespertino dessa escola, mesmo turno no qual executamos nosso trabalho, havia clientela tanto do ensino fundamental II (modalidade de ensino que vai do sexto ao nono ano) como também das três séries do ensino médio.

1.1.2 A Turma

Inicialmente, procuramos o professor de matemática responsável pelas turmas de terceiro ano para que pudéssemos obter algumas informações concernentes a esses alunos. Buscávamos fazer uma sondagem prévia das condições daqueles estudantes em relação aos conteúdos já aprendidos naquele período; se já haviam visto o conteúdo de números complexos, dentre outras informações. A intenção era saber se havia condições de participarem da pesquisa.

Após essa breve conversa, entramos num acordo para que o professor de matemática do turno vespertino da escola ficasse encarregado de selecionar um grupo de alunos em cada uma das três turmas mencionadas, para dessa forma formarmos um grupo maior composto por extratos das três turmas.

A escolha desses alunos se deu através de uma consulta nas três turmas da série mencionada, objetivando saber quais alunos teriam interesse em participar voluntariamente de um trabalho dessa natureza, que fora devidamente explicado, o que ao final totalizou 19 alunos interessados dos quais apenas 17 estiveram presentes. Os estudantes tinham média de idade entre 16 e 19 anos, sendo em sua maioria do sexo masculino.

Depois de formada a turma, acreditávamos ter um grupo com os pré-requisitos esperados por nós, pois ainda não haviam visto o conteúdo de números complexos e seria um grupo formado por alunos que gostavam da disciplina e estava ali de forma voluntária, não sendo um trabalho imposto.

No decurso dos dias em que trabalhamos junto à turma, observamos que, de maneira geral, havia uma espécie de revezamento entre os componentes dos grupos de modo que em quase todos os encontros trabalhamos com os grupos incompletos. Dessa forma, foram poucos os alunos que participaram de todas as etapas das atividades propostas.

Durante a execução das primeiras atividades, já percebíamos que eles apresentavam muitas dificuldades na manipulação algébrica das equações. Em conversas informais nos grupos, buscamos averiguar o motivo de tantas dificuldades e só então ficamos sabendo que praticamente não tiveram aulas de matemática no ano anterior devido à escola estar sem professor dessa disciplina no período correspondente. Logo entendemos que provavelmente deveriam estar com déficit de conteúdos, que seriam variáveis que deveríamos levar em consideração, a partir de então, durante a aplicação e principalmente na análise dos dados obtidos dessa aplicação.

2.2 A Aplicação da Seqüência

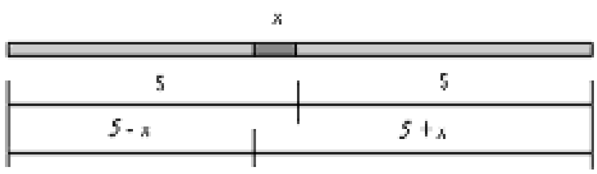
Denominaremos de aplicação da seqüência todo o percurso a ser relatado concernente ao período em que intervimos em sala de aula junto aos alunos quando os mesmos estavam atuando na resolução das atividades da seqüência didática.

Para essa fase, foram necessárias três intervenções de aproximadamente 2 horas, onde em cada uma delas os alunos se reuniam em grupos de mais ou menos três integrantes. Tal escolha foi para possibilitar uma maior dinamização nas discussões e troca de conhecimento entre eles.

Na 1ª intervenção realizada – 27/09/2006 – orientamos os alunos que todos os procedimentos para se chegar às soluções deveriam ser discutidos entre eles e que a intervenção do professor nesse sentido deveria ser a mínima possível a fim de que pudessem criar suas próprias estratégias de resolução sem ter que depender tanto do professor.

No 1º bloco de questões da atividade 00 (ver apêndice A), todos os grupos buscaram resolver as atividades através do método de tentativa e erro, o que em princípio foi positivo, pois, de alguma forma, chegaram às soluções corretas das duas primeiras questões desse bloco. Entretanto, permanecendo nesse método tiveram muitas dificuldades em encontrar uma solução para a terceira questão de cada bloco.

Nesse momento, sentimos que tínhamos que fazer uma intervenção junto à turma no sentido de mostrar que existem outras maneiras de se obter as devidas soluções utilizando outros métodos. Sugerimos que o uso da álgebra poderia ser um método eficaz nesse processo. Dessa forma, indicamos o uso de um procedimento semelhante ao que Cardano usou ao se deparar com um problema dessa natureza: pedimos que considerassem uma barra de comprimento 10 tal que suas partes medissem (5 – x) e (5 + x).



Dessa forma, observamos que ficaram convencidos de que poderiam encontrar soluções se assim procedessem. Logo em seguida, eles buscaram refazer as questões anteriores usando esse método. No entanto, pudemos observar nesses alunos mais uma vez os reflexos do déficit conteudinal já comentado, ou seja, percebíamos que eles recaiam nas mesmas dificuldades em manipular as equações, dificuldades estas que iam desde atividades mais simples, como colocá-las na forma geral e até operar com a fórmula resolutiva de uma equação quadrática. Consequentemente, nenhum grupo conseguia ir até o fim na resolução dos problemas usando esse procedimento indicado por nós sem que houvesse a intervenção do professor, como também nenhum dos grupos buscou resolvê-las utilizando produtos notáveis.

Outro fato observado nessa turma é que durante o processo operatório de resolução das equações, eles comumente descontextualizavam estas dos problemas que lhes deram origem, como se ambas não tivessem ligação alguma. Dessa forma, encontravam os valores de **x**, mas não sabiam do que se tratava aquele valor, evidenciando que não estavam acostumados a resolver situações problemas utilizando processos algébricos; ou seja, não haviam construído alguma estrutura mental que os permitissem enxergar as equações como elemento facilitador para se chegar a uma solução de um problema. E também não estavam habituados a interpretar os resultados obtidos.

Apesar de todas as variáveis citadas, ao perceberem a semelhança estrutural de cada bloco de problema da atividade de número 0, todos se sentiram dispostos a encontrar a (as) solução(ões) da terceira questão de cada um desses blocos. No entanto, durante a resolução, em um determinado momento foram unânimes em concluir que a equação não teria solução, pois desconheciam a raiz quadrada de um número negativo.

O segundo encontro com essa turma ocorreu no dia 29/09/2006 em uma semana um tanto atribulada para os alunos, pois estavam em semana de prova, o que equivale a dizer que tinham conteúdos das disciplinas para ser revisados. Isso os deixou meio ansiosos e inquietos, conseqüentemente atrapalhou o rendimento desses alunos neste dia.

Nesse dia, muitos alunos não estiveram presentes, de modo que nenhum dos grupos presentes, nesse encontro, estava completo em sua totalidade, inclusive houve a ausência de um deles. Mesmo assim, por uma questão de planejamento e de compromisso com aqueles que haviam terminado há tempos sua avaliação e estavam somente a nos esperar, resolvemos prosseguir com o trabalho.

Retomamos todas as situações feitas no encontro anterior para relembrá-los das situações problemas e das estratégias usadas por eles na resolução. Ao final da atividade 00, quando questionamos em qual questão sentiram mais dificuldades em encontrar a solução, todos foram unânimes em responder que seriam as letras (c) e (f) (ver apêndice a), ou seja, sempre as últimas questões de cada bloco. Os argumentos para tal foram todos no mesmo sentido, isto é, segundo eles não existe raiz quadrada de números negativos, apesar de que todos demonstravam alguma desconfiança de que essa dificuldade poderia ser vencida.

Ao entrarem em contato com a atividade 01 (ver apêndice A), os alunos apresentaram certa resistência em aceitar uma solução do tipo 5 - $\sqrt{-15}$ (correspondente ao quesito (a) dessa atividade) como uma resposta para a questão (c) da atividade anterior. Mesmo assim, resolveram prosseguir nessa atividade e na letra (b) conseguiram obter uma melhor compreensão do porquê de se pedir essas soluções simplificadas no quesito anterior. No entanto, o professor teve que intervir diversas vezes junto aos alunos no tocante à resolução desse quesito, inclusive para explicar as regras operatórias básicas de adição e multiplicação de radicais, o que endossa nosso comentário sobre o déficit algébrico de alunos que não tiveram a oportunidade de praticar e desenvolver essa capacidade devido à ausência dessa disciplina durante a série anterior.

Durante a atividade 01, o professor mediador precisou diversas vezes se reportar à questão (c) da atividade anterior, uma vez que essa atividade iniciava-se tomando como referência essa questão e também para que o grupo não perdesse o foco principal do motivo pelo qual estaria somando e multiplicando aquelas raízes. Esse fato se repetia comumente, uma vez que provavelmente ainda estariam acostumados a resolver equações sem fazer alguma ligação com algum problema que o gerou. Preocupavam-se apenas em chegar a uma resposta, provavelmente sem procurar entender qual o significado que ela possuía dentro do problema proposto.

Quando foram questionados se a questão (c) da atividade 00 teria solução, todos responderam que sim, embora os argumentos ainda não fossem consistentes. Para tal argumentação, recorreram a dizer que as respostas obtidas satisfaziam à condição do problema. Nossas observações nos levam a deduzir que essa afirmação foi originada quando, atuando no item b, (ver apêndice a) sentiram-se influenciados a responderem positivamente, uma vez que o item foi elaborado com essa intenção. Esse fato, de certa forma, começa a dar sentido ao nosso trabalho, já que passaram a desconfiar que tal problema tivesse solução, como desejávamos.

Após essa atividade, demos prosseguimento à seqüência iniciando um primeiro momento de leitura compartilhada acerca do percurso histórico do desenvolvimento dos números complexos. Optamos pela estratégia da leitura compartilhada por acreditar que, caso esse momento fosse feito em grupos distintos, poderia tornar o trabalho individualizado, não permitindo troca de informações, ao mesmo tempo em que poderia ficar enfadonho para alguns, tendo em vista que já vínhamos observando a resistência que alguns apresentavam em relação à prática de leitura. Dessa forma, acreditamos ter decidido por uma alternativa mais coerente, uma vez que observamos que houve um maior envolvimento da turma e um maior compartilhamento de idéias entre os alunos, o que enriqueceu a compreensão da leitura e dinamizou o progresso do trabalho.

Após esse primeiro trecho de leitura compartilhada, iniciamos com a atividade 02, que trazia alguns componentes simbólicos na sua composição (operações envolvendo números complexos) e buscava “provocar” no aluno a sua capacidade criativa no desenvolvimento de estratégias para simplificar aquelas operações, usando, até então, números desconhecidos para eles (ver apêndice A).

Todos os grupos apresentaram algumas dificuldades para iniciar essa atividade, provavelmente devido à prática escassa desse procedimento em seus contextos escolares. Dessa forma, o professor precisou fazer algumas intervenções no sentido de mostrá-los que poderiam resolver aquelas operações se fizessem uma analogia com as operações algébricas mais comuns, do tipo ax + bx (onde a e b$\in$ R), isto é, sugerimos que tratassem o termo desconhecido $\sqrt{-1}$ como sendo um valor desconhecido **x.** A partir dessa intervenção, passaram a lograr êxito com o trabalho de simplificação; no entanto, no quesito que tinha uma operação multiplicativa, muitos ainda cometiam alguns equívocos devido à falta de domínio do processo operatório de multiplicação algébrica.

A terceira e última intervenção com essa turma ocorreu no dia 04/10/2006. Nesse dia, iniciamos as atividades fazendo uma espécie de revisão comentada do que já haviam feito para, a partir daí, retomarmos as atividades subseqüentes.

Recomeçamos o trabalho retomando a atividade 02, de onde, logo em seguida, entramos na parte histórica, fazendo um paralelo das dificuldades vividas por eles ao atuarem nessa atividade com aquelas vividas por Cardano e alguns de seus contemporâneos ao se depararem com situações semelhantes. Aproveitávamos para comentar também acerca de algumas contribuições do matemático Rafael Bombelli, de Descartes e Gauss para o desenvolvimento dos números complexos.

Após esse momento, iniciamos a atividade 03. Logo percebemos que houve a necessidade de intervirmos com uma exposição sobre o conteúdo de vetores principalmente no que se refere à representação geométrica da soma vetorial, item que seria fundamental para a resolução dessa questão. Dados os devidos esclarecimentos, percebemos que, apesar de algumas limitações conteudinais, eles conseguiram resolver os questionamentos apresentados nessa atividade, exceto na letra (c) que, devido a pouca prática de generalização nas atividades de sala de aula, como já citamos, houve a necessidade de retornarem às questões anteriores dessa atividade (itens *a* e *b*), sempre com a ajuda do professor, para que pudessem perceber o desenvolvimento dos passos executados. Só então conseguiram fazer a generalização pedida.

A atividade 04 que sugeria a troca da $\sqrt{-1}$ por **i** foi bem sucedida e, salvo as dificuldades naturais já mencionadas, ocorreu sem grandes problemas. Ao término de todas essas atividades, pudemos perceber alguma satisfação dos presentes ao descobrirem que poderiam obter uma resposta satisfatória para as raízes quadradas de números negativos, algo até então impossível para os mesmos.

Em seguida, abrimos um espaço para inserirmos uma componente oral, ocasião em que todos teriam a oportunidade de socializar o que aprenderam, onde sentiram mais dificuldades, o que acharam do trabalho, etc. Juntamos todos os grupos e formamos um grupo maior e começamos essa parte indagando-os sobre o que é um número complexo. A maioria das respostas estava em conformidade com a seguinte linha de pensamento: são números que têm a unidade imaginária i ou números que respondem à necessidade de se trabalhar com a raiz quadrada de (-1).

Sob nossa ótica, entendemos que obtivemos um resultado para essa reposta bem satisfatório, pois, mesmo sem fazer referência aos números complexos como um conjunto, o conceito inicial obtido foi consistente, uma vez que suas respostas indicam que parece que perceberam a utilidade prática e operatória de se trabalhar com raízes quadradas de números negativos, ao mesmo tempo em que observaram a similitude existente entre as mais diversas experiências a que passaram a reiterar a definição de que $\sqrt{-1}$ = i e que $i^2 = -1$ como também trabalhar com algumas aplicações operatórias desses números (SKEMP,1980).

Nessa etapa do trabalho, como também na próxima, fizemos uma classificação das respostas dos alunos obtidas nas atividades da seqüência e as enquadramos em cinco categorias como descritas a seguir:

C – 1: Elaborou a equação, resolveu e chegou à resposta correta.

C – 2: Elaborou a equação, mas tinha dificuldade em prosseguir na resolução.

C – 3: Não conseguiu montar uma equação, mas chegou a alguma solução.

C – 4: Não conseguiu montar a equação e nem a resposta.

Resumiremos essa categorização através da seguinte tabela:

Quadro 01 - Categorização das Respostas da Atividade 00 (alunos da 1ª etapa)

		Categorias				**Total de pessoas**
		C – 1	**C – 2**	**C – 3**	**C – 4**	
Questões da atividade de número 00	**a**	00	00	14	03	17
	b	00	00	17	00	17
	c	03	10	00	04	17
	d	00	13	00	04	17
	e	06	11	00	00	17
	f	07	10	00	00	17

1.3 Considerações Preliminares dos Resultados Obtidos

Questão a: 14 pessoas se enquadraram na categoria C – 3 (82%) e 03 na categoria C – 4 (18%).

Inicialmente, todos os alunos que chegaram a alguma resposta se utilizaram do método de tentativa e erro. A opção por esse procedimento se deu provavelmente devido ao fato de não se sentirem seguros para usar algum procedimento algébrico, uma vez que, como já comentamos, tinham dificuldades em trabalhar com equações, o que foi ainda mais agravado pelo fato de não terem tido aulas de matemática no ano anterior ao da pesquisa. Esse fato os impossibilitou de terem acesso a conteúdos matemáticos de suma importância para que desenvolvessem, sem grandes dificuldades, a seqüência proposta, ao mesmo tempo em que sinalizou e retratou um quadro de déficit real que ocorre em grande parte das escolas públicas de nosso estado e, por extensão, de nosso país.

Questão b: Aqui os 17 participantes da pesquisa se enquadraram na categoria C - 3. (100%).

Nessa questão, podemos perceber que os dados se comportaram um pouco diferenciados da anterior. Após alguns esclarecimentos dados por nós sobre essa questão, percebemos que as três alunas que, na questão anterior, haviam se enquadraram na categoria C – 4, sentiram-se estimuladas a resolvê-la, embora ainda usando o método de tentativa e erro chegaram, dessa forma, a algum resultado.

Questão c: Em princípio, todos os alunos, provavelmente ainda persuadidos pela forma como resolveram as questões anteriores, tentaram também usar o método de tentativa e erro, embora, dessa forma, não seriam bem sucedidos, pois, como já prevíamos, não chegariam a alguma solução coerente já que ainda não conheciam o conjunto dos números complexos.

Dessa forma, o professor precisou fazer uma nova intervenção, reportando-lhes aos exemplos anteriores e sugerindo-lhes uma nova alternativa de resolvê-las utilizando a montagem de uma equação quadrática junto com os métodos adequados para resolvê-las. Assim, tivemos como resultados: 03 alunos que se enquadraram na categoria C – 1 (18%), 10 alunos se enquadraram na categoria C – 2 (59%) e 04 alunos se enquadraram na categoria C – 4 (23%). Observamos que os quatro, apesar de terem recebido os devidos esclarecimentos acerca dessa questão, ficaram na C – 4, pois detectamos que estes ainda tinham muitas dificuldades em elaborar uma equação coerente para o problema. Tais dificuldades eram advinda de séries anteriores, consequentemente, por esse motivo; não conseguiram obter uma resposta para essa questão.

A maioria dos alunos se enquadrou na categoria C – 2 provavelmente ainda pelos motivos especificados na questão (a). Aqueles que se enquadraram na categoria C – 1, apesar de encontrarem soluções coerentes, não relacionavam as soluções obtidas com a descrição do problema, isto é, haviam encontrando apenas o valor de **x** sem se darem conta do real significado daquele valor dentro daquele contexto.

Questão d: 13 alunos se enquadraram na categoria C – 2 (76%) e 04 alunos, na categoria C – 4 (24%).

Aqui, como acabaram de entrar em um novo bloco de problemas, onde a estrutura das questões era diferente, poderíamos pressupor que a nova modalidade de questões pudesse causar estranheza e, consequentemente, algumas dificuldades nos alunos ao tentarem organizar as equações possivelmente obtidas na forma normal. Essa manipulação algébrica exigia um esforço considerável desses alunos devido às deficiências de base já comentadas anteriormente, de modo que ao concluir essa tarefa não se davam conta de que a equação obtida era do tipo quadrática. Isso provocou em muitos deles, morosidade na tomada de decisão em relação ao modo de prosseguir com a resolução dessas equações.

Questão e: 06 alunos se enquadraram na categoria C – 1 (35%) e 11 alunos se enquadraram na categoria C – 2 (65%).

Nessa questão, percebemos a superação de alguns alunos que, mesmo após algumas dificuldades operatórias, se esforçaram um pouco mais e, entre perguntas ao professor e tentativas com os membros do grupo, conseguiram solucionar a questão.

Questão f: 07 alunos se enquadraram na categoria C – 1(41%) e 10, na categoria C – 2 (59%).

Dos dez alunos que ficaram na categoria C – 2, a maior parte conseguiu desenvolver estratégias de resolução da equação pelo menos até encontrar o valor do discriminante, outros foram um pouco adiante, mas todos pararam em algum ponto devido dificuldades algébrico-operatórias.

Entretanto, consideramos um saldo positivo: 41,17% dos alunos conseguiram superar suas dificuldades e encontrar soluções coerentes para a questão. Entendemos isto como um número bem razoável se considerarmos que no início dessa atividade e mesmo ainda na segunda questão dessa atividade, 00% conseguiram resolver corretamente as questões. Entendemos que, mesmo diante das dificuldades conteudinais citadas, podemos dizer que a seqüência, especificamente a atividade zero, a qual estamos investigando, atingiu resultados satisfatórios, uma vez que conseguiu despertar nos alunos o interesse para a investigação de uma solução até então estranha e desconhecida dentro de um problema aparentemente simples e ainda partindo da idéia de equações quadráticas, assunto esse mais próximo da realidade escolar destes alunos.

Anexo 3

2 ESTUDO PILOTO II : Segunda Etapa

2.1 O Ambiente da Pesquisa

2.1.1 A Escola

A segunda instituição de ensino onde aplicamos essa seqüência de atividades foi a Escola Estadual Winston Churchil, localizada na Avenida Rio Branco, Cidade Alta, no centro comercial de Natal, no período de 26/10/2006 a 07/11/2006, com uma turma do 3º ano do ensino médio que, no período, ainda não tinha tido contato com os números complexos.

Essa escola trabalha exclusivamente com o ensino médio e sua demanda é composta por estudantes que residem em praticamente toda as áreas de Natal e grande Natal; pelo fato de estar localizada em local de fácil acesso e num ponto relativamente central da cidade.

2.1.2 A Turma

A escolha da turma se deu através de uma consulta ao professor regente da disciplina de matemática do turno vespertino objetivando averiguar quais turmas ainda não tinham tido contato com o assunto de números complexos. Dentre as turmas de 3º ano daquele turno, a única que se enquadrou dentro dessa condição foi a turma P.

Diferentemente do público participante da primeira fase, aqui o público alvo era uma turma regular da escola. Agora contávamos com a heterogeneidade de afinidades por determinadas disciplinas, isto é, estávamos diante tanto de estudantes que tinham apreço pela disciplina de matemática como também diante de outros que realmente não tinham afinidade.

Os alunos tinham faixa etária de 17 e 18 anos de idade e constituíam uma turma bem numerosa (45 alunos), mas freqüentavam, em média, 32 alunos.

Logo nas primeiras visitas percebemos que se tratava de uma turma bem enérgica onde também percebemos que alguns demonstraram algum desinteresse quando mencionamos que seria uma pesquisa em matemática. No entanto, houve aqueles que se propuseram a participar ativamente da proposta. Foram exatamente esses os participantes com os quais podemos contar. Outros não trataram o estudo com seriedade ou não participaram efetivamente, isto é, não se faziam presentes em sala em alguns dos momentos desse trabalho.

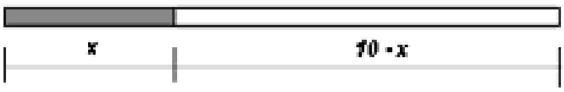
2.2 Aplicação da Seqüência

Para essa fase da pesquisa, foram necessárias quatro intervenções em sala de aproximadamente uma hora e trinta minutos cada. Em cada uma delas, os alunos se reuniam em grupos de dois integrantes. Tal agrupamento foi pensado no sentido de possibilitar uma maior dinamização nas discussões e troca de conhecimento entre eles, uma vez que percebemos que, caso formássemos grupos mais numerosos, provavelmente possibilitaria dispersão no trabalho, tendo em vista que a turma era de difícil controle, o que favoreceria um menor rendimento desse trabalho.

Em nossa primeira intervenção, no dia 26/10/2006, orientamos os alunos sobre os seguintes aspectos: os procedimentos para se chegar às soluções deveriam ser discutidos entre eles e que a intervenção do professor nesse sentido deveria ser a mínima possível.

No 1º bloco de questões da atividade 00, conforme o apêndice B, constatamos a resistência que esses alunos tinham em se utilizarem de procedimentos algébricos para a resolução de problemas. Um fato que ilustra esse comentário é que todos os grupos que conseguiram desenvolver uma estratégia de resolução procuraram fazer através do método de tentativa e erro, o que por sua vez acarretou dificuldades na resolução da terceira questão de cada um dos blocos dessa atividade, uma vez que, dessa forma, não chegariam às soluções esperadas para o problema proposto.

Tal realidade nos levou a fazer uma intervenção no sentido de mostrar que existem outras maneiras de se obter as devidas respostas. Sugerimos então o uso de procedimentos algébricos. Dessa forma, tal como fizemos com a primeira turma, escolhemos a questão (c) do primeiro bloco da atividade 00 e orientamo-los a usar um procedimento semelhante ao que Cardano usou quando se deparou com um problema dessa natureza. Pedimos que considerassem uma barra de comprimento 10 tal que suas partes medissem x e 10 - x .



Dessa forma, observamos que ficaram mais confiantes de que poderiam encontrar as demais soluções se assim procedessem. No entanto, pudemos observar o fato que já acontecera na primeira etapa dessa pesquisa: a resistência unânime da turma em utilizar procedimentos algébricos para resolução de problemas. Isso nos chamou a atenção devido ser algo que estava a se repetir em turmas distintas e com contextos diferenciados.

Outro fato observado é que parte das dificuldades dos alunos também era oriunda da má interpretação dos enunciados dos problemas e também da exígua habilidade operatória com expressões algébricas, sendo que em muitos casos não haviam desenvolvido o domínio de algum método de resolução para equações quadráticas. Desse modo, em princípio, nenhum grupo conseguiu resolver os problemas sem nossa intervenção.

Também percebemos outro fato que se repetia semelhante à primeira etapa: durante o processo operatório de resolução das questões, eles também descontextualizavam a equação de seu problema de origem e concentravam a atenção apenas nos cálculos, desprezando todo o contexto do problema e encarando a equação, como algo isolado e sem ligação com algum problema que lhe dera origem. Dessa forma, só buscavam encontrar o valor de **x**, mas não sabiam o significado daquele valor.

Apesar de todas as limitações citadas, observamos que ao perceberem a semelhança estrutural dos blocos de problemas da atividade 00, os alunos também se sentiram dispostos a tentar encontrar a (as) solução (ões) da terceira questão de cada bloco. Os argumentos proferidos em sala endossam a nossa afirmação. Dentre eles, podemos citar, por exemplo, o seguinte questionamento extraído da fala de um dos alunos participantes: "[...] se os outros tiveram solução, o terceiro, que é tão semelhante aos anteriores, também deve ter".

No entanto, em um determinado momento da resolução e diferentemente dos alunos da primeira etapa, que afirmaram que a questão não teria solução, estes argumentaram que *não sabiam continuar a conta*, já que desconheciam a raiz quadrada de um número negativo, porém acreditavam que haveria solução. Entendemos isso como sendo um fator positivo para o trabalho, uma vez que parece descrever as primeiras mudanças de concepções dos alunos em relação à existência de solução para a raiz quadrada de um valor negativo.

Na segunda intervenção, que ocorreu no dia 31/10/06, iniciamos o trabalho retomando o primeiro bloco de questões da atividade de número 00. Desenvolvemos o segundo bloco e conseguimos apenas terminar essa atividade. A morosidade nesse dia se deu devido às dificuldades operatórias que os alunos apresentavam devido também à fase natural de adaptação a um modelo de atividade com teor e características diferentes das quais estavam acostumados. Também é necessário frisar que estávamos trabalhando no horário normal de aulas e dentro de um espaço de tempo restrito, gentilmente cedido pelo professor de matemática, que deveríamos respeitar, ou seja, dispúnhamos de duas aulas de 50 minutos cada, sendo que alguns desses encontros acabamos perpassando esse tempo e usamos o momento das aulas, também gentilmente cedidas, de outras disciplinas.

Percebemos que a pouca habilidade algébrica dos alunos e a reduzida intervenção do professor nas resoluções dessas questões, o que já fora previamente acordado, os deixava um tanto inquietos. Isso até nos levou a repensar se não deveríamos resumir essa primeira atividade em apenas um bloco de questões, pois o tempo excessivo que levavam para resolvê-las os tirava um pouco do foco principal da atividade, o que para alguns deixou a dinâmica de trabalho um tanto enfadonho e, por vezes, mecânico demais, o que não era nosso objetivo.

O terceiro encontro aconteceu no dia 01/11/06, quando tivemos de retomar as questões anteriores para que a turma relembrasse o trabalho executado. Nesse dia, ainda percebemos que o trabalho progredia lentamente quando precisavam operar com equações, ou mesmo para generalizar alguma operação algébrica. Foi então que sentimos a necessidade de intervimos junto à turma buscando fazer uma pequena revisão das principais operações envolvendo o conceito de polinômios, os quais seriam úteis na resolução dos problemas apresentados na seqüência. Tal intervenção foi muito positiva, pois, para nossa surpresa, os alunos tiveram a oportunidade de relatar que não haviam estudado esse conceito no ensino médio. O conhecimento que tinham sobre esse assunto seria aqueles vistos ainda no nível fundamental. Talvez isso justifique a lentidão nos trabalhos. Por isso, nesse encontro, só conseguimos avançar até o começo da atividade 03.

Ainda nesse encontro observamos que alguns alunos da turma se encontravam na escola, mas não estavam presentes em sala nesse trabalho. Segundo relato dos presentes, a evasão ocorrera porque não se tratava de uma aula convencional em que não constaria falta no diário do professor, logo parte desses alunos se sentia desobrigado a participar do compromisso firmado.

O quarto e último encontro de atividades coletivas ocorreu no dia 07/11/2006. Iniciamos o trabalho retomando o início da atividade 03. Para tanto, fizemos uma breve revisão dos assuntos que subsidiariam essa atividade, isto é, localização de pontos sobre o eixo de coordenadas cartesianas, o conceito de vetor e suas principais operações.

Após esse momento, alguns ainda precisaram de ajuda do professor para compreender como poderiam marcar no eixo de coordenadas cartesianas um número do tipo $a + b\sqrt{-1}$ (ver apêndice A - atividade 03), mas diante de alguns esclarecimentos, onde também aproveitamos e sugerimos a eles que relessem o texto que antecede essa atividade, no qual comenta a forma gaussiana da representação geométrica para os números complexos, a questão transcorreu sem grandes problemas.

Após os devidos esclarecimentos o item (b) transcorreu normalmente e a maior parte da turma conseguiu marcar esses pontos no eixo de coordenadas, salvo em alguns grupos em que o professor teve de se fazer presente durante todo o desenvolvimento da questão.

No item (c), parte dos alunos teve dificuldades em generalizar a soma algébrica. Fizemos uma nova intervenção junto à turma, no sentido de fazê-los observar a soma geométrica obtida no item anterior e, por extensão, generalizar esse resultado para a soma algébrica, objetivo do item (c).

Terminada essa atividade entramos para mais um momento de leitura compartilhada da história da matemática, ocasião em que comentamos sobre as contribuições do matemático Leonardo Euler para o desenvolvimento dos números complexos ao representar a raiz quadrada de -1 pelo símbolo i, e também por desenvolver as regras fundamentais dos números complexos. Logo, entraríamos na atividade 04, que reporta o trecho lido anteriormente, através da substituição da $\sqrt{-1}$ pelo símbolo *i* e aplicação de algumas regras fundamentais dos números complexos.

Nessa altura, já percebíamos um pouco mais de maturidade nas estratégias usadas, uma vez que os alunos já haviam se deparado com uma estrutura semelhante na atividade anterior, o que não quer dizer que já haviam adquirido autonomia para atuarem sozinhos sem ajuda do professor, mas as intervenções foram mais em relação à substituição da componente simbólica *i* e menos com as questões operatórias.

Ao término dessa atividade, abrimos espaço para um momento coletivo de socialização oral acerca do trabalho executado. Questionamos aos participantes sobre o que haviam aprendido, as principais dificuldades e as idéias desenvolvidas sobre números complexos. Nem todos quiseram falar, mas os que se propuseram a responder a ultima pergunta sempre aludia os argumentos em relação à existência do elemento imaginário *i*.

Observamos, através do desenvolvimento do trabalho, que essa proposta quebra o contrato didático que normalmente é instaurado em uma aula tradicional (ver p. 29). Aqui, o professor não poderia dar de imediato todas as respostas que os alunos almejavam, já porque o autor da construção do conceito deveria ser o próprio aluno.

Silva (1999) comenta que o contrato didático se manifesta principalmente quando é transgredido por um dos parceiros da relação didática e que em muitos casos é preciso que haja a ruptura e a renegociação do mesmo para que haja o avanço do aprendizado. Dessa forma comenta um trecho que parece ilustrar o fato ocorrido em nossa sala:

> Um exemplo bastante elucidativo de ruptura do contrato didático, nesta situação, é o caso em que o professor pretende introduzir um conceito novo por meio não de uma aula expositiva, mas de atividades em que os alunos, partindo de uma situação-problema, resolvem questões e, no final, o professor faz com toda a classe o fechamento, visando a institucionalização do conceito que se pretende construir. Os alunos recebem a ficha e de atividades e aguardam que o professor inicie o trabalho. Quando este lhes diz que são eles quem devem trabalhar, a primeira reação vem imediatamente, através de questões do tipo: “não sei fazer”, “como começa?”, “a teoria não foi dada”, “você não vai explicar o enunciado?”, “não entendi o que é pra fazer”, e assim por diante. (SILVA,1999, p.47)

2.3 Considerações Preliminares dos Resultados Obtidos

Tal como fizemos com as respostas da primeira turma a participar dessa pesquisa, resolvemos classificar as soluções da questão 00. Dessa vez entendemos que se fez necessário acrescentar uma quinta categoria que contempla um outro comportamento distinto dos anteriores e observado em algumas respostas dos alunos. Portanto, nessa etapa passaremos a trabalhar na perspectiva de cinco categorias:

C – 1 : Elaborou a equação, resolveu e chegou à resposta correta.

C – 2: Elaborou a equação, mas tinha dificuldade em prosseguir na resolução.

C – 3: Não conseguiu montar uma equação, mas chegou a alguma solução.

C – 4: Não conseguiu elaborar uma a equação e nem a resposta.

C – 5: Conseguiu elaborar a equação, resolveu e chegou à outra solução que não era a correta.

Quadro 02 - Categorização das Respostas da Atividade 00 (alunos da 2ª etapa)

		Categorias					Total de pessoas
		C-1	C- 2	C- 3	C- 4	C- 5	
Questões da atividade de número 00	**a**	04	00	22	03	00	29
	b	02	00	22	05	00	29
	c	22	03	00	02	02	29
	d	17	04	00	02	06	29
	e	21	02	00	02	00	25 [13]
	f	09	06	00	02	08	25

Após analisarmos, de maneira ainda preliminar, os dados desse quadro, achamos que serão pertinentes alguns comentários sobre o desenvolvimento dessa atividade:

Questão a: 04 alunos se enquadraram na categoria C – 1 (14%), 22 na categoria C – 3 (76%) e 03 alunos na categoria C – 4 (10%).

Aqui, tal como na primeira etapa, a maior parte da turma foi enquadrada na categoria C – 3, pois todos os alunos, talvez pela dificuldade em trabalhar com álgebra, preferiram usar o método de tentativa e erro.

Questão b: 02 alunos ficaram na categoria C – 1 (7%); 22, permaneceram na categoria C – 3 (76%) e 05 alunos ficaram na categoria C – 4 (17%).

A maior parte dos alunos ainda ficou na categoria C – 3; talvez persuadida pela questão anterior onde obtiveram sucesso de ter encontrado a solução usando esse método, preferiram continuar a usá-lo.

Nesse item um dado curioso nos chamou atenção: duas alunas que responderam a questão anterior onde haviam ficado na categoria C – 1 ; aqui se enquadraram na categoria C – 4. Isso parece evidenciar que ainda não haviam atentado para a semelhança estrutural dos problemas.

[13] Nas questões (*e)* e (*f)* não teremos um total de 29 alunos, pois alguns deles não estavam presentes ou haviam faltado no dia da aplicação dessa atividade.

Questão c: 22 alunos se enquadraram na categoria C – 1 (76%); 03 ficaram na categoria C – 2 (10%); 02 ficaram na categoria C – 4 (7%) e 02 ficaram na categoria C – 5 (7%).

Nesse item tivemos que fazer uma intervenção para mostrar aos alunos que existem outros métodos para encontrar as soluções corretas, sugerindo, desse modo, que usassem o método algébrico através da elaboração de uma equação quadrática e consequentemente sua resolução. Observamos, então, que esses alunos também apresentavam bastante dificuldades operatórias ao trabalhar com equações. Por esse motivo, recorriam diversas vezes ao professor para que o mesmo os ajudasse nas regras operatórias básicas de polinômios.

A necessidade de uma nova categoria (C – 5) foi gerada quando percebemos que alguns desses alunos, não satisfeitos por não terem conseguido encontrar a solução dessa questão, buscavam criar suas próprias estratégias. Para isso, acabavam burlando algumas regras matemáticas e acabaram falseando a solução para esse item. Outros ainda fizeram os cálculos coerentemente, mas devido a pouca experiência algébrica, ou talvez desatenções durante o processo de resolução, acabaram chegando a outras soluções não coerentes com o problema.

Questão d: 17 alunos ficaram na categoria C – 1 (59%); 04 na categoria C – 2 (14%), 02 na categoria C – 4 (7%) e 06 alunos na categoria C – 5 (21%).

Após perceberam a maior eficácia e segurança que oferece o método algébrico frente ao método de tentativa e erro, a maior parte da turma preferiu usá-lo e dessa forma chegou às soluções corretas. Entretanto, apesar de todas as explicações do professor aplicador, praticamente um quinto da turma ainda continuava a cometer diversos equívocos nas operações algébricas requeridas nas resoluções das equações e acabaram por encontrar outras soluções que não eram as corretas.

Questão e: 21 alunos se enquadraram na categoria C – 1 (84%), 02 ficaram na categoria C – 2 (8%) e 02 alunos, na categoria C – 4 (8%).

Atentamos aqui para um aumento bem expressivo de alunos que atingiram a categoria C – 1 na última questão do segundo bloco. Entendemos esse fato como positivo, pois demonstra que os alunos atingiram alguma maturidade matemática para o trabalho e despertou o interesse para buscarem a solução das questões.

Outro fato que também observamos é que nessa etapa do trabalho a maioria dos alunos já havia percebido a semelhança estrutural dos problemas e, por esse motivo, repetiram o raciocino anterior para a resolução desse item. Talvez por isso houve uma expressiva porcentagem daqueles que elaboraram uma equação, resolveram e chegaram à resposta correta.

Logo na questão (f) tivemos os seguintes resultados:

Questão f: 09 alunos ficaram na categoria C – 1 (36%); 06 se enquadraram na categoria C – 2 (24%); 02 na categoria C – 2 (8%) e 08 alunos ficaram na categoria C – 5 (32%).

Esperávamos, nessa questão, ter um percentual maior de alunos na categoria C – 1, uma vez que já haviam passado por uma situação semelhante no primeiro bloco e também já conheciam a estrutura dessa questão. Também vinham anteriormente resolvendo duas questões com estrutura bem semelhante. Ainda assim, dos percentuais obtidos nessa questão o maior deles ficou na categoria C – 1 que, apesar de esperarmos mais, continua a ser um dado positivo.

2.4 Entrevistas

Finalizamos essa etapa do trabalho com uma entrevista feita aos os alunos acerca das estratégias usadas na seqüência de atividades previamente elaborada. Essa entrevista ainda não tinha caráter de validar o trabalho, como o será na próxima fase, mas tinha como meta buscar esclarecer alguns pontos da seqüência que não haviam ficado esclarecidos para nós e, possivelmente, para outros leitores do trabalho.

Usamos para tal, uma amostra de quinze alunos que atuaram na seqüência. Não foi possível utilizar o universo de cem por cento desses alunos pelas dificuldades encontradas em localizá-los, uma vez que estavam no final do ano letivo onde alguns já haviam sido aprovados e nem sempre conseguíamos encontrá-los na escola.

Optamos pelo uso desse instrumento por entender que poderia ser um meio mais flexível para obter mais individualizadamente algumas particularidades das respostas registradas nas atividades da seqüência realizada por eles. Dessa forma, buscamos analisar se as idéias relacionadas ao conceito em questão teriam sido desenvolvidas, como também os impactos positivos e negativos relatados por eles em um trabalho dessa natureza.

As entrevistas foram formuladas de modo a investigar se os objetivos propostos por nós teriam sido alcançados. Também buscavam esclarecer alguns equívocos que não teriam ficado claros apenas com as respostas escritas dos alunos. Por esse motivo, não obedecemos a um roteiro padrão rígido para todos os alunos. Dependendo dos casos, mudávamos um pouco o enfoque das perguntas a fim de buscar entender com mais exatidão as particularidades e os motivos que os levaram a utilizar determinadas estratégias.

Dentre as perguntas em comum, destacaremos algumas que foram importantes para obtermos algumas conclusões acerca de nosso estudo.

Questionamos aos entrevistados perguntando: *como eles classificam o nível de dificuldade da primeira atividade da seqüência (atividade 00)?* As respostas foram quantificadas em dados percentuais sem casas decimais. Tivermos que 33% dos alunos acharam fáceis, 40% classificaram como difíceis, 13% acharam ter nível mediano e outros 13% responderam que as duas primeiras de cada bloco eram fáceis, porém as terceiras, eram difíceis.

Dentre as pessoas que consideraram *fáceis*, nenhuma delas conseguiu resolver corretamente as questões antes da revisão dos conteúdos dada pelo professor aplicador. Em dois desses casos, os alunos argumentaram que acharam fáceis, embora não lembravam dos procedimentos que poderiam usar para resolver a questão. Isso parece evidenciar o fato de que os conteúdos vistos em sala ainda são, na maioria dos casos, aprendidos através de procedimentos mecânicos, fragmentados e descontextualizados de um problema gerador.

Ao que nos parece, os assuntos das disciplinas curriculares são entendidos pelos alunos como sendo blocos de conteúdos fragmentados e sem ligação entre si. Ainda observamos algumas evidências que demonstram que os alunos têm dificuldades em transportar esses conhecimentos para outras realidades que não sejam aquelas próprias de uma situação de sala de aula durante a explicação daquele conteúdo.

Dos 46% que julgaram *difícil*, a maioria esboçou a idéia de que precisariam de uma revisão para que pudessem adquirir mais segurança e embasamento para resolver essas questões. Sobre esse ponto, reconhecemos que nos equivocamos no momento em que acreditávamos ter dimensionado adequadamente o nível das questões sem a necessidade de uma revisão anterior e sem ter levado em conta as possibilidades de ocorrerem tantos problemas, alguns já citados, que podem aparecer em um trabalho dessa natureza.

Dessa forma, sugerimos que, caso esse trabalho venha a ser utilizado para fins didáticos, possa ser incorporado a ele uma atividade introdutória na qual conste um trabalho de revisão sobre alguns conceitos que seriam pré-requisitos à resolução da seqüência por nós elaborada, como por exemplo, noções operatórias sobre polinômios, resoluções de equações quadráticas, principais operações envolvendo vetores e outros que o aplicador julgar necessário.

Após essa experiência, passamos a entender que esse procedimento se faz necessário para relembrar aos alunos conceitos e conteúdos que, por ventura, não lembrem e que serão fundamentais para terem sucesso nas atividades propostas.

Outro questionamento que fizemos nas entrevistas (ver apêndice B) buscava investigar se, as duas primeiras questões de cada bloco da atividade 00, imprimiram nos alunos alguma suspeita de que as terceiras questões de cada bloco teriam, de fato, solução. Obtivemos os seguintes resultados: 27% disseram que achavam que não teriam solução, 73% acharam que teriam solução.

Aqueles que responderam negativamente à pergunta afirmaram que assim acharam porque até aquele momento, segundo suas concepções, raízes quadradas de números negativos não teriam soluções. Dentre aqueles que responderam positivamente, 56% deles perceberam a semelhança estrutural entre os problemas e isso os fez acreditar que essa questão também poderia ter solução. Das quatro gravações de áudio que pudemos ouvir e que tinham algum relato sobre esse item, todos disseram que, após resolverem as duas questões iniciais, sentiram-se estimulados a continuar a resolver as demais. Esses dados parecem endossar os objetivos do trabalho, uma vez que serviu como ponto de partida para incitá-los a ir adiante na resolução dessas questões.

Quando perguntados se a abordagem geométrica da soma de dois números complexos, usadas na atividade 03, teria ajudado a perceber como se processa a abordagem algébrica, tivemos os seguintes resultados: 45% responderam que não conseguiram enxergar alguma relação entre essas abordagens e relataram que tiveram dificuldades em compreender essa atividade. Os outros 54% disseram que conseguiram observar essa relação e que o desenho (eixo de coordenadas cartesianas) ajudou essa percepção.

Esperávamos ter um índice ainda maior dos que respondessem positivamente a pergunta. No entanto, segundo nossa análise, isso provavelmente deve ter ocorrido devido a forma como estão acostumados a conceber os conteúdo de sala de aula, isto é, ainda permanecem presos aos métodos tradicionais onde a inserção dos conteúdos normalmente vem desvinculadas de uma situação-problema e os exercícios, geralmente utilizados, apenas como fixação dos devidos conhecimentos. Desse modo, é natural que a nova concepção de aprendizagem gere algum desconforto inicial por parte dos alunos. Portanto, a adaptação metodológica precisa de um tempo para acomodar-se em meio a um contexto de alunos cujos processos de perceber a matemática se desenvolveu, ao longo de suas vidas escolares como algo ainda muito mecânico e advindo quase que essencialmente de aulas expositivas.

Já os que responderam positivamente argumentaram que essa abordagem (geométrica) seria ponto fundamental para conseguirem resolver o item (c) dessa mesma atividade. Esse argumento corrobora positivamente com nossas pretensões em relação à atividade, uma vez que ilustra que, mesmo diante das limitações comentadas, alguns perceberam, através da geometria, a abordagem algébrica da soma de números complexos.

Quanto aos demais, levamos em consideração nessa análise, que para o desenvolvimento dessa atividade os alunos precisariam ter em mente o conteúdo de soma vetorial para fazerem a soma geométrica pedida na atividade. Mesmo diante de uma breve revisão, alguns alunos ainda reclamaram precisar de mais tempo para assimilar o conteúdo visto, pois apresentavam muitas dificuldades de aprendizagem ou não lembravam de terem visto.

Perguntamos também se *após a realização de um trabalho dessa natureza conseguiram formar algumas idéias sobre números complexos e se foram capazes de operar com os mesmos*. Obtivermos as seguintes respostas:

69% dos entrevistados afirmaram ter desenvolvido essas idéias e estarem aptos a operar com essa nova modalidade numérica, 31% desses alunos deram uma resposta que demonstra alguma insegurança em relação a pertinência dessas idéias, uma vez que responderam com a expressão "*mais ou menos*" a esse questionamento.

Ao serem questionadas sobre o que seria um número complexo, os alunos que responderam positivamente, em sua maioria, mostravam a idéia de que seria todo número que possui a unidade imaginária *i*. Outras respostas mostravam que seria todo número escrito sob a forma a + bi. Nenhum deles esboçou a idéia de ser um conjunto extensão dos números reais. No entanto, as questões não foram elaboradas no sentido de mostrar essa dimensão, mas sim a formação de idéias para o desenvolvimento do conceito.

É importante mencionar que aqueles alunos que revelaram ainda não estarem seguros acerca das idéias desenvolvidas sobre conceito de números complexos, em nenhuma hipótese desqualificaram a credibilidade do trabalho em relação à possibilidade de gerar a aquisição dessas idéias, mas, ao contrário, afirmaram não ter se esforçado suficientemente e não terem demonstrado seriedade e o interesse necessário para obter êxito no trabalho.

Esse pensamento parece estar ilustrado nas palavras transcritas abaixo de um relato colhido na entrevista de um desses alunos: "[...] deu pra aprender um pouco, não aprendemos mais porque não nos interessamos [...]".

Já o aluno P1, que também se incluía dentro desses 31%, expressou-se sobre esse tema através do seguinte depoimento:

> [...] o aprendizado com quadro e giz é melhor porque o professor está ali, explicando tudo. Estamos acostumados com a modalidade antiga, afinal foram muitos anos desse jeito.

Quando lhes perguntamos quais os pontos mais positivos e mais negativos em uma abordagem utilizando atividades estruturadas (ver apêndice B – questão 13), obtivemos algumas linhas de pensamento bem semelhantes que, portanto, resolvemos categorizá-las em positivas e negativas de acordo com a análise de conteúdos que corroborem aos objetivos a ser atingidos com essa seqüência didática:

Tabela 3 – Opinião dos alunos da segunda etapa em relação ao trabalho com atividades estruturadas

Pontos Positivos	**% das respostas dos alunos participantes da entrevista que responderam positivamente[14]**	**Pontos Negativos**	**% das respostas dos alunos participantes da entrevista que responderam negativamente**
Conhecemos uma nova modalidade de trabalho	27%	Deveria ter uma ampla revisão antecipada	18%
A aprendizagem é mais fácil	18%	nenhum	9%
Traz uma aprendizagem mais eficaz e uma motivação para ir adiante na resolução das questões	18%	Sentimento de impotência quando percebem que não estão conseguindo êxito na resolução das questões	36%
Obriga -nos a fazer uma revisão dos conteúdos	18%	Causa ansiedade, uma vez que não têm as respostas de imediato.	18%
Ajuda a entender como se resolvem alguns problemas	18%	Preferem não prosseguir quando surgem as dificuldades	18%

Acreditamos que os posicionamentos demonstrados acima são bem razoáveis uma vez que, de modo geral, endossam os objetivos propostos por nós quando decidimos elaborar essa seqüência de atividades. Os posicionamentos também corroboram com o argumento de que é possível trazer à tona outras formas de aprendizagens mais significativas que possam vir a colaborar com a melhoria das condições de ensino e aprendizagem a respeito dos números complexos.

[14] Valores arredondados sem casas decimais

ROBSON DE OLIVEIRA SANTOS

O USO PEDAGÓGICO DE UMA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA PARA A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE NÚMEROS COMPLEXOS

APÊNDICES

Apêndice A

Seqüência didática

Nesse trabalho acreditamos que uma seqüência didática elaborada com motivações históricas onde o aluno possa interagir na construção do conhecimento e se utilizando de motivações e dúvidas semelhantes que acompanharam o desenvolvimento dos números complexos seja uma forma oportuna para se inserir esse conteúdo.

Atividade 00

Parte I

Leia atentamente os problemas abaixo e tente encontrar a (s) soluções para cada um deles.

- **1º Bloco de questões**

a) Dividir 14 em duas partes tal que o produto delas seja 40. Quanto medirá cada uma dessas partes?
b) Dividir 10 em duas partes tal que o produto delas seja 24. Quanto medirá cada uma dessas partes?
c) Dividir 10 em duas partes tal que o produto delas seja 40. Quanto medirá cada uma dessas partes?

- **2º Bloco de questões**

d) Qual a medida do lado de um quadrado cuja área mais 96 resulta 20 vezes o seu lado?
e) Qual a medida do lado de um quadrado cuja área mais 100 resulta 20 vezes o seu lado?
f) Qual a medida do lado de um quadrado cuja área mais 101 resulta 20 vezes o seu lado?

Parte II

Como você deve ter observado, existem blocos de problemas com situações bem parecidas. Houve algum(s) que você sentiu mais dificuldade em encontrar as soluções? Por quê?

Atividade 01

Retomemos a situação da letra c da atividade anterior e analise alguns aspectos desse problema:

a) Escreva as raízes, na forma mais reduzida possível, que representam as soluções do problema descrito.

b) Se somarmos ou multiplicamos essas raízes chegaremos à descrição do problema?

c) Em sua opinião esse problema tem solução? Justifique com argumentos.

- **UM POUCO DE HISTÓRIA**

Por voltado século XV o matemático francês Nicolas Chuquet, conhecido pela sua obra *Triparty en la Science des Nombres ,* ao resolver a equação quadrática $4 + x^2 = 3x$ (em simbologia moderna) obtém como *soluções:*

X = $\frac{3}{4} \pm \sqrt{2.\frac{1}{4} - 4}$ e afirma que esta raiz é impossível.

O Primeiro matemático da história a considerar os números complexos com mais seriedade foi o italiano Gerolamo Cardano. Nascido em Pavia, foi um cientista a moda de seu tempo, matemático, filósofo, médico.

Em sua obra *Ars Magna* (Nuremberg, 1545), uma das obras-primas de toda a Renascença, Cardano utilizou-se de um problema semelhante e teve as mesmas indagações que você provavelmente teve ao se deparar com raízes dessa forma. Ele dizia que esse problema é "manifestamente impossível, mas, mesmo assim vamos operar" e concluiu que as soluções encontradas eram "verdadeiramente sofísticas e sua manipulação tão sutil quanto inútil". Porém, ao contrário dos matemáticos que o precederam,ele não só não evita falar dos imaginários como cria exemplos *ad hoc* no capítulo XXXVII, que pressupõem a sua existência, pelo menos na *imaginação*.

Atividade 02

E você, como faria para operar e simplificar expressões do tipo abaixo especificadas? Justifique a sua maneira.

a) $2\sqrt{-1} + 5\sqrt{-1}$

b) $(1 + 3\sqrt{-1}) + (2 - 7\sqrt{-1})$

c) $(3 + 2\sqrt{-1})\,(4 - 2\sqrt{-1})$

- **UM POUCO MAIS DE HISTÓRIA**

Embora assumisse a existência dessa estranhas entidades, Cardano não sabia operar com elas.

Devemos observar que nesse estágio tudo é um jogo com símbolos porque não se sabe o que é $b\sqrt{-1}$ (seria o produto de um número real *b* por uma "coisa" que evidentemente não é um número real) e também não se sabe o que é $a + b\sqrt{-1}$ (soma de um número real com O QUÊ?). Essa era a situação no século XVI.

O problema só foi resolvido em 1550 com a obra *Álgebra* do matemático italiano Rafael Bombelli que também tinha estudado a obra de Cardano. A edição manuscrita dessa obra é de 1550, no entanto só foi publicada em 1572.

A *Álgebra* de Bombelli começa com material elementar e culmina com o estudo das equações cúbicas e quárticas. Ele foi o primeiro matemático a escrever as regras para a adição, a subtração e a multiplicação de números complexos.

Raízes quadradas de números negativos continuaram aparecendo nos séculos XVI, XVII, XVIII e não só no estudo de equações algébricas. O que mais perturbava os matemáticos era que essas raízes - na época, símbolos sem significado - manipuladas de acordo com as regras usuais da álgebra, forneciam resultados corretos que às vezes não podiam ser obtidos de outra maneira.

O mal estar que esses símbolos sem significado provocavam está refletido nos nomes que lhes foram atribuídos: números "sofísticos", "sem significado", "impossíveis", "fictícios", "místicos", "imaginários".

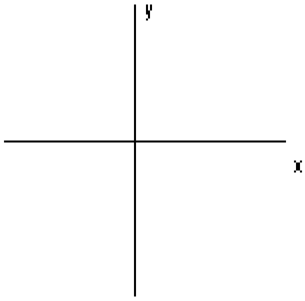
Foi uma publicação de Gauss, em 1831, que mudou totalmente esse quadro. O pensamento de Gauss consistia em olhar para os números *a* e *b* do símbolo $a+b\sqrt{-1}$, como coordenadas de um ponto em um plano cartesiano e, assim, associar a cada um desses símbolos um ponto P do plano e reciprocamente. Deu também uma interpretação geométrica, visível, para a adição, subtração e multiplicação dos símbolos.

Atividade 03

Como já mencionamos, para Gauss e outros matemáticos cada ponto no plano é a representação geométrica de um número complexo Dessa Forma, marque no eixo de coordenadas segundo a representação Gaussiana os pontos descritos abaixo:

a) os pontos 5 - $\sqrt{-16}$ e 5 + $\sqrt{-16}$ (considere $\sqrt{-15} = \sqrt{16.(-1)}$)

b) Represente cada ponto marcado como extremidades de um vetor que tem origem no centro do eixo de coordenadas e descubra que é o vetor soma resultante escrevendo em seguida ao coordenadas de sua extremidade. (Se possível reescreva essa coordenada na forma Gaussiana de número complexo)



c) Com base nos procedimentos feitos nessa atividade, generalize a soma algébrica de números complexos:

* (a + b$\sqrt{-1}$) + (b + c$\sqrt{-1}$) = ?

* (a + b$\sqrt{-1}$) – (b + c$\sqrt{-1}$) = ?

- **UM POUCO MAIS DE HISTÓRIA**

No ano de 1777 o matemático suíço Leonardo Euler era o primeiro a representar à raiz quadrada de -1 com o símbolo i. Tal simbologia foi adotada numa memória apresentada à Academia de S. Petersburgo (*De Formulis Differentiabus etc*) e só publicada postumamente em 1794. Mas como já dissemos, a operacionalidade aritmética desses números atribui-se ao matemático Rafael Bombelle onde em sua *Álgebra*, este denomina a $\sqrt{-1}$ de *mais de menos*:

> [...] Este tipo de raiz quadrada tem operações aritméticas diferente dos outros e uma denominação diferente, porque quando o cubo da terça parte das coisas é maior que o quadrado da terça parte do número, o excesso não se pode chamar - lhe ‘nem mais nem menos’. Mas vou chama-lhe ‘mais de menos’ quando for adicionado (+$\sqrt{-1}$) e quando for subtraído vou chama-lhe de ‘ menos de menos’ (-$\sqrt{-1}$)[...] (Rafael Bombelli citado por OLIVEIRA,2000, p.05)

Este também foi o responsável pela criação das regras fundamentais da multiplicação dos números complexos:

Mais vezes mais de menos , dá mais de menos.
Menos vezes mais de menos, dá menos de menos.
Mais vezes menos de menos, dá menos de menos.
Menos vezes menos de menos, dá mais de menos.
Mais de menos vezes mais de menos,dá menos.
Mais de menos vezes menos de menos, dá mais.
Menos de menos vezes menos de menos, dá mais.
(Rafael Bombelli citado por OLIVEIRA,2000, p.05)

O que em linguagem moderna teríamos:

$$(+1).(+i) = +i$$

$$(-1).(+i) = -i$$

$$(+1).(-i) = -i$$

$$(-1).(-i) = +i$$

$$(+i).(+i) = -1$$

$$(+i).(-i) = +1$$

$$(-i).(-i) = -1$$

Atividade 04

Nos números complexos abaixo substitua a $\sqrt{-1}$ por *i* e opere a multiplicação segundo as regras delimitadas por Bombelle:

a) $(1 + 3\sqrt{-1}) + (2 - 7\sqrt{-1})$

b) $(3 - 2\sqrt{-1})\ (4 - 2\sqrt{-1})$

Apêndice B

Roteiro da Entrevista

01. De modo geral como você classifica o nível de dificuldade das questões da atividade 0? Por quê?

02. Explique o método de resolução usado para resolver essa atividade. (Ex. Tentativa e Erro, Equações, etc.) Por que preferiu usar esse método?

03. Você suspeitou que a questão c dessa atividade teria alguma solução? Por quê? Se sim explique quais os motivos que o levou a suspeitar isso

04. Você se sentiu de alguma forma motivado (a) a buscar encontrar a solução desse item? Se sim, o que o (a) motivou a isso?

05. Qual foi a sua sensação quando percebeu que não estava conseguindo encontrar as soluções dessa questão?

06. Você saberia explicar o que significa as respostas x' = 4 e x''= 10 como às do item a?

07. Após passar por essa experiência com atividades estruturadas você acha que o uso de equações é uma ferramenta eficaz para se chegar às soluções de problemas?

08. A atividade de número 01 reforçou a idéia de que o item c (atividade 0) teria solução? Justifique sua resposta.

09. De que forma você compreendeu a importância da atividade 02 nessa seqüência?

10. Na atividade 03 você conseguiu fazer a relação da soma geométrica (item a) com a soma aritmética dos números complexos (item c)? comente

11. Depois da atividade 04 você seria capaz de extrair a raiz quadrada de outros números negativos e operar com eles?

12. O uso da história o ajudou a entender como nasceu o conceito de números complexos? Por quê?

13. Comente os pontos que você achou mais positivo e outro que achou mais negativo em aprender um conceito por meio de atividades estruturadas.

14. O aprendizado por esse método leva vantagens se comparados ao método de ensino tradicional? Justifique sua resposta.